Мир МАТЕМАТИКИ

5

Секта чисел

Теорема Пифагора

DeAGOSTINI

Мир математики

Мир математики

Клауди Альсина

Секта чисел

Теорема Пифагора

Москва — 2014

DeAGOSTINI

УДК 51(0.062)
ББК 22.1
М63

М63 **Мир математики:** в 40 т. Т. 5: **Клауди Альсина.** Секта чисел. Теорема Пифагора. / Пер. с англ. — М.: Де Агостини, 2014. — 160 с.

Не зря говорят, что идеи витают в воздухе. Иначе как объяснить то, что к одному и тому же открытию приходят ученые, живущие в разных уголках Земли? Теорема Пифагора, пожалуй, классический пример подобного «единомыслия». В той или иной форме это математическое утверждение присутствует практически во всех древних культурах. Этот факт заставляет нас сомневаться в том, что авторство идеи принадлежит исключительно древнегреческому математику. Но, как бы то ни было, одна из самых известных в мире теорем неразрывно связана с именем Пифагора...

ISBN 978-5-9774-0682-6
ISBN 978-5-9774-0633-8 (т. 5)

УДК 51(0.062)
ББК 22.1

Иллюстрации предоставлены:
age fotostock, Aisa, Album, Corbis, Getty Images, iStockphoto.

Оглавление

Геометрия владеет двумя сокровищами. Одно
из них — теорема Пифагора, другое — деление
отрезка в среднем и крайнем отношении.
И если первое из этих сокровищ можно
сравнить с мерой золота, то второе —
с драгоценным камнем.
Иоганн Кеплер (1571—1630)

Предисловие

Во всем мире людям, несмотря на различия, на которых мы чаще акцентируем внимание, присущи общие культурные достижения, характерные для всего человечества. Одним из ярких примеров является теорема Пифагора — фундаментальный математический результат, который был открыт и сформулирован в той или иной форме во всех культурах.

Может быть, вы не раз спрашивали себя, почему в школе изучается теорема Пифагора. Откуда она взялась? В чем заключается ее польза? Где она может пригодиться? Эта книга отвечает на все подобные вопросы, а также затрагивает множество других интересных тем, связанных с этой самой известной теоремой, например, арифметические корни.

Учась в школе, вы, несомненно, встречали такие выражения, как $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sqrt{-1}$. Вполне вероятно, что вы вычисляли их с помощью калькулятора и поэтому, скорее всего, не уделяли им должного внимания. А ведь речь идет о чрезвычайно важных для геометрии и алгебры понятиях, которые, как ни странно, в свое время вызывали и подлинную ненависть, и страстное поклонение.

Книга о теореме Пифагора не может не рассказать о заре самой математики. Эта наука началась с работ многих неизвестных математиков Вавилона и Египта, которые подготовили почву для достижений ученых древнегреческого периода. Среди них Пифагор, несомненно, является звездой первой величины в истории математики, хотя его жизнь окутана мистическими легендами. Имя Пифагора продолжает оставаться одним из самых влиятельных в истории человеческого знания. Теорема Пифагора занимает видное место в классических геометрических трактатах. Эта теорема дает прекрасную возможность насладиться красотой ее наглядных доказательств, простых и в то же время гениальных. Она также является отправной точкой для изучения некоторых математических головоломок, которые на протяжении веков вызывали интерес специалистов и любителей. Эти головоломки играют в нашей повседневной жизни гораздо бóльшую роль, чем мы можем себе представить.

Но теорема Пифагора — это не только отношения сторон прямоугольного треугольника. Ее простая формулировка также открывает нам двери в мир числа $\sqrt{2}$ с его историей, свойствами и тайнами. Неслучайно $\sqrt{2}$ стал первым в истории иррациональным числом — числом, которое не может быть выражено в виде дроби. Открытие этого числа навсегда изменило направление развития математики. Этот и другие квадратные корни откроют нам невероятные конструкции, такие как спираль Феодора Киренского, позволят нам больше узнать о знаменитом золотом сечении и других пропорциях, в названиях которых фигурируют драгоценные металлы. Все они напрямую связывают математику с природой и искусством.

Применения теоремы Пифагора разнообразны и всепроникающи. С ее помощью можно решить задачу квадратуры многоугольников, построить подобные фигуры и квадрировать гиппократовы луночки. Она также дает научную основу для построения перспективы в живописи. Более того, эта теорема проливает свет на теорию пифагоровых троек и последнюю теорему Ферма, на доказательство которой потребовалось три сотни лет. Значение теоремы Пифагора выходит за пределы мира треугольников и других плоских фигур, она удивительным образом появляется и в трехмерном пространстве.

Глава 1

Пифагор и рассвет математики

Становление математики как теоретической науки связано с Пифагором и его последователями в V в. до н. э. Именно Пифагор первым понял, что истинность утверждений необходимо доказать, прежде чем они могут быть использованы в дальнейших логических рассуждениях. Он начал делать это еще до Евклида, великого компилятора и реорганизатора классической математики. Для этого Пифагор использовал основополагающий элемент философии — логику. Он применил ее к математике настолько естественным образом, что теперь кажется, будто философия заимствовала логику у математики. Для пифагорейцев математика была не просто научным подходом: с ее помощью они объясняли мир, используя математику как инструмент для понимания природы и поиска путей к совершенству. Эта философия стала с тех пор частью западной культуры.

Успех пифагореизма легко понять. Пифагор был современником Будды (563 или 623 — 483 или 543 гг. до н. э.), Конфуция (551–479 гг. до н. э.) и Лао-цзы (VI или IV в. до н. э.), также являвшихся основателями собственных учений, в которых трудно определить, где заканчивается религия и начинается философия. Пифагорейское учение оказалось идеальным синтезом мистики и рационального мышления, смесью науки и религии, которая предлагала совершенный образ жизни. В этом и заключается мощная сила пифагореизма, его культурное значение. Связь математики и теологии, заложенная Пифагором, является характерной чертой религиозной философии Древней Греции и Средневековья и ощущается по сей день.

Пифагор начал излагать свое учение на Самосе, своем родном острове, в возрасте 40 лет. Перед этим философ долгое время путешествовал. Он был в Египте и Вавилоне, посетив, по некоторым данным, и Индию. Там Пифагор впитал восточный религиозный дух, а также собрал все сведения, какие только мог, о математике и астрономии. Вернувшись домой, он начал объединять эти знания с наследием своей собственной культуры. Многие элементы пифагорейского учения унаследованы от более ранних ученых, хотя во многих случаях Пифагор развил и уточнил их. Одним из примеров этого является самое знаменитое открытие Пифагора о прямоугольных треугольниках: сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату его гипотенузы. Во всем мире это заключение называют теоремой Пифагора, хотя ее история уходит корнями в более ранние времена.

Ранние цивилизации

Район Плодородного полумесяца простирается от рек Евфрата и Тигра до гор Ливана. В настоящее время он занимает главным образом современную территорию Ирака, а в далеком прошлом на этих землях процветали некоторые из самых развитых цивилизаций всех времен — шумеры, Аккадское царство и, наконец, вавилоняне. Всех их мы объединяем под общим названием месопотамской цивилизации («Месопотамия» значит «земли между двумя реками»). В последние два века археологи нашли сотни тысяч глиняных клинописных табличек. Название этих клиновидных знаков в переводе с латыни означает «клин». Эти символы были выгравированы с помощью стилуса на свежей глине, которую затем сушили на солнце или в печи. Найденные таблички свидетельствуют о том, что у этих народов была развита торговля и архитектура, проводились астрономические наблюдения, а в годы правления вавилонского царя Хаммурапи был составлен первый в истории свод законов. До сих пор изучена лишь малая часть этого наследия. Большинство вавилонских табличек хранятся в запасниках музеев по всему миру, ожидая расшифровки. Они, несомненно, еще не раз удивят научное сообщество, открыв великие достижения этих культур, погребенные в песке в течение почти 3500 лет.

К настоящему времени обнаружено 500 тысяч табличек, 300 из которых имеют математическое содержание. Особенно известна табличка, получившая название «Плимптон 322». Название таблички означает, что она была экспонатом

Табличка Плимптон 322 в настоящее время находится в Колумбийском университете Нью-Йорка.

номер 322 в коллекции американского журналиста Джорджа Артура Плимптона, передавшего коллекцию Колумбийскому университету в 1936 г. Табличка относится к раннему периоду династии Хаммурапи (примерно 1800—1600 гг. до н. э.) и содержит четыре столбца клинописных символов, которые оказались числами, записанными в вавилонской шестидесятеричной системе счисления.

На первый взгляд, колонки цифр могут означать записи торговых сделок, но подробные исследования выявили нечто совершенно иное и по-настоящему необычное. Табличка представляет собой список пифагоровых троек, то есть наборов натуральных чисел (a, b, c), таких что $a^2 + b^2 = c^2$. Вот несколько примеров пифагоровых троек: (3, 4, 5), (5, 12, 13) и (8, 15, 17). Согласно теореме Пифагора, каждая из этих троек представляет собой длины сторон прямоугольного треугольника. Табличка Плимптон 322 подтверждает, что вавилоняне были знакомы с геометрией и алгебраическими операциями.

С момента открытия таблички ее содержанию было дано несколько толкований. Некоторые эксперты в вавилонской математике, такие как швед Йорен Фриберг, указывали на возможность существования алгебраического метода для вычисления пифагоровых троек. Другие авторы утверждают, что за цифрами скрывается некая геометрическая модель. Австрийский математик Отто Нойгебауэр доказал, что табличка действительно содержит список пифагоровых троек, что позволило его британскому коллеге Кристоферу Зиману ввести крылатое выражение, назвав табличку Плимптон 322 «самым старым сохранившимся документом по теории чисел». В 2001 г. историк Элеонора Робсон подчеркнула образовательную функцию таблички, предположив, что она служила учебным пособием для учителей при решении задач о прямоугольных треугольниках, квадратах чисел и обратных дробях.

Это открытие оказалось большим сюрпризом и перевернуло наше понимание истории математики с ног на голову. Как вавилоняне обнаружили пифагоровы тройки? С какой целью они использовали эти числа? Чтобы создать то, что можно считать первыми тригонометрическими таблицами, они должны были знать алгоритм получения таких троек, о котором не сохранилось никаких записей, а Евклид лишь 1500 лет спустя изложил эти сведения в своих «Началах». Получается, вавилоняне не только знали теорему Пифагора, но и владели зачатками теории чисел. В их распоряжении имелись достаточные вычислительные методы, чтобы использовать эти теоретические знания на практике — и это все за тысячи лет до того, как в Древней Греции появился первый великий математик. Может, нам стоит приписать вавилонянам те открытия, которые традиционно ассоциируются с Пифагором?

ПЕРВАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА

В таблице ниже приведены расшифрованные вавилонские числа, детальный математический анализ которых позволяет сделать удивительные заключения. Даже после расшифровки клинописных символов для понимания таблицы необходимы некоторые объяснения. Очевидно, что столбец IV содержит нумерацию строк. Столбцы II и III дают значения в шестидесятеричной системе для длины гипотенузы и одного из катетов прямоугольного треугольника. В последнем столбце I указано значение для длины третьей стороны. Первый столбец самый загадочный, поскольку он содержит квадраты отношений значений d к значениям I, что в современной математике можно назвать квадратами тригонометрических функций.

В качестве примера мы перепишем в десятичной системе первую строку: катет b = 119, гипотенуза d = 169, а третья сторона будет равна 120.

I.	II. *b*	III. *d*	IV.	I
(1) 59 00 15	1 59	2 49	1	2 00
(1) 56 56 58 14 50 06 15	56 07	3 12 1 [1 20 25]	2	57 36
(1) 55 07 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3	1 20 00
(1) 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 09 01	4	3 45 00
(1) 48 54 01 40	1 05	1 37	5	1 12
(1) 47 06 41 40	5 19	8 01	6	6 00
(1) 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7	45 00
(1) 41 33 59 03 45	13 19	20 49	8	16 00
(1) 38 33 36 36	9 01 [8 01]	12 49	9	10
(1) 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 01	10	1 48 00
(1) 33 45	45	1 15	11	1 00
(1) 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12	40 00
(1) 27 00 03 45	7 12 1 [2 41]	4 49	13	4 00
(1) 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14	45 00
(1) 23 13 46 40	56	53 [1 46]	15	1 30

Строительство Великой пирамиды

В долине Нила в Египте, более чем в 1200 км к юго-западу от Месопотамии, существовала другая не менее интригующая древняя цивилизация. В течение трех тысяч лет, от 3500 г. до н. э. до древнегреческой эпохи, Месопотамия и Египет сосуществовали в относительном мире. Оба народа имели сложные системы письменности, с большим усердием проводили астрономические наблюдения и тщательно записывали военные победы и результаты коммерческой деятельности, оставив нам бесценное культурное наследие. Однако в то время как вавилоняне делали свои записи на знаменитых глиняных табличках, которые трудно уничтожить, египтяне использовали очень хрупкий материал — папирус. Десятки веков спустя лишь благодаря сухому климату пустыни эти документы сохранились от распада. Тем не менее, несмотря на огромное количество сохранившихся древних египетских сооружений, мы знаем о наследии Месопотамии больше, чем о цивилизации Египта. Знания о древних египтянах пришли к нам из трех основных источников: от объектов, найденных в гробницах фараонов, из нескольких чудом сохранившихся свитков папируса и из иероглифических надписей, украшающих храмы и скульптуры.

Множество книг написано о пирамидах в Гизе, наиболее замечательных древнеегипетских сооружениях, но основная часть этой литературы содержит больше вымысла, чем научных фактов. Эти пирамиды привлекают огромное количество энтузиастов, пытающихся найти их скрытые связи практически со всем: от значения числа пи и золотого сечения до расположения планет и звезд.

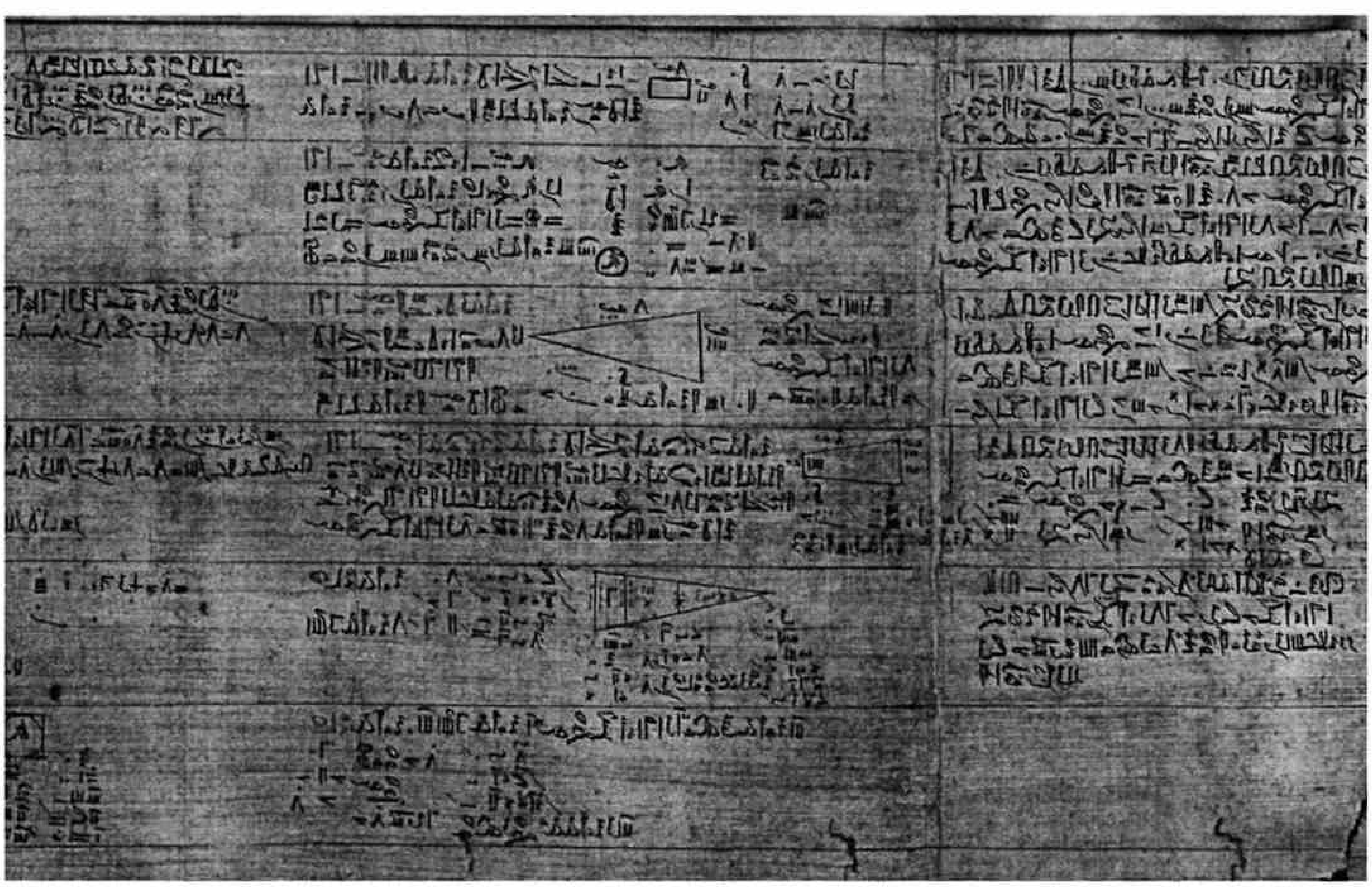
Кажется очевидным тот факт, что строительство таких огромных сооружений, как Великая пирамида Хеопса, требует довольно развитых математических знаний. Вполне логично считать, что эти знания должны включать теорему Пифагора. Но разве этот факт доказан? Лучшим свидетельством развития математики в Древнем Египте является папирус Ринда, представляющий собой сборник 87 простейших арифметических, геометрических и алгебраических задач. Этот папирус обнаружил в 1858 г. шотландский египтолог Александр Генри Ринд. К счастью, несмотря на свой солидный возраст, документ сохранился в отличном состоянии. Сегодня этот старейший в мире математический текст остается более или менее неповрежденным. Он был написан около 1650 г. до н. э. человеком по имени Ахмес, который не является автором произведения. Как Ахмес сам объясняет, этот папирус — лишь копия старого документа, датированного 1800 г. до н. э.

87 задач папируса содержат пошаговые решения, а некоторые даже сопровождаются рисунками. Скорее всего, это был школьный учебник придворных писцов,

которые выполняли все работы по чтению, письму и арифметике. Сам папирус начинается с достаточно смелого торжественного утверждения:

> «Наставление, как достигнуть знания всех существующих вещей и всех тайн и секретов, содержащихся в них».

87 задач папируса Ринда затрагивают различные темы: числа и функции, вычисление дробей, линейные уравнения, прогрессии и распределения. 20 задач имеют геометрический характер, например, нахождение объема цилиндрического амбара или площади поля с заданными размерами. Эти задачи были очень важны для египтян, жизнь которых зависела от ежегодного разлива Нила, так как после каждого наводнения приходилось заново размечать границы полей. Пять задач связаны с вычислением параметров пирамид, но в этих задачах даже косвенно не упоминается теорема Пифагора. Внимание в задачах уделяется расчету наклона сторон пирамиды, что имело основополагающее значение для строителей, которые должны были обеспечить одинаковый наклон всех четырех сторон пирамиды. Но никаких признаков теоремы Пифагора нет.



Папирус Ринда, датируемый приблизительно 1650 г. до н. э., является самым древним учебником математики. Он сохранился почти неповрежденным.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПАПИРУС РИНДА КРУПНЫМ ПЛАНОМ

На этом увеличенном фрагменте папируса Ринда мы видим знакомые математические фигуры. Изображенный здесь треугольник относится к задаче номер 51, в которой требуется найти площадь треугольника с высотой 10 хетов и с основанием 4 хета. Хет, или «стержень», – это древнеегипетская единица измерения длины, составляющая 100 локтей. Египетский царский локоть был равен 52,3 см (или 7 ладоней).

Таким образом, в задаче рассматривается треугольник с высотой 523 м и с основанием 209 м.

Из решения Ахмеса видно, что этот треугольник равнобедренный, разделенный на две части центральной осью, поэтому он может быть использован для построения прямоугольника с такой же площадью.

Если папирус Ринда содержит краткое изложение математических сведений, которые должен был знать представитель образованной элиты — писец, архитектор или сборщик налогов, — то означает ли отсутствие каких-либо упоминаний о теореме Пифагора то, что египтяне ее не знали? Хорошо известно, что в качестве практического инструмента для измерения прямых углов они использовали канаты с расположенными на равных расстояниях 3, 4 и 5 узлами (простейшая пифагорова тройка). Однако нет никаких доказательств тому, что это практическое знание позволило им сформулировать общую теорему, связывающую длины сторон прямоугольного треугольника. Если египтяне использовали при строительстве пирамид какую-то теорему, подобную теореме Пифагора, то археологам еще предстоит найти документ, подтверждающий это.

Наряду с папирусом Ринда существует еще один важный математический документ Древнего Египта, известный как Московский папирус. Датированный 1890 г. до н. э., этот папирус в настоящее время хранится в Музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина (Москва). Форма документа необычна: 5 м в длину и только 8 см в ширину. Эта узкая лента содержит 25 математических задач, некоторые из них из-за повреждений трудно разобрать. Задачи были записаны неизвестным человеком, который выполнил эту работу не менее скрупулезно, чем Ахмес.

Московский папирус содержит вычисления объема усеченной пирамиды, но прежде всего примечательна задача номер 14, в которой впервые приведена точная формула для объема усеченной пирамиды с квадратным основанием. (Усеченная пирамида — многогранник, образованный пирамидой и ее сечением, параллельным основанию.) Однако в доказательстве нет и следов теоремы Пифагора.

Только в Берлинском папирусе, содержащем ряд медицинских, литературных и математических документов эпохи Среднего царства, можно найти следы теоретических идей. В одном из разделов используется система уравнений для нахождения двух неизвестных в следующей задаче:

> «Известно, что площадь квадрата равна 100 квадратным локтям и равна сумме площадей двух меньших равных квадратов. Сторона большего квадрата составляет 1/2 + 1/4 от другого. Найти стороны квадратов».

В терминах современной алгебры задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$y = (1/2 + 1/4)x,$$

которая предполагает вычисление квадратного корня, что и делается в папирусе. Это можно рассматривать как пифагорейский подход, но, возможно, это вовсе не применение теоремы Пифагора, а просто урок по теме квадратных уравнений.

Научная мысль Греции

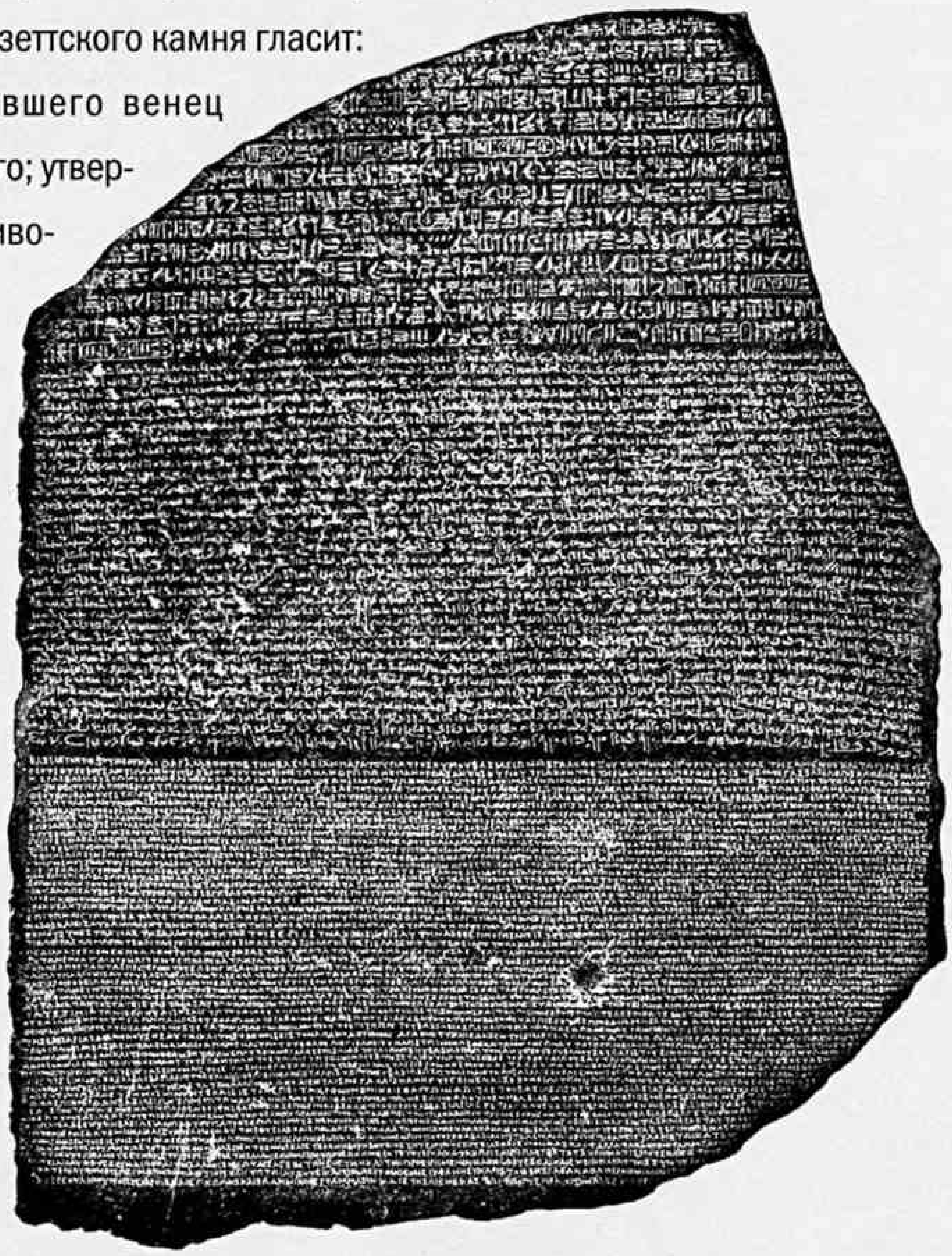
В VI в. до н. э. Месопотамия и Египет перестали быть центром западной цивилизации. Этот центр переместился в греческий мир. Оказав влияние на более позднюю Римскую империю, греческая мысль продолжала доминировать в Европе на протяжении 16 веков, оставаясь в значительной степени неоспоримой. Потребовалось довольно много времени, чтобы сложилось объективное представление о фактической ценности греческого наследия по сравнению с достижениями других древних цивилизаций. А началось все в 1799 г., когда один из солдат Наполеона нашел в Египте Розеттский камень. Он был расшифрован 25 лет спустя Жан-Франсуа Шампольоном и Томасом Юнгом, что позволило прочитать многие другие древние тексты, написанные не только на греческом и латинском языках. Эти тексты открыли другие подходы к науке и философии и позволили лучше понять интеллектуальные достижения древних цивилизаций. Теперь мы знаем, что сведения, содержащиеся во многих греческих документах, не всегда являлись результатом оригинальной мысли, что, впрочем, не делает их менее важными.

Ионийцы, населявшие в VI в. до н. э. Малую Азию (ныне Турция), начали отделять рациональное знание от мифологических верований. Это дало грекам инструмент,

РОЗЕТТСКИЙ КАМЕНЬ

Розеттский камень представляет собой черную плиту гранита с выбитыми на ней тремя вариантами одного текста: указа фараона Птолемея V на древнегреческом и древнеегипетском языках. Две древнеегипетские версии написаны иероглифами и египетским демотическим письмом. Поэтому плита также является сравнительной таблицей для древнегреческого и древнеегипетского языков, что позволило Шампольону и Юнгу впервые расшифровать иероглифическое письмо.

Текст содержит указ Птолемея V об отмене налогов и повеление опубликовать это на языке богов — в иероглифах, и на языке народа — демотическим письмом. Недавние исследования демотического письма показали, что первоначальная надпись была сделана на древнегреческом языке и затем переведена в демотику с некоторыми поправками. Перевод первого абзаца древнегреческой версии Розеттского камня гласит:



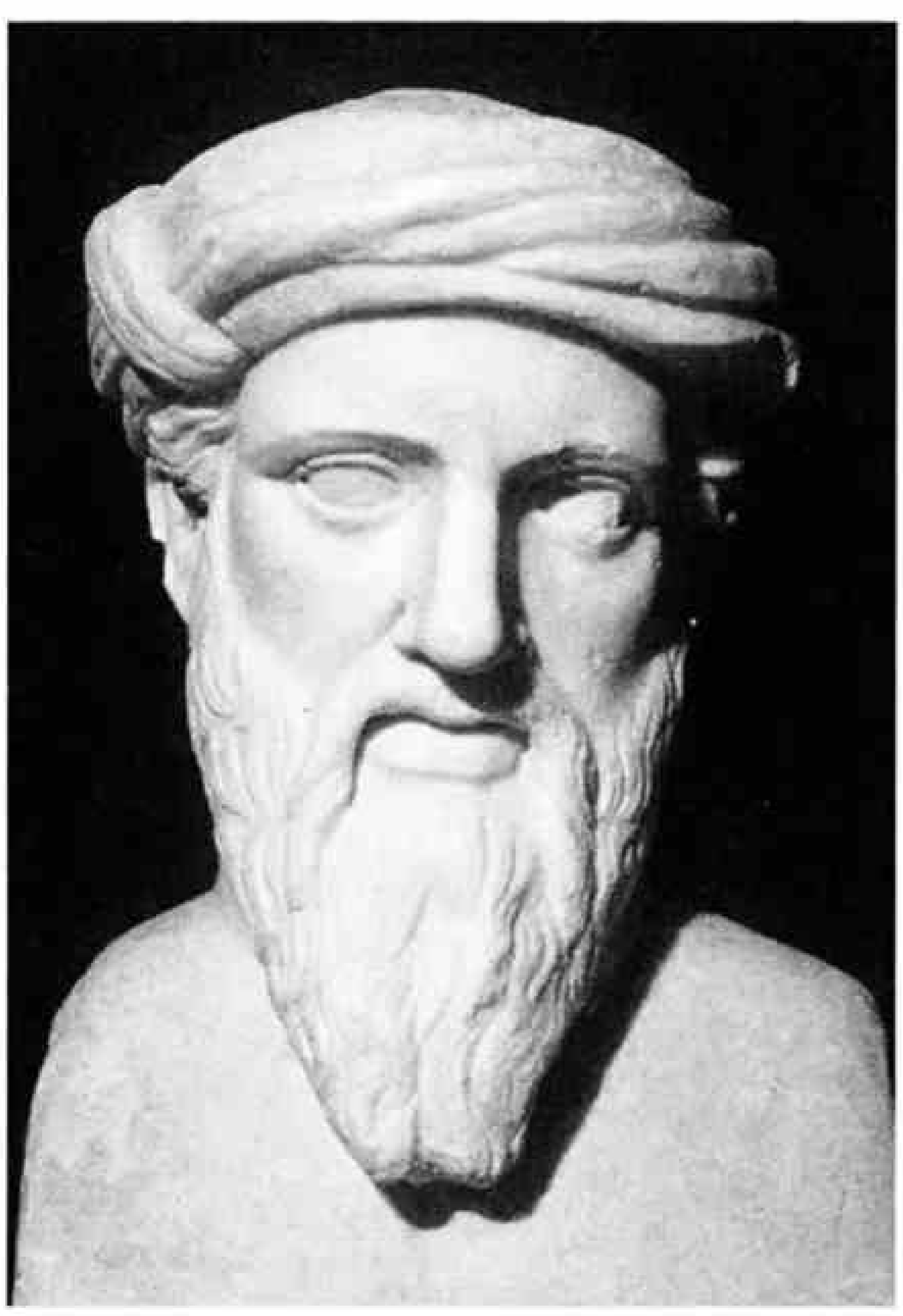
«В правление молодого, принявшего венец от отца, владыки корон, великославного; утвердившего порядок в Египте; благочестивого в служении богам; победителя над врагами, улучшившего жизнь людей, правителя тридцатилетий празднеств, подобного великому Гефесту; царя, подобного Гелию, великого царя верхних и нижних мест; отпрыска богов Филопаторов, которого Гефест одобрил, которого Гелий одарил победой, живого образа Зевса, сына Гелия, вечно живого Птолемея, возлюбленного Пта; в девятый год, когда Аэтос, сын Аэтоса, был священником Александра и богов Сотеров, и богов Адельфоев, и богов Эвергетов, и богов Филопаторов, и бога Эпифана Евхариста; когда Пирра, дочь Филинои, была избранницей Береники Эвергета, когда Ария, дочь Диогена, была носительницей корзины Арсинои Филадельфа; когда Ирина, дочь Птолемея, была жрицей Арсинои Филопатора; четвертого месяца марта, согласно египтянам, 18 числа».

которым не обладали другие культуры: способность теоретизировать. Вавилонская и египетская мысль была менее организованной, основанной на возможности откровений, экспериментов и интуиции. Там математика являлась лишь инструментом, способом решения практических задач, а не средством открытия общих законов. В свою очередь греки считали науку и стремление к знаниям самоцелью.

Греки заимствовали у египтян множество геометрических сведений. Кроме того, греческие купцы учились практической математике в Месопотамии и Индии. Но именно в Греции все эти знания, собранные там и здесь, породили нечто новое. Даже слово «математика» имеет греческое происхождение: «матема» означает «то, чему учат», то есть «все формы знания». Пифагорейцы были первыми, кто использовал термин mathematikoi — «математика», и их великий учитель Пифагор первым назвал себя «философом» — любителем знаний.

Пифагор и пифагорейцы

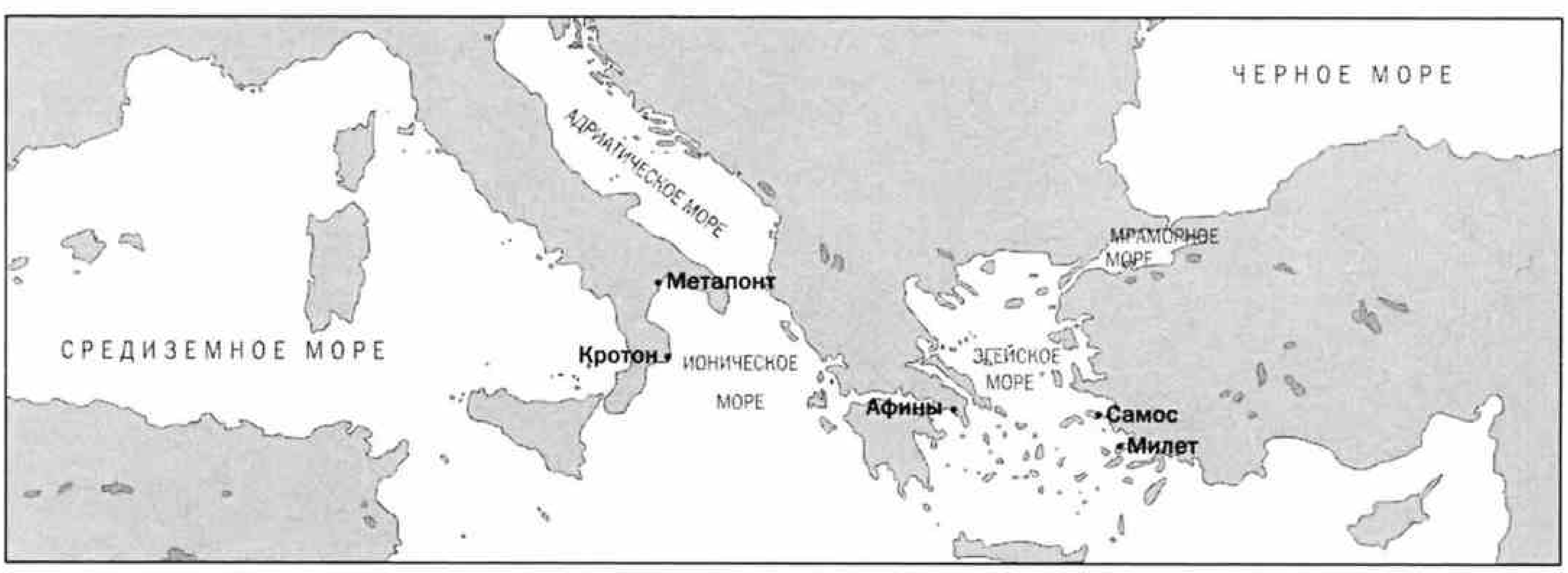
В различных странах мира часто проводятся опросы населения для оценки научных знаний. Наиболее часто встречающийся вопрос таков: «Каких математиков вы знаете?» Подавляющее большинство отвечает: «Пифагор». Имена других математиков встречаются намного реже. Пифагор считается первым известным математиком, и его знаменитая теорема лежит в основе элементарной математики, изучаемой в большинстве школ. Но что известно о Пифагоре? По правде говоря, не так уж много.



Древнегреческий мраморный бюст Пифагора.

Пифагор — одна из самых загадочных фигур в истории. Имеющаяся о нем информация не вполне достоверна, так как больше похожа на легенды, чем на факты. Историки, которые писали о нем, жили сотни лет спустя. Официально считается, что Пифагор родился около 570 г. до н. э. на острове Самосе в Эгейском море, у берегов современной Турции. По версии некоторых авторов он был сыном Аполлона, другие считают, что его отец — богатый островитянин Мнесарх. Остров Самос находился недалеко от прибрежного города Милет, где жил известный философ Фалес. Именно Фалеса многие считают отцом-основателем науки и первым в череде греческих мыслителей, сформировавших интеллектуальный климат следующего тысячелетия. Можно предположить, хотя и без особой уверенности, что молодой Пифагор встречался с ним и что Фалес поддержал страсть Пифагора к математике и философии. Традиция доказательства результатов в математике, которой придерживался Пифагор, была впервые предложена Фалесом.

Путешествия молодого Пифагора окутаны легендами и могут служить лишь иллюстрацией того, как мог бы развиваться ум этого гениального ученого, потому что мы не можем быть уверены ни в том, где Пифагор побывал, ни в том, чем именно он занимался. Считается, что он жил в крупнейших центрах древних цивилизаций, в том числе в Египте и в Персии, где он изучал литературу, религию, философию и математику. Вероятно, он 20 лет прожил в Вавилоне, где учился и преподавал астрономию, математику и астрологию. Когда он вернулся на родину, там правил тиран Поликрат, поэтому где-то в 530 г. до н. э. Пифагору еще раз пришлось уехать с Самоса. Считается, что он отправился в Египет, где продолжил учебу. Как бы то ни было, мы знаем наверняка, что он в конце концов поселился в Кротоне на юге Италии. Там Пифагор основал свою научную школу, которая приобрела авторитет в городе и оказала огромное влияние на последующие поколения мыслителей и ученых. Но в конце концов из-за антипифагорейских настроений в Кротоне Пифагор был вынужден уехать в другую греческую колонию Метапонт.



Карта Восточного Средиземноморья, на которой отмечены города, где, как полагают, жил Пифагор.

Под руководством своего учителя пифагорейцы изучали все интеллектуальные дисциплины того времени, прежде всего философию, математику и астрономию. Но пифагорейское сообщество было не просто научной школой. Пифагорейцы соблюдали ряд строгих правил, их общество было окутано тайной и более напоминало религиозный орден. Пифагорейцы посвятили себя исследованию тайн чисел и были чрезвычайно консервативны и авторитарны. Это не было братством или союзом, как иногда считается: общество состояло из нескольких различных семей. Они могли быть моделью идеального общества, описанного Платоном в «Республике». Насколько известно, все имущество было общим, и все должны были придерживаться здорового аскетизма и строгой морали. Лидеры также практиковали безбрачие. По всей видимости, женщины участвовали на равных в жизни сообщества, что в Древнем мире встречалось чрезвычайно редко. Тот факт, что женщины преподавали математику, свидетельствует, что уровень их образования был беспрецедентно высоким для той эпохи.

Некоторые из классических легенд о пифагорейском обществе связаны со смертью Пифагора. Похоже, что вступительные экзамены в пифагорейскую общину были очень сложными и длились в течение многих лет. Считается, что некоторые из отвергнутых кандидатов, обиженные на то, что их не приняли в общество, подожгли дом, где жил Пифагор и другие пифагорейцы. Это было началом конца общества пифагорейцев, которые были вынуждены разойтись. По другой версии этой легенды враги преследовали убегающего Пифагора до бобового поля. Культ пифагорейцев запрещал есть бобы и даже прикасаться к ним. И чтобы не нарушить свои собственные правила, Пифагор предпочел умереть, не попытавшись укрыться на бобовом поле.

После смерти Пифагор стал мифической фигурой: ему приписывали чудеса и магические способности, что сделало его наиболее интересной и загадочной личностью в истории человечества. Однако строгий обет молчания, принятый его последователями, и обязательство никогда не разглашать результаты изысканий имели печальные последствия. Это препятствовало распространению открытий пифагорейцев среди широкой общественности и вызывало большие подозрения относительно их деятельности. Поэтому сегодня все, что мы знаем о Пифагоре, основывается на трудах других авторов, живших поколениями позже его, не всегда беспристрастных и восхвалявших своего героя и великого мудреца.

Вдобавок к отсутствию первоисточников пифагорейцы следовали восточным традициям устной передачи знаний. Письменных источников было чрезвычайно мало. Египетский папирус достиг Греции в 650 г. до н. э. и во времена Пифагора практически не использовался. Пергамент был еще неизвестен, а глиняные таблички были не совсем удобны для написания длинных философских трактатов. Таким образом, знания передавались от одного поколения к другому устно. Кроме того, из уважения к Пифагору ему почти всегда приписывались все открытия его учеников и последователей. Поэтому у нас нет ни подлинных свидетельств открытий, ни доказательств того, что все свои результаты Пифагор получил сам.

Золотые стихи

«Золотые стихи» представляют собой список правил и традиций для регулирования жизни сообщества. Отдельные из них почти дословно совпадают с христианскими заповедями. По мнению некоторых историков, пифагорейский устав стал источником вдохновения для авторов десяти заповедей. Как ни странно, это очень практичные правила. Прежде всего, они нравственны и призваны поддерживать порядок, поощрять процветание и обучение членов сообщества. Эти правила были написаны в форме афоризмов, которые пифагорейцы читали по утрам как декларацию о намерениях, а по вечерам в качестве медитации. Гораций, Цицерон и Сенека следовали пифагорейским ритуалам и рекомендовали другим делать то же самое. Вполне возможно, что стихи являются цитатами из выступлений Пифагора, но многие ученые сходятся во мнении, что, скорее всего, это компиляция из нескольких работ пифагорейцев, живших в III в. до н. э.

Каждый человек, в какое бы время он ни жил, был бы рад следовать таким правилам, как, например, «избери себе другом истинно мудрого мужа» или «будь справедлив и в словах, и в поступках своих». Другие правила могут прозвучать сомнительно, например, «не принимайся за то, чего ты не знаешь». В любом случае, мудрость, которую они содержат, не подлежит сомнению и даже сегодня не утратила своей актуальности. Например, «научись всему необходимому; этим ты достигнешь счастья. Но не изнуряй тело свое, а соблюдай во всем меру. И истинной мерой является то, что не причиняет боль».

Начало «Золотых стихов» удивительно похоже на первые четыре заповеди Моисея.

ЗОЛОТЫЕ СТИХИ	ВЕТХОЗАВЕТНЫЕ ЗАПОВЕДИ
Чти бессмертных богов в соответствии с установленным законом.	1. Возлюби Бога превыше всего на свете.
Клятвы свои соблюдай, чти память великих героев.	2. Не произноси имени Господа всуе.
Воздавай поклоненье духам земным в соответствии с традиционными обрядами.	3. Помни день субботний, чтобы святить его.
Мать и отца уважай вместе с родными по крови.	4. Почитай отца твоего и мать твою.

Время истерло «Золотые стихи». Более известны, наверное, другие традиции пифагорейцев, скорее похожие на насмешку или на опорочение этой философской общины. Вот несколько примеров:

- Воздерживайся от употребления в пищу бобов.
- Не поднимай то, что упало.
- Не прикасайся к белому петуху.
- Не ломай хлеба.
- Не шагай через перекладину.
- Не ощипывай венок.
- Сердца не ешь.
- Не ходи по большой дороге.
- Не дозволяй ласточкам вить гнезда под крышей твоего дома.
- Вынимая горшок из огня, не оставляй следа его на золе, но помешай золу.
- Не смотрись в зеркало около огня.
- Когда встаешь с постели, сверни постельное белье и разгладь оставшиеся на нем следы твоего тела.

Философия и наука пифагорейцев

Пифагорейцы сформулировали пять основных идей, которые оказали сильное влияние на развитие философской мысли человечества.

1. Вселенная была создана и продолжает существовать на основе божественного плана. Высшая реальность не материальна, а духовна и состоит из идей чисел и форм. Идеи — это божественные понятия, которые выше материи и независимы от нее.

2. Бог создал души как духовные существа. Душа — это «самодвижущееся число», которое обитает в теле в течение ограниченного периода времени, а затем переходит в другое тело, будь то тело человека или животного. Души вечны, и только очищение посредством строгой морали и духовной жизни может освободить их от этого бесконечного цикла и позволить объединиться с Богом. Это учение о переселении душ, метемпсихоза, и объясняет вегетарианскую диету пифагорейцев.

3. Существует внутренняя гармония и порядок во Вселенной как результат единства противоположностей. Имеется десять пар основных противоположностей, взаимодействующих между собой: четное — нечетное, мужское — женское, хорошее — дурное, влажное — сухое, правое — левое, покой — движение, горячее — холодное, светлое — темное, прямое — кривое, ограниченное — неограниченное.

4. В человеческих отношениях дружба и скромность — основные добродетели. Мужчины и женщины должны вести аскетичную жизнь, посвятив себя воспитанию детей в соответствии с божественным планом.

5. Божественные идеи, которые создали и поддерживают Вселенную, являются числами. Изучение арифметики — это путь к совершенству. Следуя ему и предписаниям общины, человек может открыть для себя новые проявления божественного плана и математических правил, которые управляют Вселенной. Этот принцип объясняет страсть пифагорейцев к изучению чисел.

Синтез религии и философии, характерный для этого учения, лег в основу последующих богословских учений Запада: от Платона до святого Августина и Фомы Аквинского, а позже и философии Декарта, Спинозы и Лейбница. Вдохновленная пифагорейцами западная научная философия на протяжении веков обращалась к концепции вечного мира, апеллирующей не только к чувствам, но и к разуму.

Математическая гармония

Возможно, Пифагор не был первооткрывателем своей знаменитой теоремы, которая теперь носит его имя, но он был первым, кто дал четкое ее доказательство для любого прямоугольного треугольника. Хотя он заслужил место в учебниках истории именно благодаря своим математическим открытиям, его достижения охватывают широкий круг дисциплин. Например, считается, что именно он обнаружил взаимосвязь между длиной струны и высотой звука.

По легенде, Пифагор, идя по улице, услышал звуки ударов, доносящиеся из кузницы. Он подошел ближе и увидел, что звук происходит от вибрации металла под ударами молота; более длинные куски порождали более низкие звуки. Пифагор начал экспериментировать с колоколами, стаканами воды, исследовал колебания струн и обнаружил связь: высота звука струны обратно пропорциональна ее длине.

Если две струны сделаны из одинакового материала и имеют одинаковую толщину, но разную длину, причем одна струна в два раза длиннее другой, то более короткая струна будет вибрировать с удвоенной частотой. В музыкальных терминах ноты, воспроизводимые такими струнами, различаются на октаву. Соотношение между длинами одной струны и другой, на октаву выше, составляет 2:1. Если длины струн относятся как 3:2, то получается музыкальный интервал, называемый квинтой. Музыкальный интервал «кварта» соответствует соотношению 4:3 и т. д. Термины «октава», «квинта» и «кварта» происходят от расположения звуков в музыкальной гамме. Это открытие имеет огромное значение как для музыки, так и для науки. Это было первое явление природы, описанное в точных количественных терминах, иными словами, физический мир, выраженный в числах.

Если две струны вибрируют одновременно, получается музыкальный аккорд. Отсюда оставался всего лишь шаг до следующего открытия Пифагора. Он обнаружил, что при одновременном звучании струн различной длины — как в октаве, квинте и кварте — получается приятный аккорд, или консонанс. Такая разница между нотами была названа совершенным интервалом. Струны с длинами в более сложных пропорциях производили менее приятные аккорды. Например, соотношение 9:8 дает секунду, так называемый диссонансный аккорд.

Когда Пифагор понял, что численные пропорции регулируют законы музыкальной гармонии, он подумал, что то же самое должно происходить во всей Вселенной, которую он называл космосом, что означает «порядок». Свойства всех вещей, материальных, музыкальных или абстрактных, такие как справедливость, могут быть объяснены с помощью чисел.

Это может показаться очень смелым заключением, но следует учесть, что в Древней Греции музыке придавалось такое же важное значение, как и арифметике, геометрии и астрономии. От Платона до Аристотеля эти четыре дисциплины считались четырьмя столпами мудрости и составляли средневековый квадривиум («четырехпутье») — базисный курс светского образования любого культурного человека. Эти четыре дисциплины преподавались в европейских университетах вплоть до эпохи Возрождения. Объединенные учением Пифагора, математика и музыка оказали большое влияние на развитие науки. Например, термин «гармонический» заимствован из музыки для описания большого количества математических понятий: гармонического ряда, гармонических функций, гармонического движения и т. д.

Божественное число

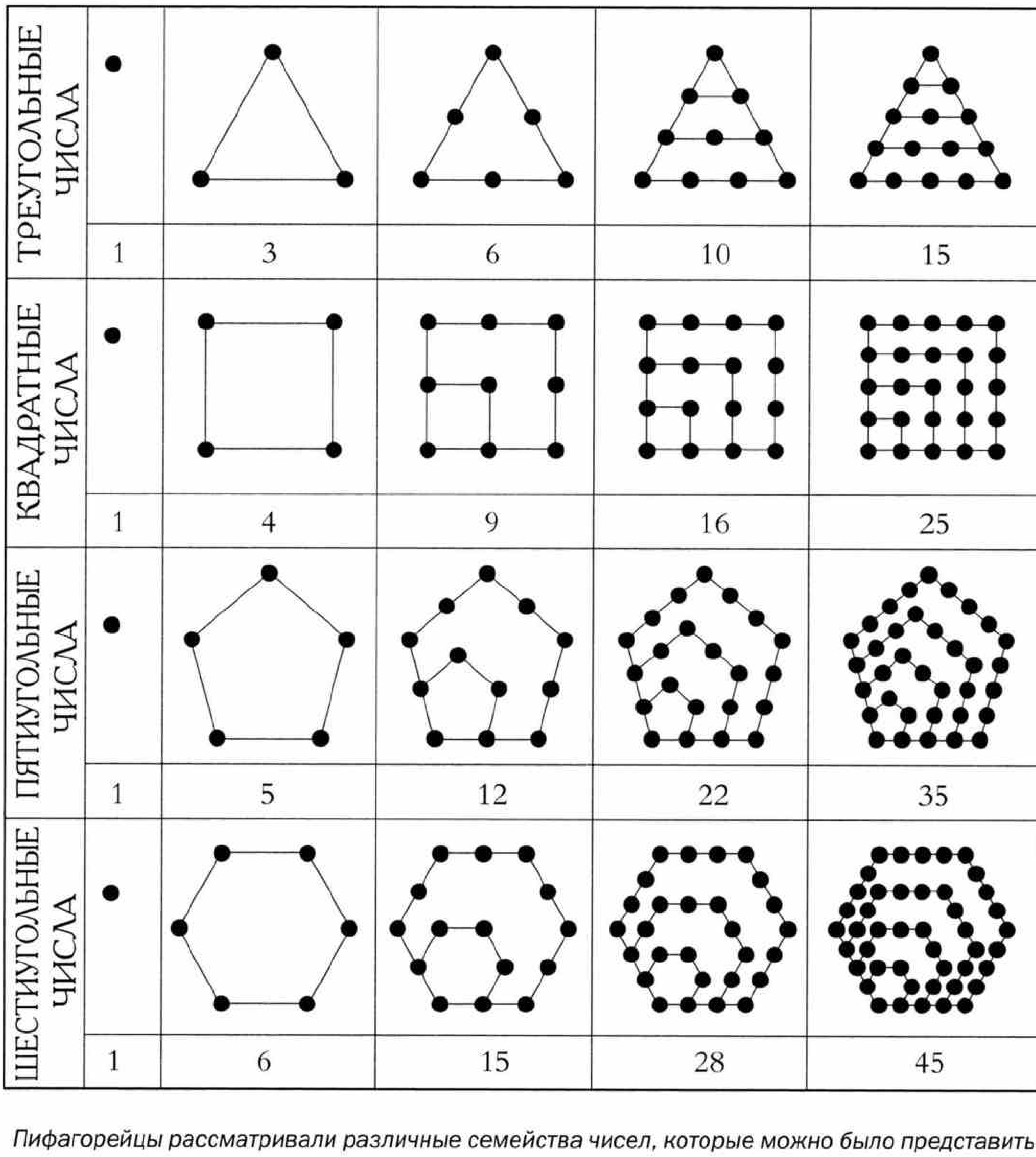
Глава V из первой книги «Метафизики» Аристотеля называется «Пифагорейцы и их доктрина чисел». Этот текст эксперты считают основным источником и наиболее достоверным изложением пифагорейской философии. Глава о пифагорейцах начинается со знаменитого своей ясностью и точностью утверждения:

> «Пифагорейцы посвятили себя изучению математики и первыми развили ее. <...> Они полагали, что все существующее суть числа — не числа, существующие сами по себе, но что все существующее действительно состоит из чисел. Другими словами, элементы чисел — это элементы всего существующего, и вся Вселенная есть гармония и числа. Они видели, что свойства и соотношения, присущие музыкальной гармонии, небесным телам и всему мироустроению, выразимы в числах».

Пифагорейский мир чисел, несмотря на производимое впечатление чего-то монолитного, был чрезвычайно разнообразен. Пифагор и его последователи определили множество типов чисел и приписали им моральные и физические характеристики. Например, четные числа имели женское начало, а нечетные — мужское. Некоторые числа были дружественны и поэтому совместимы друг с другом, а другие — злы и не ладили с остальными, они могли даже принести человеку несчастье. Задача арифметики состояла в открытии различных типов чисел, их взаимосвязи, а также их роли и значения в божественном плане. Пифагореизм был своего рода численной теологией, а математика была теологической теорией для изучения божественного порядка.

Но чем именно являлось число? Пифагорейцы дали ему три определения. Число — это «ограниченное количество», «набор или скопление частей» и «растущая сумма». Пифагор представлял числа в виде изображений или диаграмм. Например, он представлял квадратные числа в виде точек, расположенных в форме квадрата. И сегодня мы иногда говорим о квадратах и кубах чисел. Эти термины пришли к нам из теории Пифагора. Он также определяет прямоугольные, треугольные и пирамидальные числа, когда величина таких чисел равна количеству камней, необходимых для построения соответствующей формы. Можно предположить, что Пифагор видел мир состоящим из отдельных элементов: все тела состоят из молекул, а те, в свою очередь, из атомов, расположенных в заданной форме. Именно так он строил и числа. Возможно, именно поэтому он считал живые существа «движущимися числами». Несмотря на мистические допущения, такая геометрическая алгебра была предшественницей современной символической алгебры.

Пифагорейское учение о числах началось со спиритуалистических поисков, как в еврейской каббале, где каждое число имеет символическое значение. *Единица*, монада, порождает все другие числа, так как каждое число может быть получено из единицы посредством нескольких прибавлений. Единица имела особый статус и даже не считалась числом. Это была монада, символ разума, всего сущего и стабильности. Она также была связана с направлением вправо. *Двойка*, диада,



Пифагорейцы рассматривали различные семейства чисел, которые можно было представить в виде многоугольников, составленных из камней или бусин.

означала разнообразие, неопределенность. Она была связана с направлением влево и считалась женским началом. *Тройка*, триада, была союзом монады и диады и, следовательно, символом гармонии и совершенства. Она была связана с понятием времени и считалась мужским началом. Число *четыре* означало универсальный и неумолимый закон и, следовательно, справедливость, так как $4 = 2 + 2$. Четверка считалась ключом к природе и человечеству.

Число *пять* было союзом диады и триады, женского и мужского начал, и, таким образом, символом брака и божественного треугольника ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Также

ПИФАГОРЕЙСКИЕ ЧИСЛА

Пифагорейцы составили классификацию чисел, используя странные определения, понятные лишь с точки зрения их мистических верований. Евклид приводит эту классификацию в седьмой книге «Начал».

- Четные и нечетные числа. Они делятся на четыре класса:
  - четно-четные: те, половина которых четная;
  - нечетно-четные: те, половина которых нечетная;
  - четно-нечетные: те, которые при делении на нечетное число дают четное число;
  - нечетно-нечетные: те, которые имеют только нечетные делители.
- Числа, которые являются делителями других или кратны другим числам.
- Простые и составные числа.
- Линейные, плоские, телесные, квадратные и кубические числа: *линейные числа* не имеют делителей (то есть являются простыми числами); *плоские числа* являются произведением двух чисел, образующих их стороны; *телесные числа* являются произведением трех чисел, образующих их стороны; *квадратные числа* записываются в виде квадрата другого числа; *кубические числа* записываются в виде куба другого числа.
- Совершенные, недостаточные и избыточные числа: *недостаточные числа* – те, сумма собственных делителей которых меньше самого числа (собственный делитель числа – это другое число, на которое исходное число делится нацело, как, например, 2 для 4), *избыточные числа* – те, сумма собственных делителей которых больше самого числа, и *совершенные числа* равны сумме всех своих собственных делителей.
- Дружественные числа: два таких числа, каждое из которых равно сумме делителей другого. Пифагорейцам была известна лишь одна пара дружественных чисел: 220 и 284.

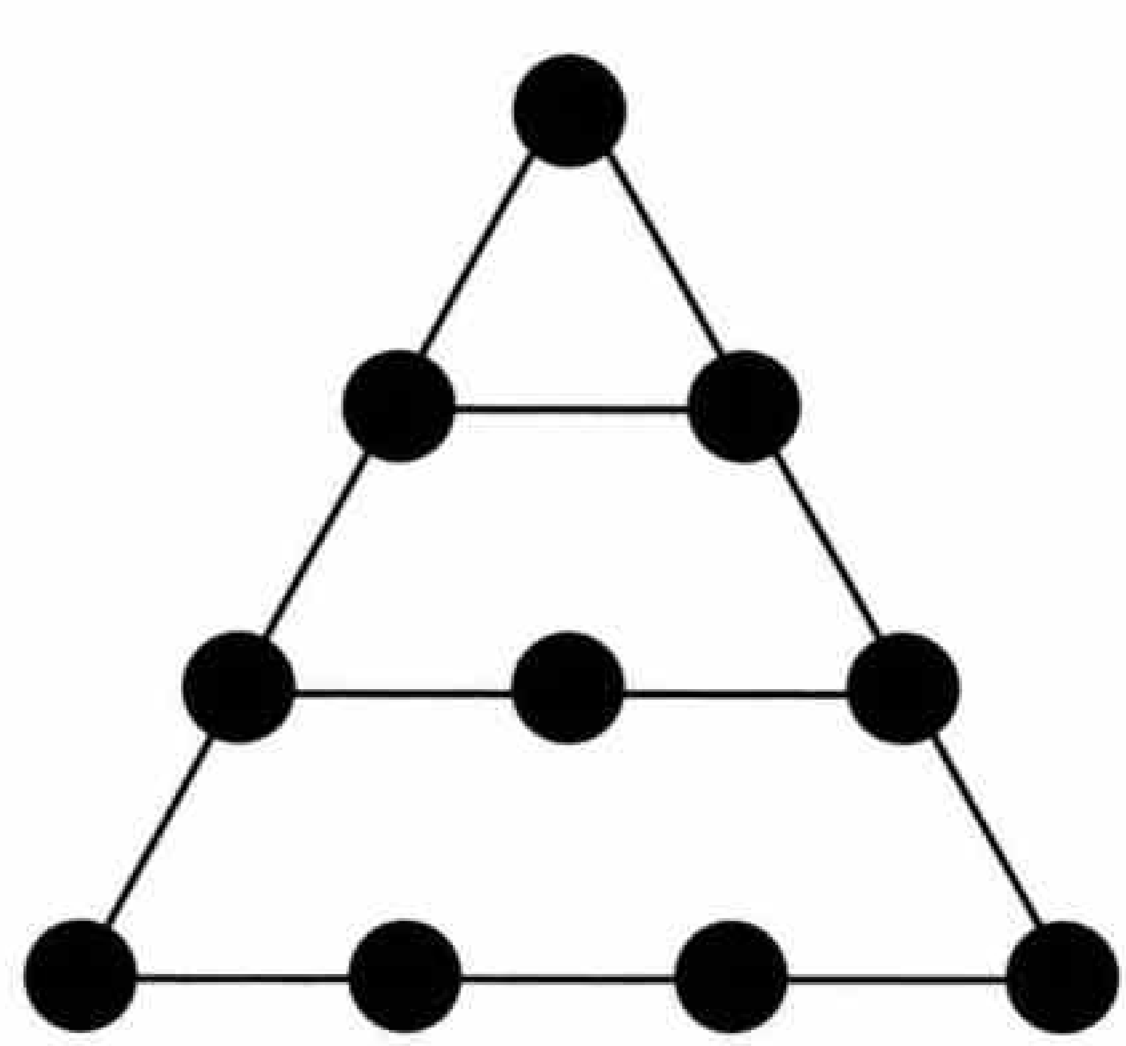
  $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$ (сумма делителей числа 220).

  $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ (сумма делителей числа 284).

существует пять правильных многогранников, грани которых являются правильными многоугольниками: тетраэдр (4 треугольника), куб (6 квадратов), октаэдр (8 треугольников), додекаэдр (12 пятиугольников) и икосаэдр (20 треугольников). В то время считалось, что они представляют собой пять первичных элементов Вселенной — огонь, землю, воздух, воду и небесную сферу, которая содержит в себе все. Таким образом, число пять имело большое значение. Вот почему в виде пентаграммы это число стало эмблемой пифагорейцев, используемой членами секты, чтобы узнавать друг друга.

Но еще более божественным, чем пятерка, было число *шесть* — символ продолжения рода, произведение женского и мужского начал ($6 = 2 \cdot 3$), а кроме того, первое совершенное число. Число называется совершенным, если оно равно сумме своих делителей (включая единицу, но исключая само число). Таким образом, делителями числа 6 являются числа 1, 2 и 3. Грекам были известны только четыре совершенных числа. Другие три: 28 ($= 1 + 2 + 4 + 7 + 14$), 496 ($= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$) и 8128 ($= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$). В настоящее время известно 43 совершенных числа, все четные. Неясно, существуют ли какие-либо нечетные совершенные числа, а также является ли множество совершенных чисел конечным.

Число *семь* символизирует девственность, так как оно само не создается и не в состоянии создавать. Оно также связано со здоровьем и светом. В то время было известно семь небесных тел (в основном планеты), давших названия дням недели. Число *восемь* было символом дружбы, достатка и симметрии. Это первое кубическое число. Число *девять* — символ любви и беременности. Наконец, число *десять*, декада, или тетрактис, было символом Бога и Вселенной. Учитывая то, что для пифагорейцев первые четыре числа содержали тайну музыки, их сумма



Священный тетрактис пифагорейцев в форме треугольника.

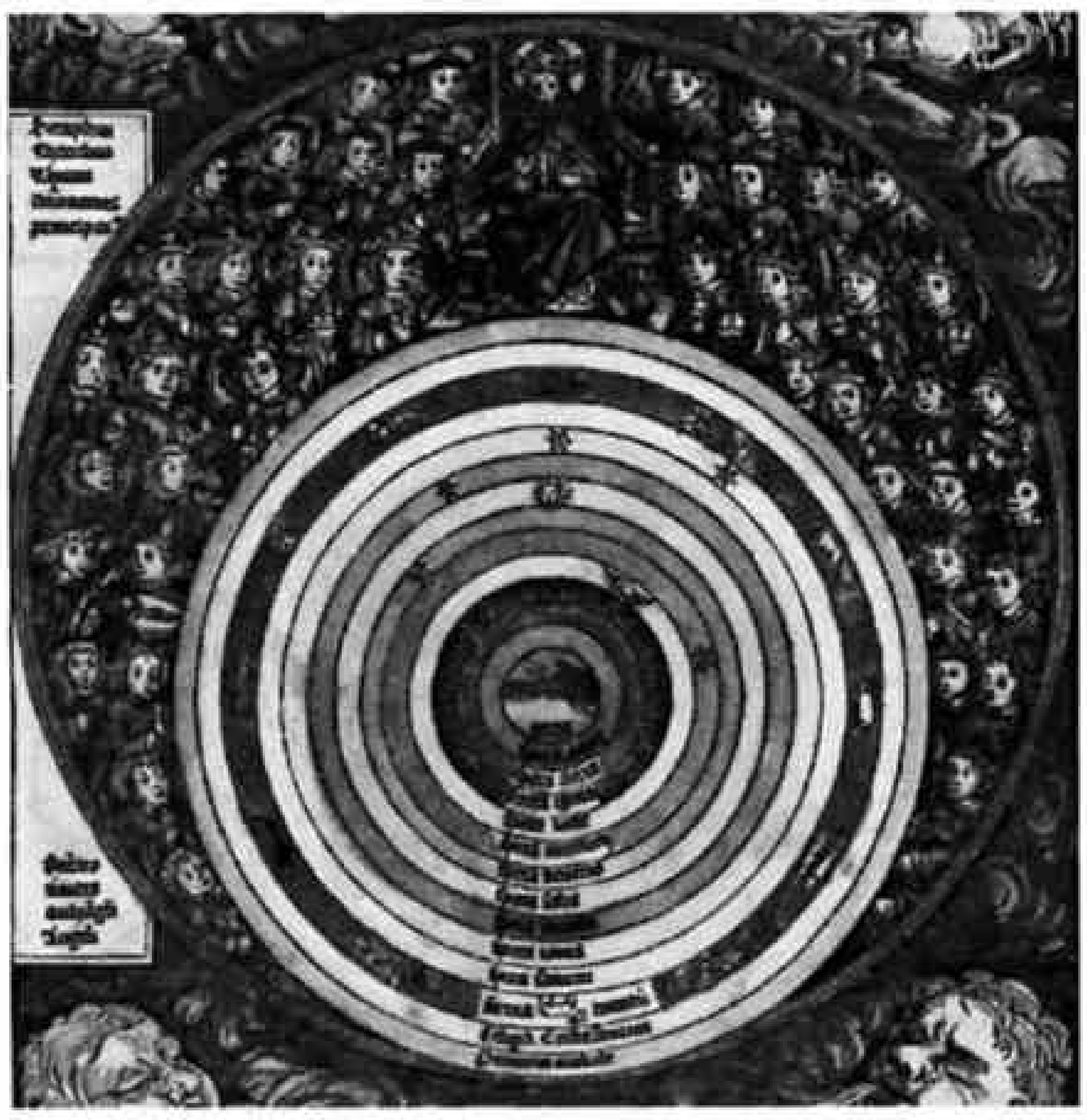
(1 + 2 + 3 + 4 = 10) являлась совершенством, воплощением «природы чисел», по словам Аристотеля. Начало и основа всего сущего, тетрактис олицетворял пифагорейский числовой мистицизм, и, представленный в виде равностороннего треугольника, этот символ использовался во время приведения к присяге новых членов секты.

Страсть пифагорейцев к числам имела множество последствий. Некоторые из них оказались полезными для развития знаний. Например, исследование математических свойств чисел (в данном случае всегда рассматривались положительные числа) заложило основы современной теории чисел. Но фанатичная одержимость пифагорейцев наносила весомый ущерб им самим. Ослепленные нереальными идеалами красоты, симметрии и гармонии, они не замечали идей, которые лучше подходили для объяснения явлений и законов природы. На протяжении веков непоколебимая вера в божественную сущность чисел замедляла развитие знаний, затрудняла поиск других, более подходящих моделей для описания реального мира.

Ярким примером такой ограниченности являются греческие космологические теории. Пифагорейцы считали, что Земля представляет собой неподвижный шар, подвешенный в центре Вселенной, а звезды, закрепленные на небесной сфере как драгоценные камни, совершают полный оборот каждые 24 часа. Солнце, Луна и пять известных в то время планет вращаются вокруг Земли по круговым орбитам в своих небесных сферах.

К III в. до н. э. эти орбиты небесных сфер уже не совпадали с данными астрономических наблюдений. Поэтому круговые орбиты были заменены эпициклами. Эпицикл — это малый круг, по которому движется тело, в то время как его центр совершает движение по большому кругу. Со временем количество эпициклов возросло, так что система оказалась перегруженной настолько, что стала нелепой и, конечно, совершенно бесполезной. Сама возможность некруговой орбиты была неприемлема для греков. Орбиты должны были иметь только форму круга, самой совершенной из фигур.

Даже когда Коперник в своей великой работе De Revolutionibus Orbium Coelestium («О вращении небесных сфер», 1543) лишил Землю ее места в центре Вселенной, поместив туда Солнце, он все же сохранил круговые орбиты. Лишь в 1609 г. Иоганн Кеплер заменил их эллипсами, к которым Исаак Ньютон позже добавил параболы и гиперболы.



Космологическая модель Птолемея, жившего во II в., следовала греческой модели. Эта гравюра 1493 г. показывает, что модель по-прежнему использовалась в XV в.

Модель Солнечной системы Коперника, представленная в его работе De Revolutionibus, все еще использует круговые орбиты.

Наследие пифагорейцев

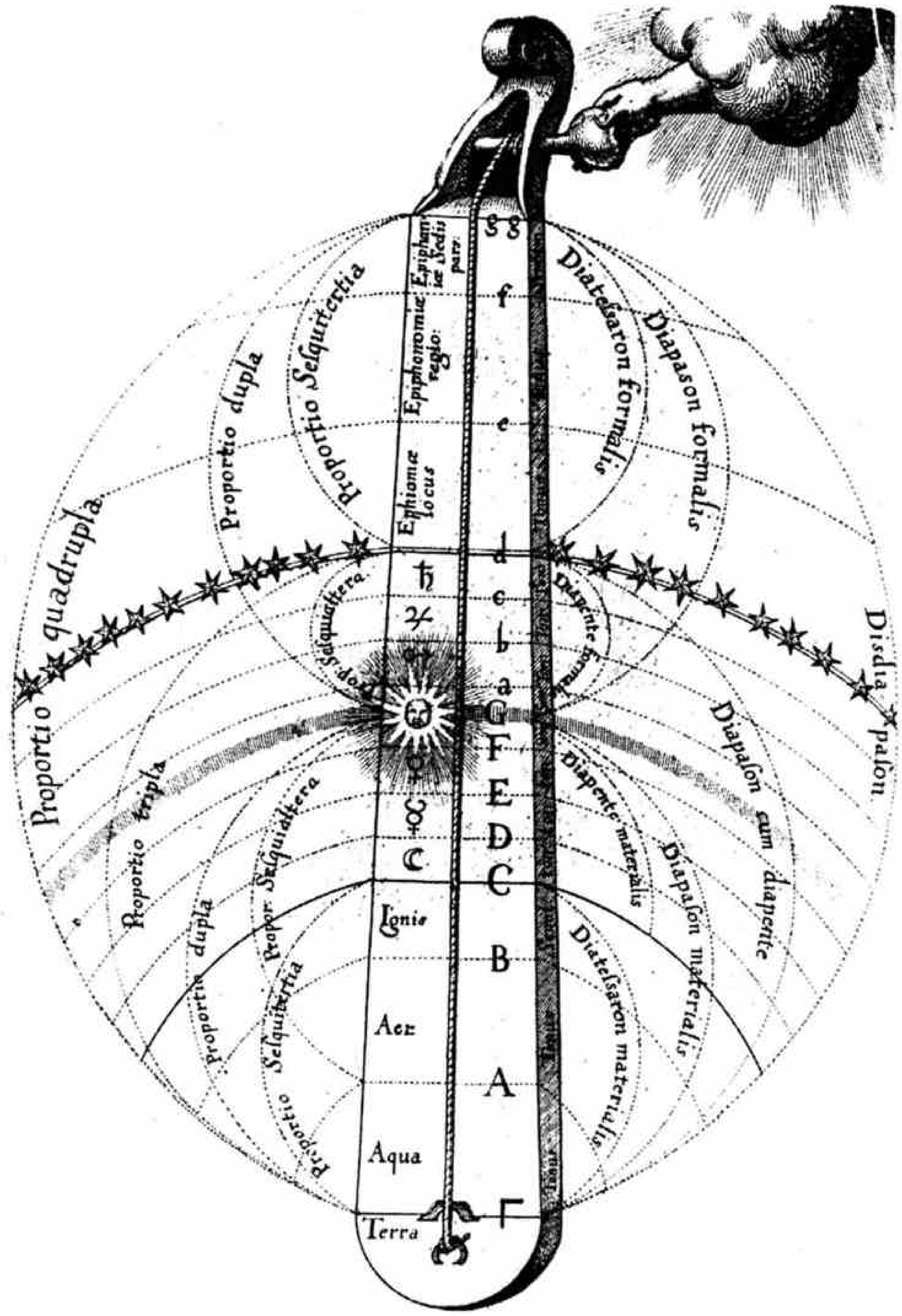
После смерти Пифагора община продолжала свою деятельность. Жена Пифагора Феано и его дети поддерживали заложенные философом традиции. Считается, что Феано занималась исследованием золотого сечения, но ее работы не сохранились. Школа раскололась на две группы: акусматики (от akousmatikoi — «те, что готовы слушать») увлеклись мистическими ритуалами, а математики (от mathematikoi — «те, что имеют отношение к наукам») продолжали изучение чисел.

Пифагорейцы были против идеи аристократии, но в итоге сами стали аристократами и нередко вмешивались в политику. В Кротоне это привело к народному восстанию против них. Пифагорейцы были изгнаны, и многие из них были убиты. Община разделилась: математики отправились в Таренто, а акусматики стали странствующими мистиками. Такое распространение математических и философских знаний в результате способствовало образованию величайшего центра интеллектуальной деятельности, самой важной из школ — платоновской Академии. Возможно, это был конец сообщества пифагорейцев, но начало бессмертия Пифагора.

Идеи Пифагора продолжали оказывать влияние не только на греческую философию, но и на всю западную мысль. Платоновские теории о душе, о сотворении мира, о вещах и чистых идеях непосредственно заимствованы у пифагорейцев. Пифагорейская нумерология оказала влияние и на христианский мистицизм. Последователи Галилея считали его вторым Пифагором. Знаменитая фраза Галилея — «Книга природы написана на языке математики» — только подтверждает его убеждения. Коперник и Лейбниц высказывали свои взгляды в той же традиции. Ньютон посвятил большую часть своей жизни алхимии и другим не менее странным занятиям, находясь под влиянием пифагорейского мистика Якоба Бёме.

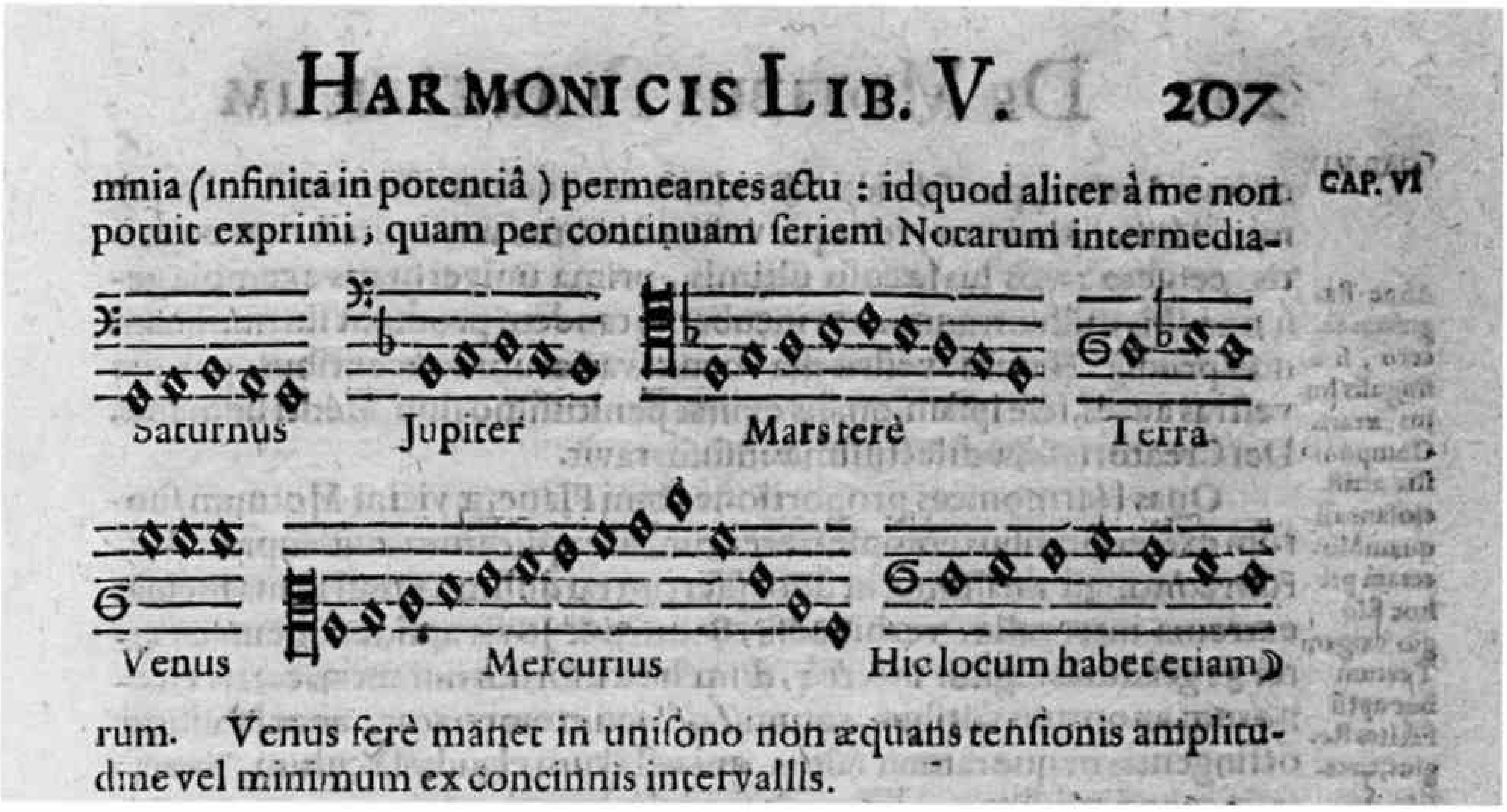

Фрагменты фрески работы Рафаэля «Афинская школа», где изображен Пифагор. На грифельной доске, которую держит один из его учеников, можно видеть рисунок лиры, что свидетельствует о математической основе музыкальной гармонии. Ниже изображен священный треугольник тетрактиса.

Мистицизм чисел на протяжении веков оказывал влияние на многих писателей, художников и мыслителей, как это было и со связью между математикой и музыкой. В эпоху Возрождения некоторые храмы проектировались на основе музыкальных пропорций 2:1, 3:2 и 4:3. На знаменитой гравюре «Анатомический амфитеатр» в книге философа Роберта Фладда, опубликованной в 1623 г., изображено, как Бог настраивает небесный монохорд. Божественная рука натягивает струну на доске, вокруг которой орбиты планет перекрываются с интервалами музыкальной гаммы. Идея «музыки сфер» вдохновляла многих великих ученых, в том числе Иоганна Кеплера. Мистик до глубины души, Кеплер посвятил (хотя некоторые могут сказать, что потратил впустую) 30 лет своей жизни попыткам выразить законы движения планет через музыкальную гармонию. Он считал, что планеты порождают различные мелодии в зависимости от их расстояния от Солнца: чем ближе, тем выше ноты.



Небесный монохорд, настраиваемый рукой Бога, с гравюры «Анатомический амфитеатр» из книги английского философа Роберта Фладда, опубликованной в 1623 г.

Влияние Пифагора, оказываемое им на протяжении веков, в древности и в современную эпоху, сделало его одним из самых значительных когда-либо живших людей, несмотря на то, что его мысли наряду с подлинной мудростью содержали порой полный вздор. Благодаря ему математика стала инструментом дедукции и доказательств, одновременно принимая странные формы мистицизма. Идея о том, что математические уравнения соответствуют реальным явлениям, — одна из основ пифагореизма. Приводя примеры современных ученых, которые внесли в науку вклад столь же бесспорной важности, конечно, нельзя не вспомнить об Альберте Эйнштейне.



В поисках фундаментального принципа, который мог бы объяснить орбитальные эксцентриситеты планет, Кеплер измерял их максимальные скорости в перигелии (ближайшей к Солнцу точке) и минимальные скорости в афелии (самой дальней точке). К радости астронома, отношения между этими скоростями соответствовали гармоническим интервалам. На этой гравюре латинского издания Harmonia mundi («Гармония мира») Кеплер представил эти соотношения в виде нотной записи, отдавая дань «гармонии сфер» Пифагора.

Знаменитый физик, совершивший революцию в науке XX в., бо́льшую часть своей жизни находился под влиянием численных пропорций пифагореизма, в конце концов открыв формулу относительности $E = mc^2$ (энергия равна массе, умноженной на квадрат скорости света). Наследие пифагорейской философии по-прежнему ослепляет нас своим великолепием.

Глава 2

Самая знаменитая теорема в истории науки

Все есть число.
Пифагорейский принцип

Первый вопрос, который возникает при решении любой математической задачи: в чем ее польза? Ответить на него можно, если сначала спросить себя: где эти задачи возникают? Чем более абстрактен вопрос, тем больше необходимость найти на него фундаментальный ответ, чтобы достигнуть понимания и прогресса.

Одним из примеров являются корни чисел. Первое знакомство с ними вызывает некоторое замешательство. При решении задач невольно возникает вопрос: как эти корни можно использовать? Однако этот вопрос следует сформулировать так: откуда появляются корни чисел?

Как обычно бывает, ответ прост. Корни чисел появляются в очень простых геометрических задачах, например, при вычислении длины диагонали квадрата или прямоугольника по длинам сторон. При решении этой классической геометрической задачи используется известная теорема Пифагора. Важность этой теоремы связана в том числе и с тем, что она приводит к понятию квадратного корня. Именно поэтому она является воротами в огромную математическую страну, населенную корнями чисел.

Доброе утро, числа!

Человек использует числа при решении задач на счет и измерения. Первыми появились натуральные числа (1, 2, 3...), необходимые для счета и упорядочивания. Затем возникли дроби в результате сравнения этих величин: 1/2, 3/4, 5/8... Потом встала задача описания каждой точки прямой линии числом — задача, актуальная в математике и сегодня.

С появлением чисел человек вступил в абстрактный мир уравнений, с помощью которых можно было объяснить и упорядочить сведения о реальном мире (или, по крайней

СИМВОЛ $\sqrt{\ }$

Этот странный символ, который так привычен для нас сегодня, был изобретен Кристофом Рудольфом в 1525 г. Считается, что форма символа происходит от латинской буквы r (аббревиатура слова «радикал»). Заметим, что в общем случае $\sqrt{x}$ соответствует двум значениям: $\pm\sqrt{x}$, хотя при работе с положительными числами $\sqrt{x}$ следует понимать как $+\sqrt{x}$.

мере, попытаться это сделать). Однако с самого начала этот мир порождал множество проблем. Например, первое время людям казалось, что все в природе может быть измерено если не с помощью натуральных чисел, то хотя бы с помощью дробей. Но с развитием науки о числах стало ясно, что такое предположение не всегда верно. Именно в геометрии при измерении различных длин впервые возникла подобная проблема. При вычислении такой простой величины как диагональ квадрата, стороны которого равны единице, стало понятно, что эта величина не может быть выражена в виде дроби или натурального числа. Вдруг стало очевидно, что существует множество величин, которые невозможно измерить, используя одну и ту же единицу длины, какой бы маленькой она ни была.

Диагональ квадрата со стороной 1 равна $\sqrt{2}$. Это число вызвало бурю изумления среди математиков того времени. Оно не могло быть описано термином «натуральное» и несколько позже стало называться иррациональным — не очень удачное выражение, которое, тем не менее, позволяло отличать такие числа от рациональных (т.е. таких, которые могут быть выражены с помощью дробей). После открытия $\sqrt{2}$ в математике стали появляться и другие иррациональные числа. Открытие этого типа чисел, иррациональных чисел, является одним из величайших достижений математики. Наряду с $\sqrt{2}$ некоторые из наиболее известных иррациональных чисел появляются в самых простых задачах, которые можно решить с помощью линейки и циркуля. Например, золотая пропорция $(1+\sqrt{5})/2$. Также на протяжении веков число пи (π) являлось объектом культового почитания. Пи представляет собой таинственное отношение периметра круга (длины окружности) к его диаметру. В настоящее время с помощью суперкомпьютеров вычислены триллионы десятичных знаков этого числа.

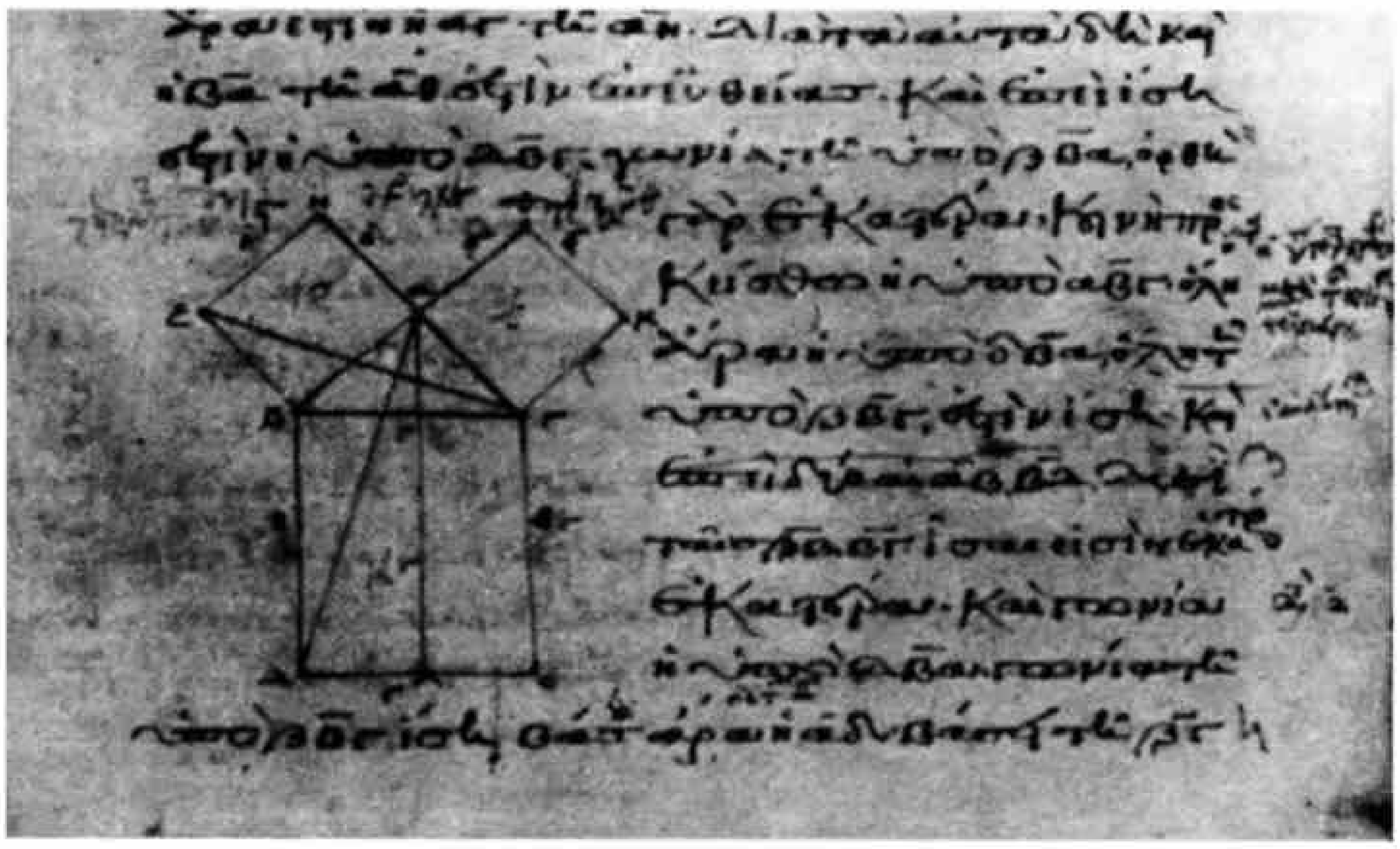
Квадратные и кубические корни впервые появились в геометрических задачах, хотя вскоре они проникли и в другие разделы математики. Они связаны с еще одним математическим открытием — новой задачей, требующей решения: с уравнениями второй и третьей степени. Когда появились такие уравнения, математики были застигнуты врасплох: никто не знал, как их решать. Нужно было специально разработать методы решения этих уравнений. Эти методы легли в основу новой науки — алгебры.

Таким образом, корни чисел породили новую математическую дисциплину, которая в настоящее время используется в каждом учебном заведении, научной лаборатории или заводе.

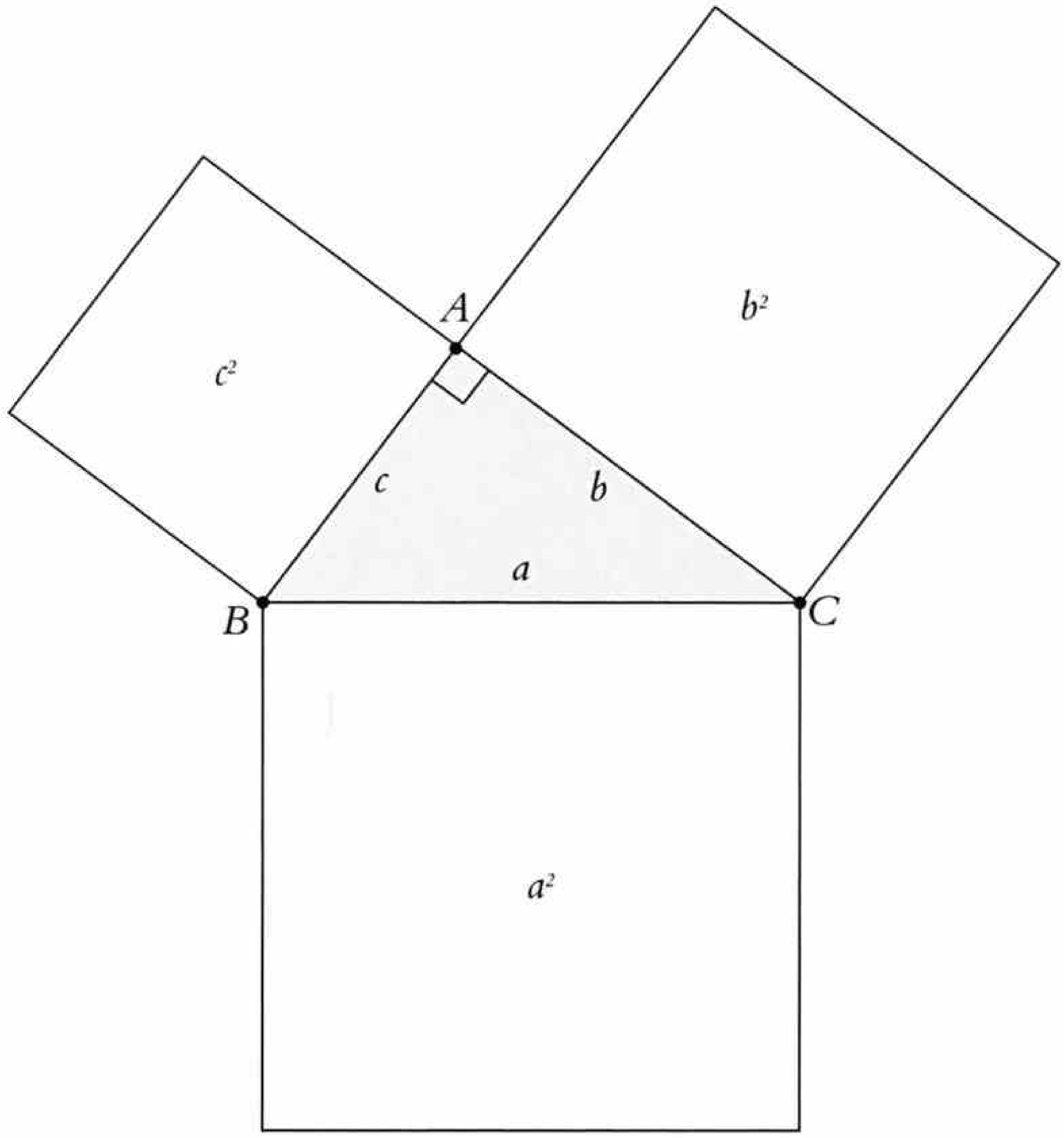
Теорема Пифагора: формулировка и история открытия

2700 лет спустя после открытия теоремы Пифагора она по-прежнему остается самым известным математическим утверждением для широкой общественности. Ее огромная популярность объясняется не только тем, что она изучается во всех школах мира. Подобно тому, как классические музыканты из сезона в сезон продолжают играть «Времена года» Вивальди или Девятую симфонию Бетховена, профессиональные математики продолжают публиковать новые доказательства этой теоремы. Существует несколько сотен таких доказательств.

Знаменитая теорема Пифагора впервые была подробно описана в самой первой из западных книг по геометрии — «Началах» древнегреческого ученого Евклида. Однако предшественницы этой теоремы могут быть найдены во многих древних цивилизациях Востока, таких как Вавилон, Египет, Индия и Китай. Многие историки уверены, что Пифагор во время своих путешествий должен был познакомиться с этими идеями. Несмотря на это, гениальность древнегреческого математика не подлежит сомнению. Имевшиеся результаты были основаны на конкретных примерах, математических свойствах геометрических фигур. Именно Пифагор смог обобщить эти частные результаты. От конкретных треугольников он перешел к общей теореме, справедливой для любого прямоугольного треугольника. Подобно другим древнегреческим геометрам, он сформулировал теоретическую схему, применимую во всех случаях.



Фрагмент «Начал» Евклида с описанием теоремы Пифагора.



В оригинальной формулировке теорема Пифагора звучит так: в данном треугольнике с вершинами (углами) A, B и C угол A является прямым углом тогда и только тогда, когда площадь квадрата, построенного на стороне a, противолежащей A, равна сумме площадей квадратов, построенных на двух других сторонах b и c ($a^2 = b^2 + c^2$).

КАТЕТЫ И ГИПОТЕНУЗА

Эти термины относятся к сторонам прямоугольного треугольника и имеют свои этимологические корни в греческом языке. Слово «катет» происходит от слова kathetos, производного от kothos, то есть «отвесный», или «перпендикуляр». Слово «гипотенуза» происходит от греческого слова hypoteinousa, что означает «линия, тянущаяся под чем-либо». Это определение предполагает, что гипотенуза является диаметром окружности, в которую вписан прямоугольный треугольник, так что прямой угол опирается на диаметр.

Исходя из этого, можно сделать несколько предварительных замечаний:

а) Часто используют следующую формулировку: «В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов». Фактически это верно потому, что катеты перпендикулярны. Но это лишь одна часть общей теоремы. Если выполняется соотношение $a^2 = b^2 + c^2$, то из него следует, что треугольник прямоугольный.

б) В первую очередь теорема помогает определить перпендикулярность. Предположим, что древнегреческий архитектор решил проверить, перпендикулярны ли две стены. Тогда он берет инструмент, используемый в то время для измерения длины, — веревку с равноотстоящими узлами. С помощью этой веревки он отмечает 3 единицы на одной из стен и 4 единицы на другой. Стены перпендикулярны, если расстояние между отмеченными концами составит 5 единиц ($5^2 = 3^2 + 4^2$). Этот гениальный способ сводит сложную задачу измерения углов к простой проверке отношений между длинами, что гораздо легче сделать на практике.
Обратите внимание, что плотничий угольник позволяет непосредственно проверить перпендикулярность с помощью самого инструмента. В черчении используются специальные треугольники, позволяющие строить перпендикулярные отрезки (как и многие другие фигуры, комбинируя углы в 30, 45, 60, 90°).

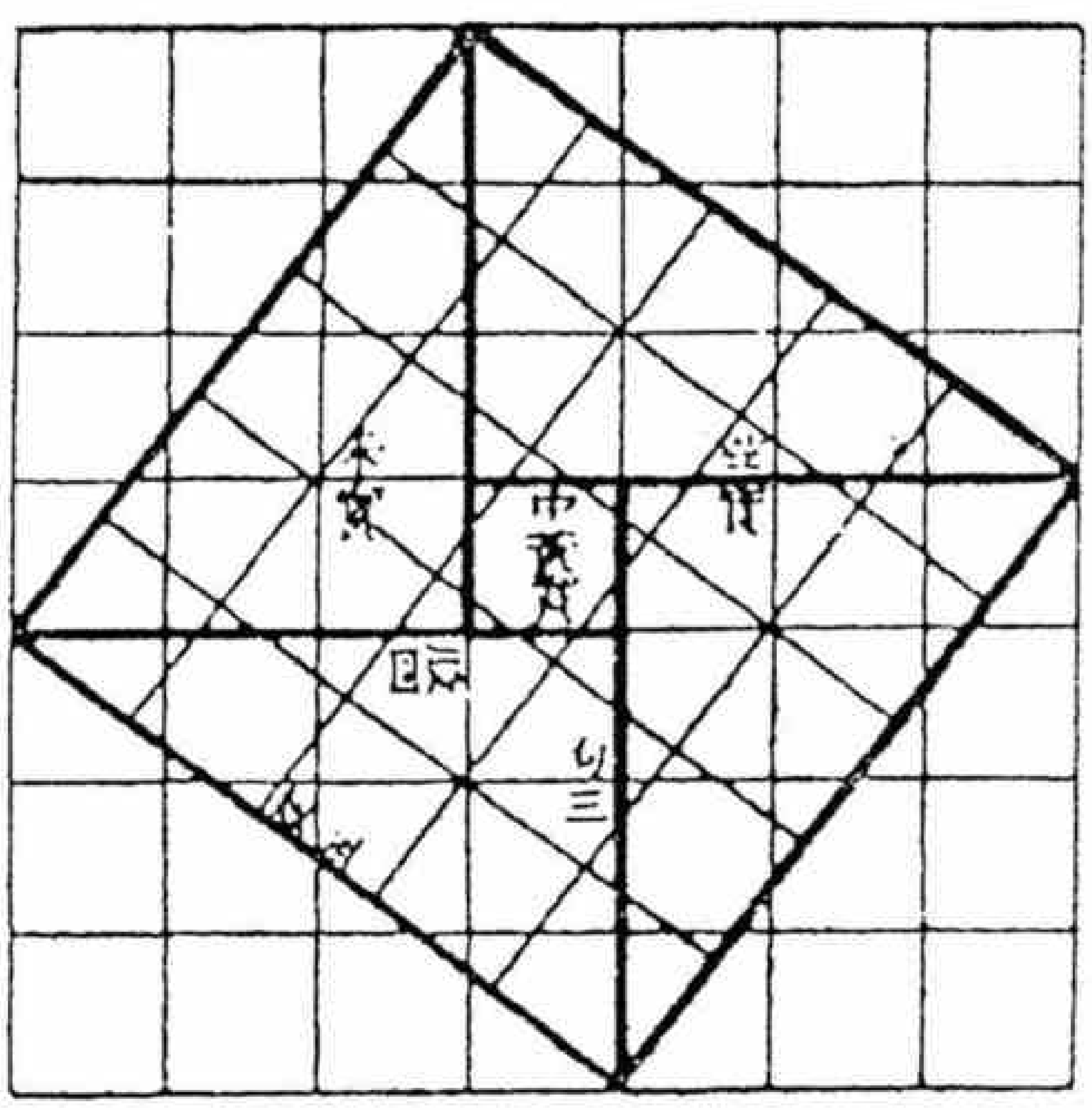
в) Теорема Пифагора также полезна для графического решения следующей задачи: даны два квадрата, требуется построить третий квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух первых. Согласно древнегреческому методу, чтобы найти площадь многоугольника, необходимо в первую очередь разбить его на треугольники; из треугольников строились квадраты, и задача сводилась к построению из квадратов окончательной площади. Теорема Пифагора позволяет легко решить графически задачу о сумме квадратов (см. доказательство в следующем разделе).

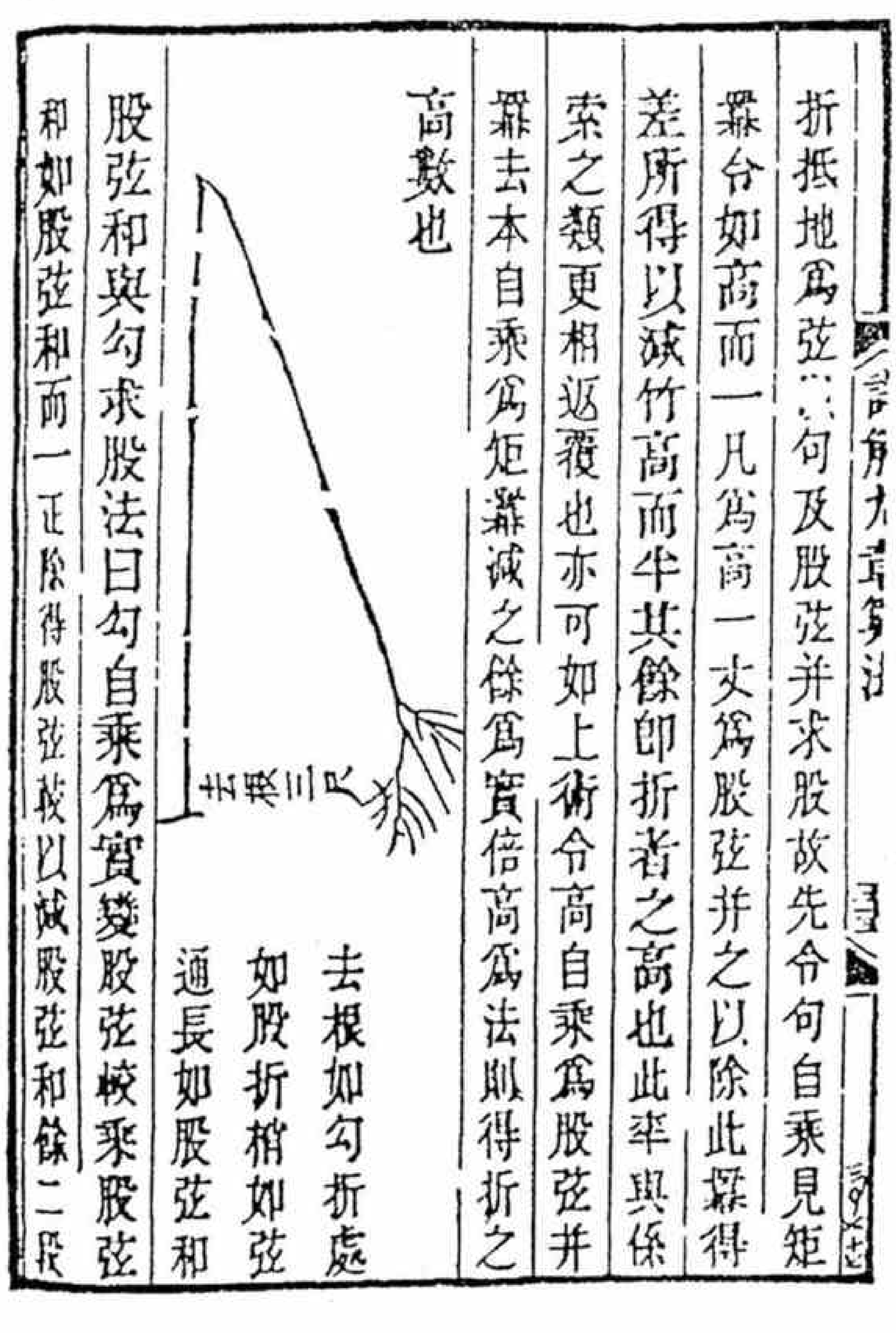
г) Формула $a^2 = b^2 + c^2$ предполагает извлечение квадратного корня: $a=\sqrt{b^2+c^2}$, $b=\sqrt{a^2-c^2}$ и $c=\sqrt{a^2-b^2}$. И в частности, так были открыты первые корни $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7}...$

Как мы уже говорили, заслугой Пифагора (или его скромного последователя, открывшего результат и приписавшего его своему уважаемому учителю) является то, что он заметил: это соотношение справедливо для любых прямоугольных треугольников. Однако частные случаи теоремы ($5^2 = 3^2 + 4^2$) были известны в Вавилоне и Египте за много лет до этого. В свою очередь древние китайские и индийские математики также знали это геометрическое свойство. На самом деле задача вычисления диагонали квадрата появилась в различных культурах совершенно независимо.

В Китае теорема Пифагора называется Кон Ку (Kon Ku). Китайский математический трактат, озаглавленный «Чжоу би суань цзин» (Zhou Bi Suan Jing, «Канон расчета чжоуского гномона») и датируемый III в. до н. э., содержит следующий рисунок (см. внизу слева). На рисунке изображено равенство площади квадрата со стороной 5 сумме площадей квадратов со сторонами 3 и 4, причем стороны прямоугольного треугольника связаны соотношением $5^2 = 3^2 + 4^2$.

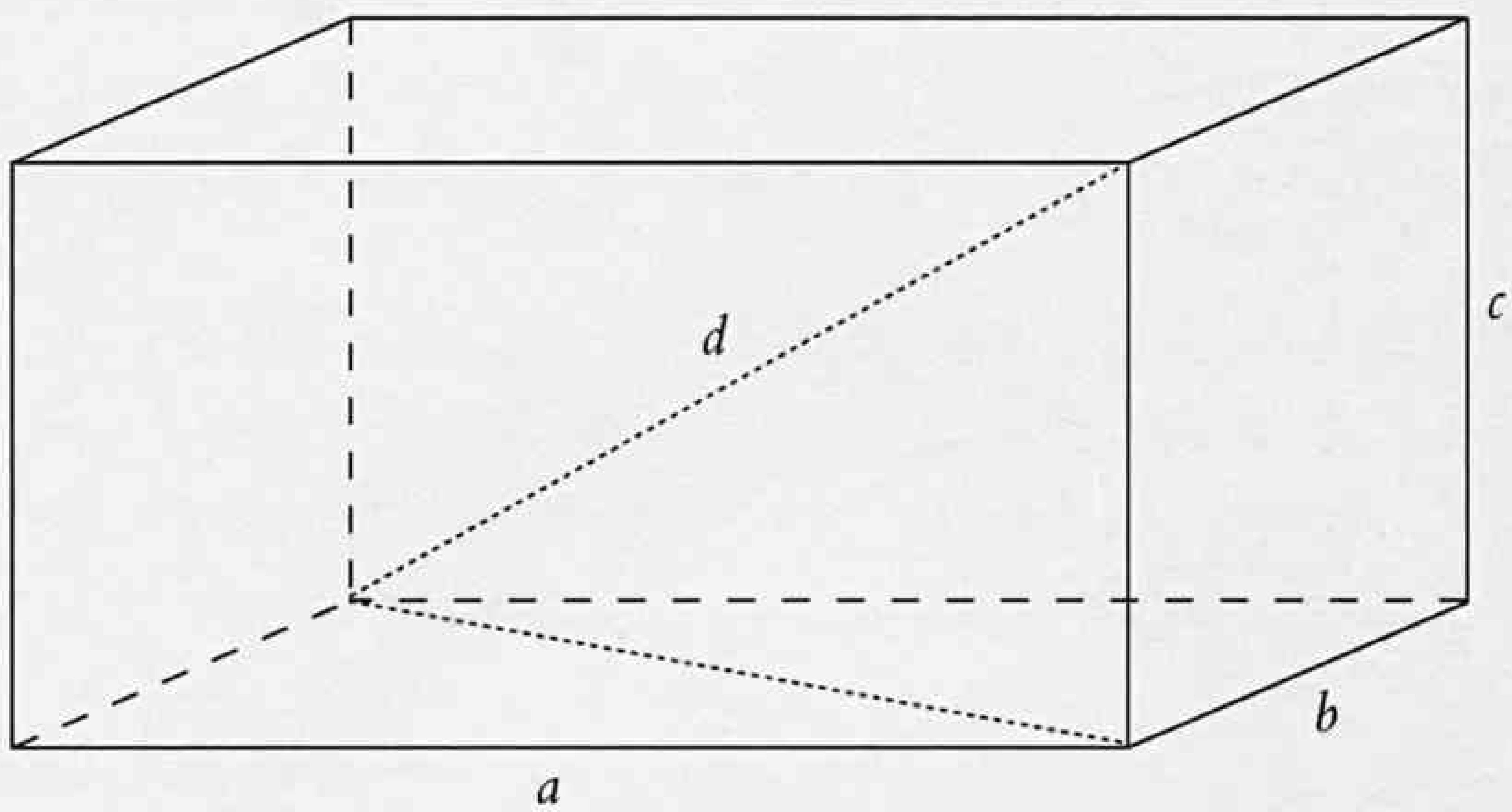
Годы спустя математики Чао Цзин Цзин и Лю Хуэй доказали этот результат для любого прямоугольного треугольника. Их доказательство использует красивый образ побега бамбука, сломанного ветром. Если известна высота бамбукового стебля и горизонтальное расстояние от основания до кончика бамбука, тогда можно посчитать общую длину побега (гипотенузу).




折抵地為弦句及股弦并求股故先令句自乘見矩
冪令如高而一凡為高一丈爲股弦并之以除此冪得
差所得以減竹高而半其餘即折者之高也此率與係
索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘爲股弦并
冪去本自乘爲矩冪減之餘爲實倍高爲法則得折之
高數也
去本三尺
去根如勾折處
如股折梢如弦
通長如股弦和
股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實變股弦較乘股弦
和如股弦和而一除得股弦較以減股弦和餘二股

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

Теорема Пифагора обычно формулируется для прямоугольных треугольников на плоскости. Как бы она звучала в трехмерном пространстве? На этот вопрос имеется несколько ответов. Наиболее часто рассматривается коробка размерами a, b и c. Тогда ее диагональ d выражается с помощью теоремы Пифагора: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Другие варианты теоремы Пифагора в пространстве будут рассмотрены в последней главе.

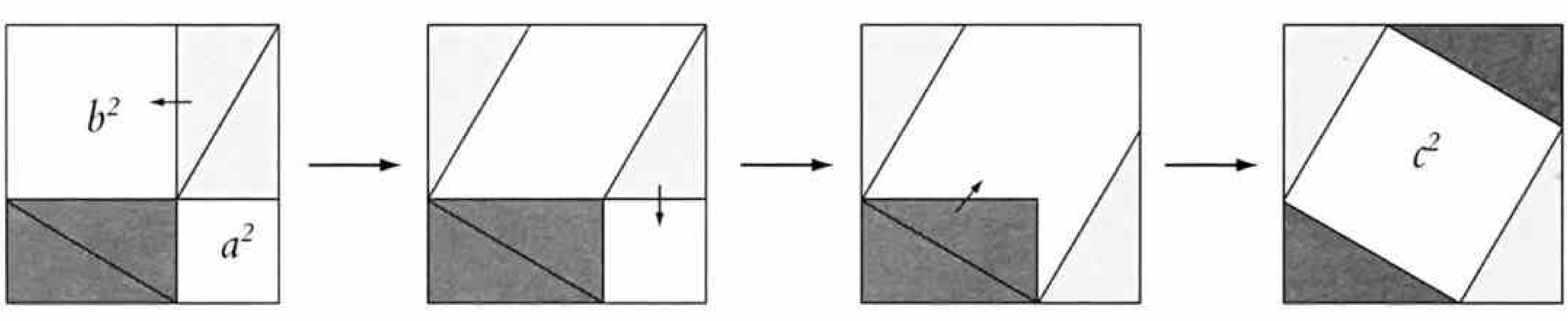


Красивые доказательства

Классические доказательства теоремы Пифагора представляют не только математический интерес. Изобретательный подход и элегантность этих доказательств красивы сами по себе.

Теорема Пифагора в «Чжоу би суань цзин»

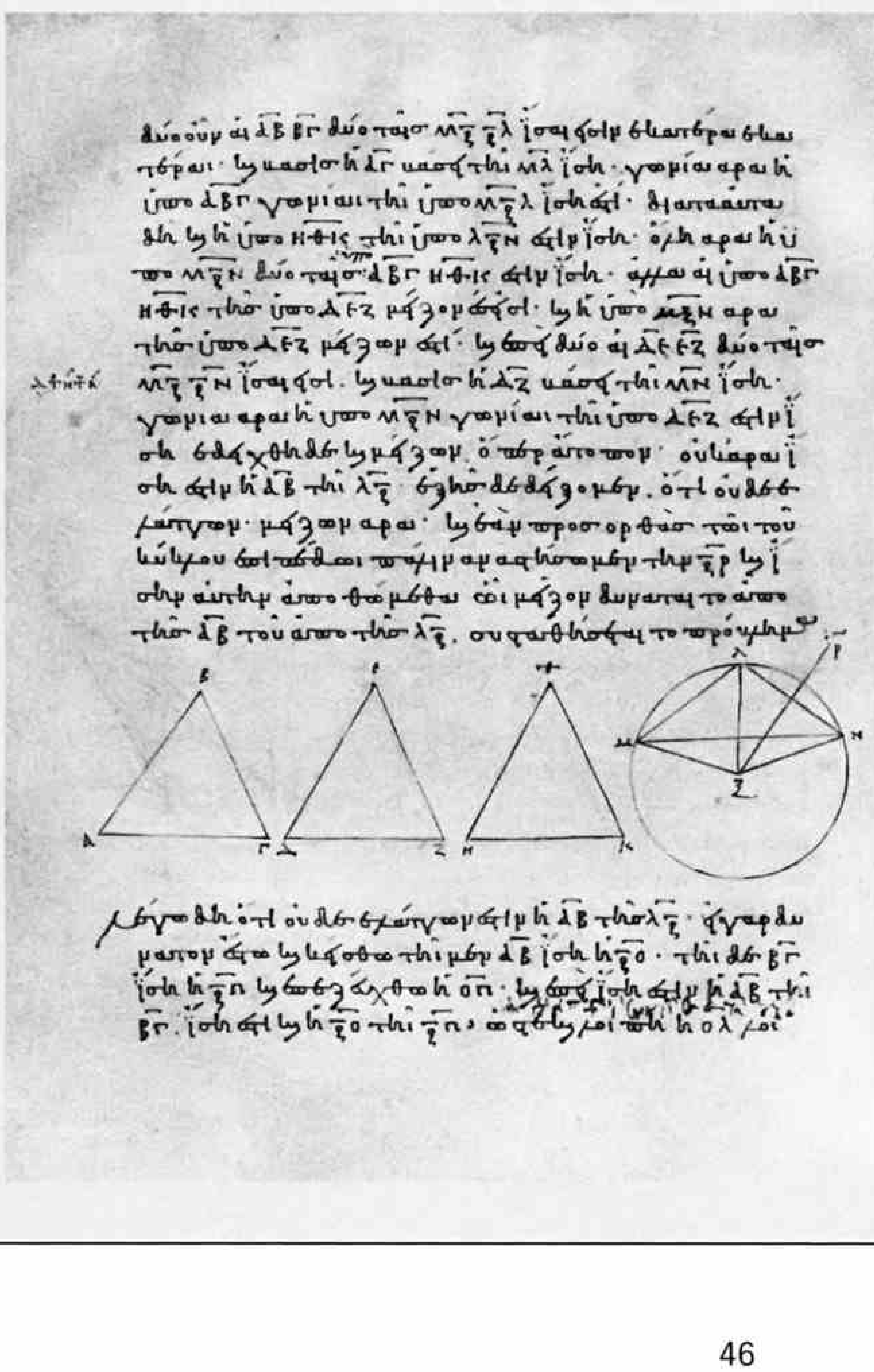
Этот китайский документ, название которого можно приблизительно перевести как «Канон расчета чжоуского гномона» или «Счетный канон чжоуского/всеохватного гномона», содержит прекрасное доказательство теоремы с использованием только передвижений кусочков фигур.



ПИФАГОР, ЕВКЛИД И ЕГО «НАЧАЛА»

Евклид жил в Александрии около 300 г. до н. э. Он был автором «Начал» — математического труда, имевшего основополагающее значение для развития математики и науки. В нем он собрал все геометрические знания того времени, представив их с элегантной строгостью, логически выводя все основные свойства (теоремы) из определений, постулатов и аксиом. Работа Евклида является не только блестящей компиляцией знаний, но и четким руководством для упорядочивания геометрического мышления. Именно поэтому и в наше время, спустя много веков, она остается основным эталоном при изучении геометрии. Уступая лишь Библии, «Начала» являются наиболее публикуемой книгой как в рукописных вариантах, так и в печатном виде, выдержавшей тысячи изданий.

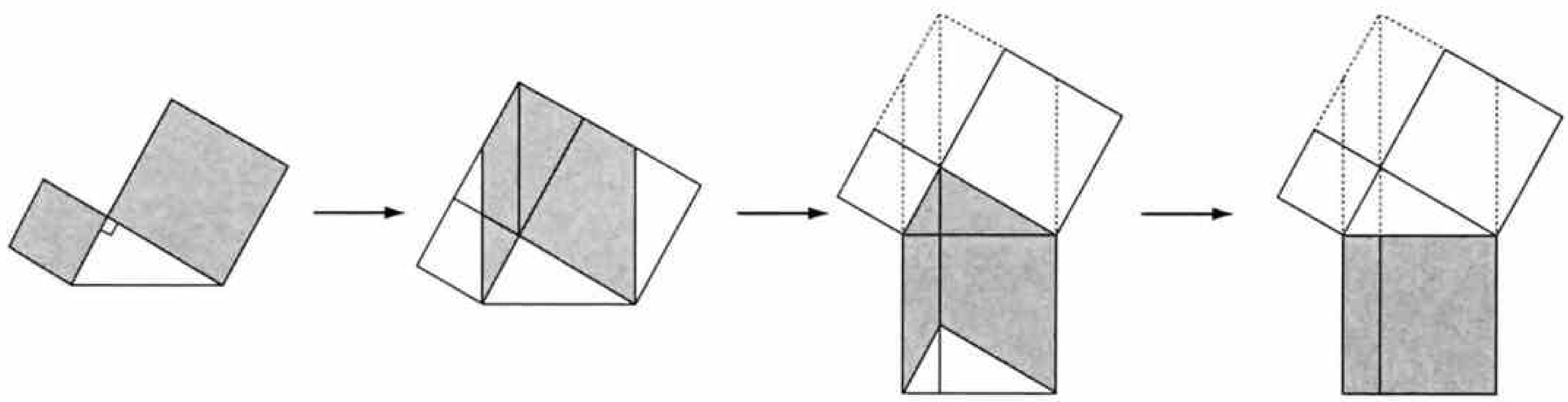
Этот труд состоит из нескольких книг. Первые четыре книги посвящены геометрии на плоскости, что включает в себя равенство треугольников, площадей и, конечно, теорему Пифагора (книга I, предложение 47). Также в них рассматриваются золотая пропорция, окружности, правильные многоугольники и некоторые квадратуры (построение квадратов). Таким образом, теорема Пифагора появляется в геометрическом контексте, в разделе о площадях фигур. Пифагор упоминается также в книге VI в связи с пропорциями и в книге X, посвященной квадратным корням.



Страница из «Начал» Евклида из так называемой дорвильской рукописи, написанной по-гречески в Константинополе в IX в.

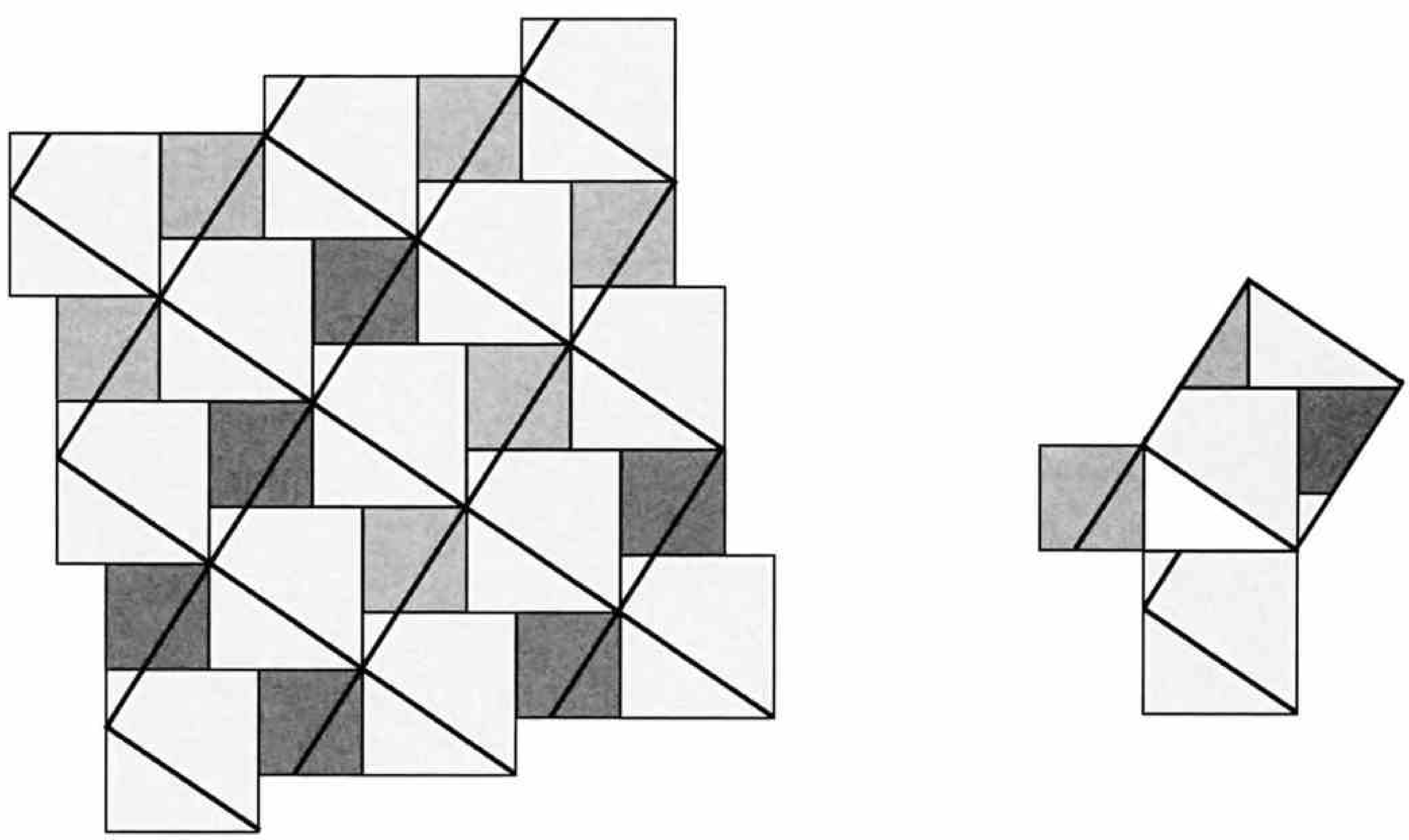
Доказательство Евклида

Евклид представил следующее графическое доказательство теоремы Пифагора. Он преобразовал квадраты на катетах в параллелограммы с той же самой площадью (основание и высота остаются одинаковыми). Затем он совместил эти параллелограммы с квадратом на гипотенузе. Это остроумное доказательство показывает также соотношение площадей квадратов на катетах.



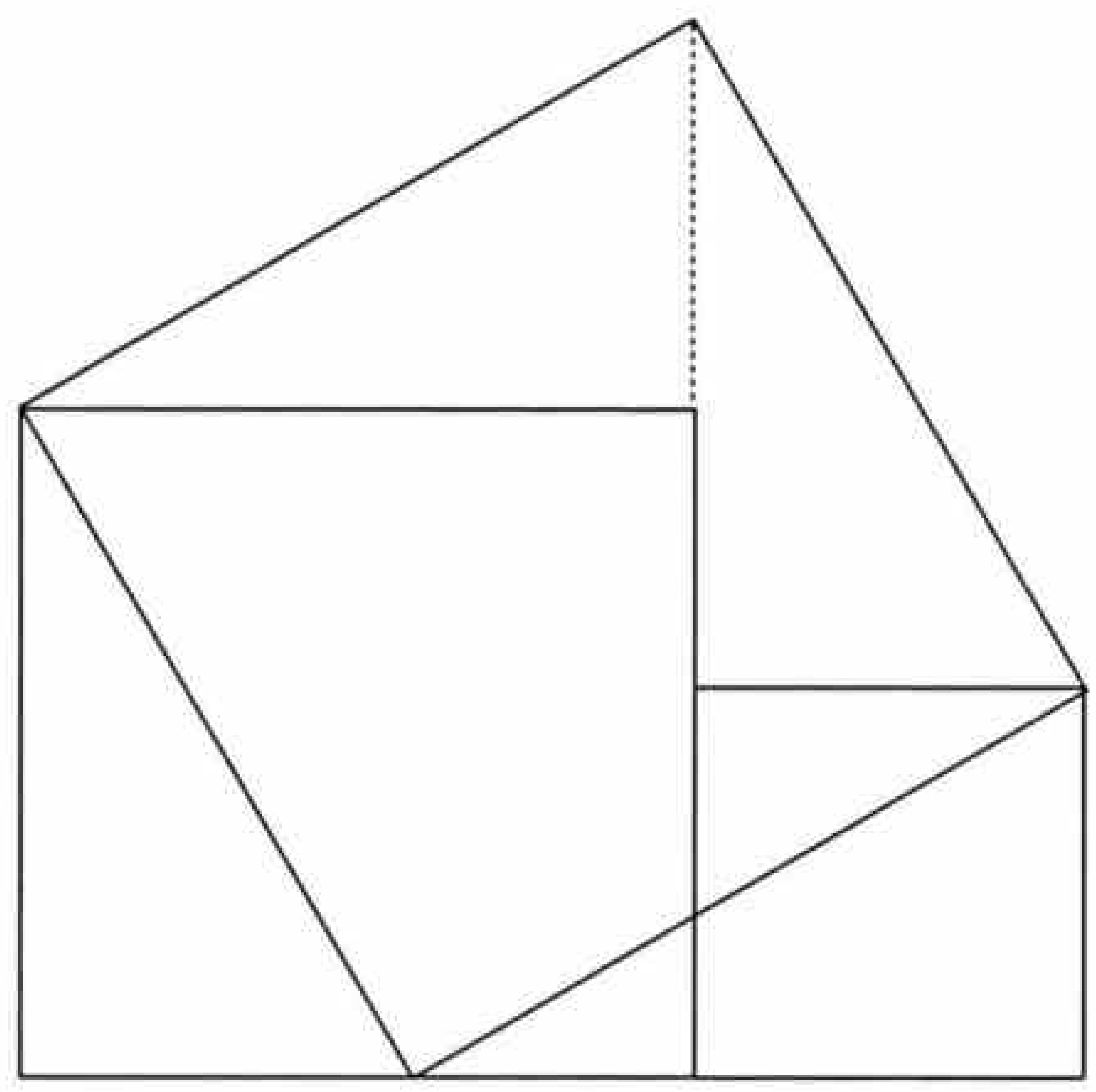
Теорема Пифагора в арабской мозаике

Другое красивое доказательство из арабского текста Аннаирици (около 900 г. до н. э.) основано на мозаике. Мозаика состоит из кусочков квадратов, соответствующих катетам, наложенных на квадрат, соответствующий гипотенузе. Обе мозаики покрывают одну и ту же поверхность. Удивительно оригинальный способ доказательства теоремы!



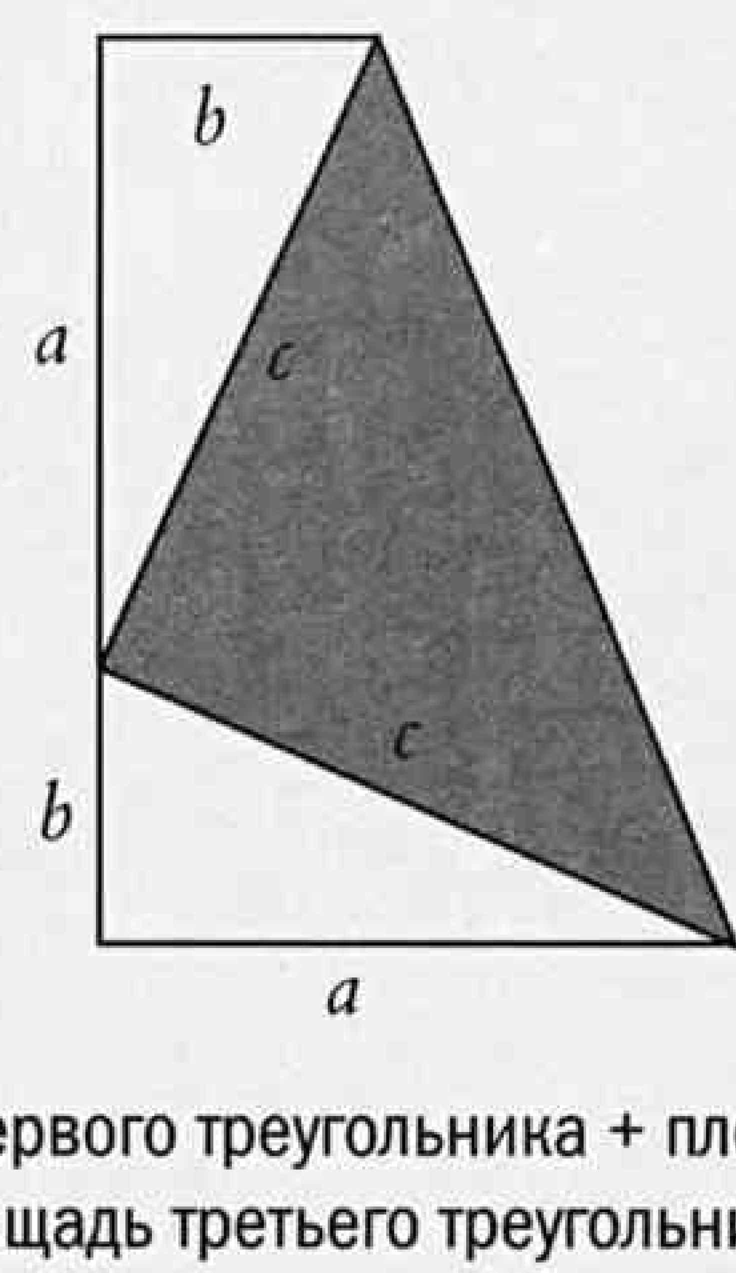
Доказательство Генри Перигаля

Одной из жемчужин коллекции доказательств теоремы Пифагора является доказательство 1873 г. английского математика Генри Перигаля. Он создал головоломку, в которой большой квадрат делится на две части.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕЗИДЕНТА СОЕДИНЕННЫХ ШТАТОВ

В 1876 г., прежде чем стать двадцатым президентом США, Джеймс Абрам Гарфилд (1831–1881) опубликовал оригинальное доказательство теоремы Пифагора, которое он обсуждал с коллегами в Конгрессе. Во время его президентства, как и следовало ожидать, он уже не занимался математическими изысканиями. В доказательстве Гарфилда площадь четырехугольника находится двумя различными способами:



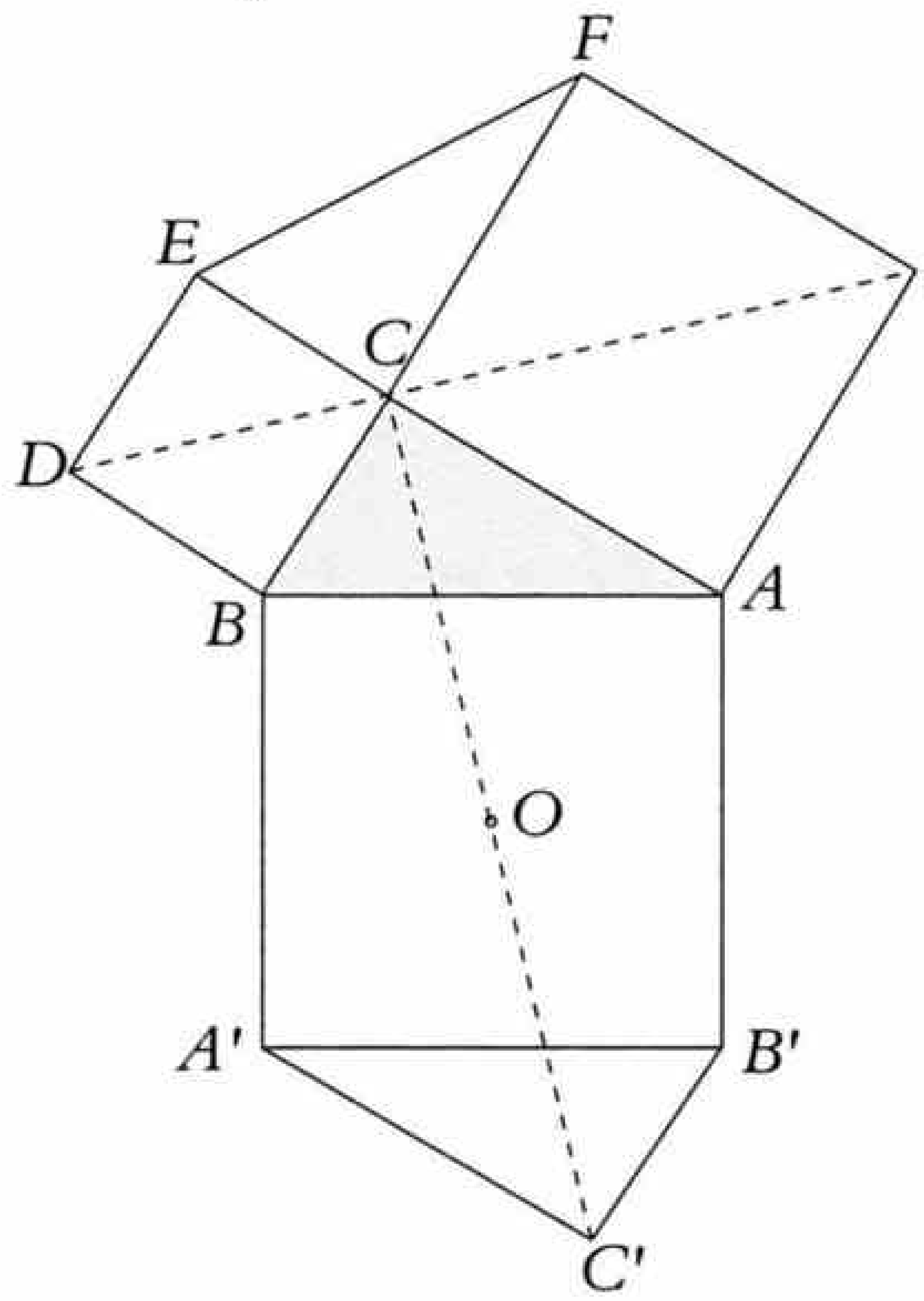
площадь трапеции = площадь первого треугольника + площадь второго треугольника + + площадь третьего треугольника

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cc,\ \frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)=\frac{1}{2}(ab+ab+c^2),$$

откуда следует: $a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$, откуда $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство Леонардо да Винчи

Гениальный Леонардо да Винчи (1452—1519) нашел блестящее доказательство теоремы Пифагора. Он изобразил треугольник с тремя квадратами на сторонах, добавив еще две части: треугольник ECF сверху и равный исходному треугольник $A'C'B'$ снизу. Проведя перпендикулярные отрезки DD' и CC', он заметил, что DD' симметрично делит пополам шестиугольник $ABDEFD'$. Если нижнюю из этих частей повернуть (вокруг точки A), то она покроет ровно половину шестиугольника $ACBA'C'B'$. Отсюда следует, что сумма площадей двух квадратов на катетах должна быть такой же, как площадь квадрата на гипотенузе.



Другие доказательства и головоломки

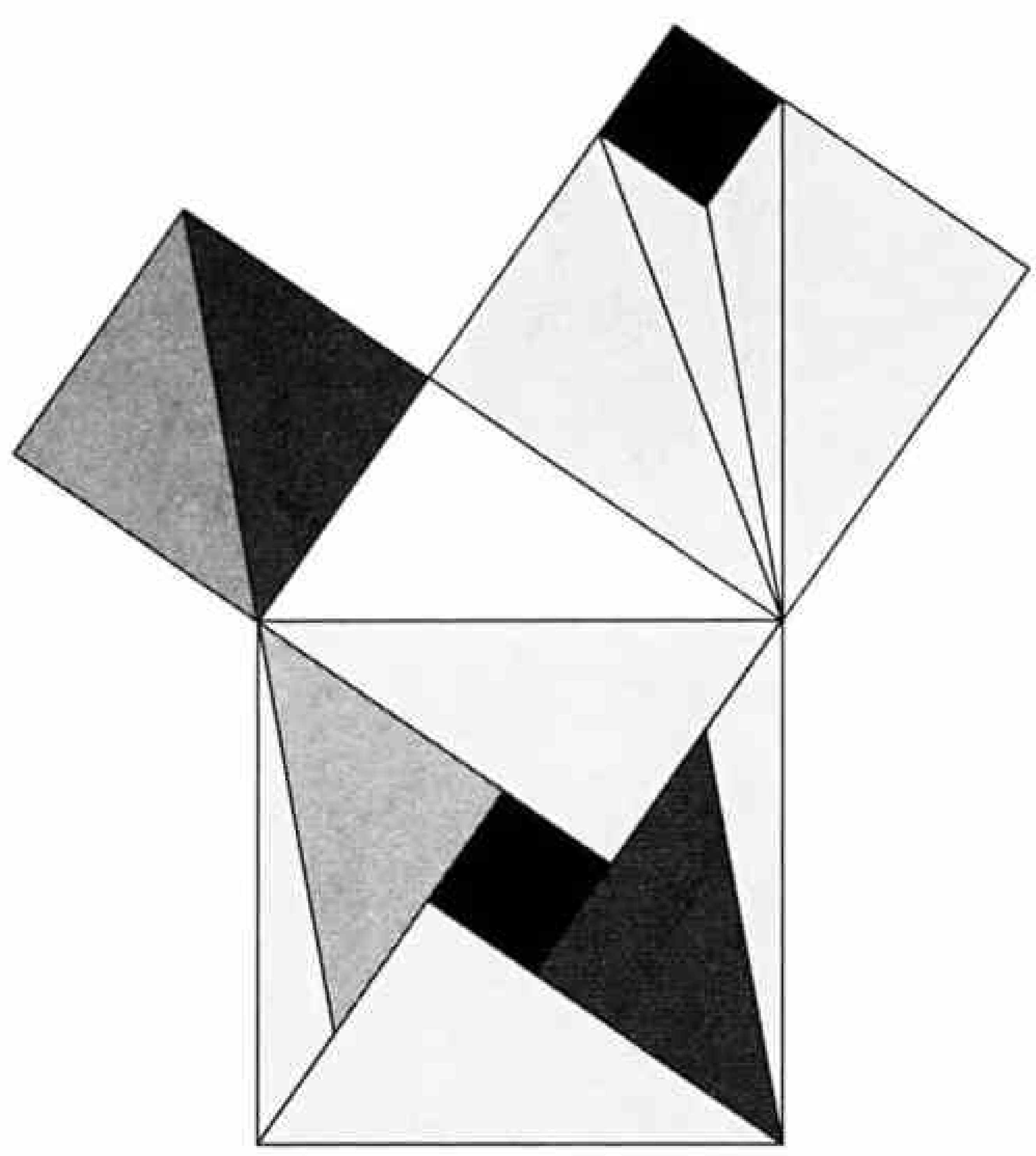
Другие доказательства теоремы Пифагора можно получить очень простыми и красивыми способами. Нужно лишь разделить квадраты, построенные на катетах, на различные кусочки и попытаться использовать их, чтобы составить квадрат на гипотенузе, как при решении головоломки.

Китайский математик Лю Хуэй, живший в III в. во времена правления династии Вей, опубликовал в 263 г. важную книгу по истории математики, где он представил варианты решения различных задач того времени. Книга называется «Цзю чжан суаньшу», или «Математика в девяти книгах». Например, в ней приводится приближенное значение числа пи, равное 3,141014, хотя автор предлагает использовать для этой постоянной значение 3,14. Книга также содержит доказательство теоремы Пифагора в виде головоломки.

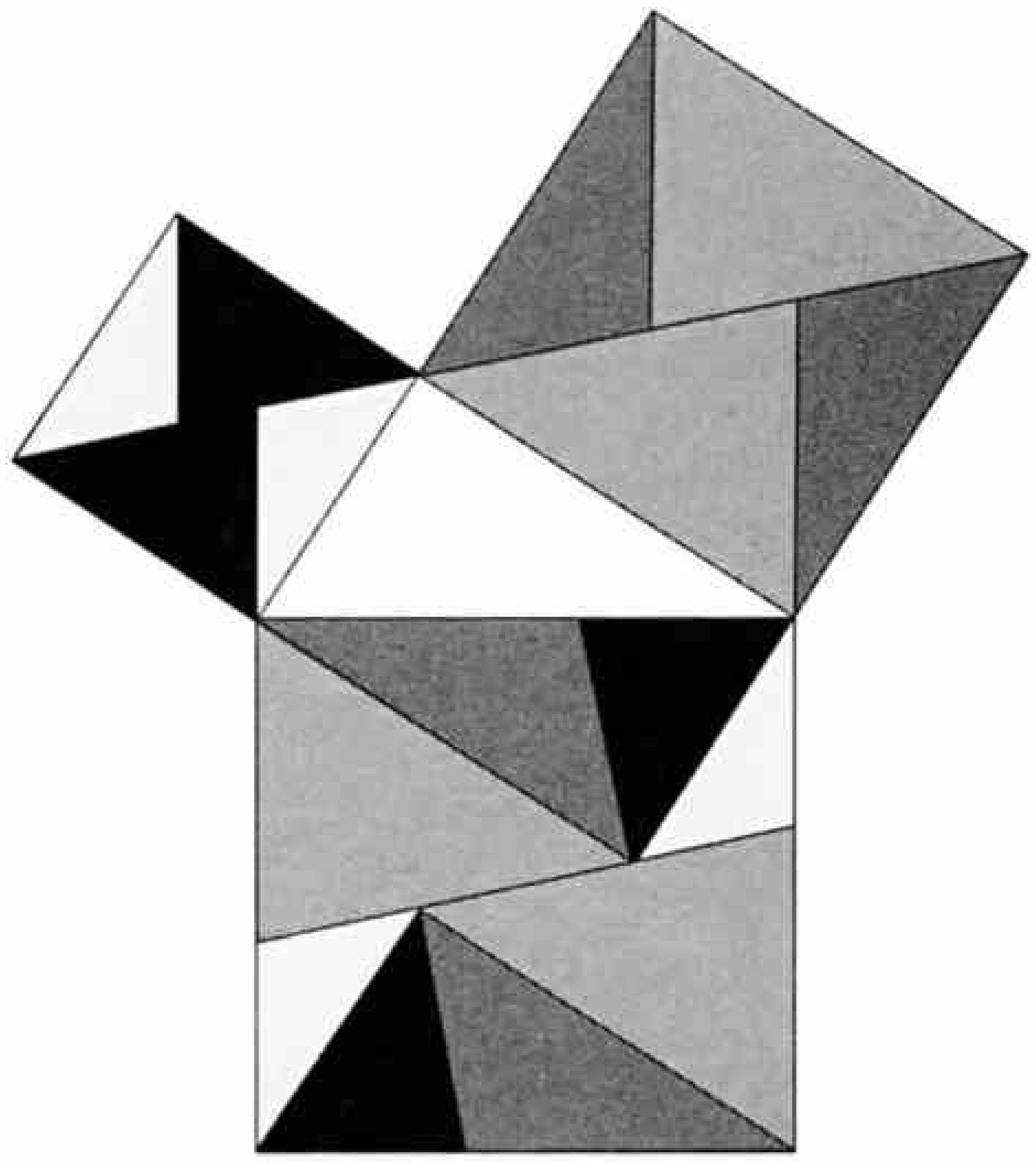
ПИФАГОРЕЙСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ

Можно играть в головоломки, с помощью которых одновременно доказывается теорема Пифагора. В игре используется фотография размером с квадрат, построенный на гипотенузе. Фотография разрезается на определенные фрагменты, которые располагаются на квадратах, построенных на катетах. Необходимо собрать фотографию в большом квадрате. В результате не только откроется фотография, но и будет доказана самая известная теорема в истории математики.

В этой любопытной головоломке квадраты на катетах делятся следующим образом: маленький — пополам, а большой — на пять частей, две из которых являются копиями исходного прямоугольного треугольника (у левой и правой противоположных вершин), а остаток делится на маленький квадрат и два маленьких треугольника, как показано на следующем рисунке. Используя эти семь частей, можно составить квадрат на гипотенузе довольно красивым образом.



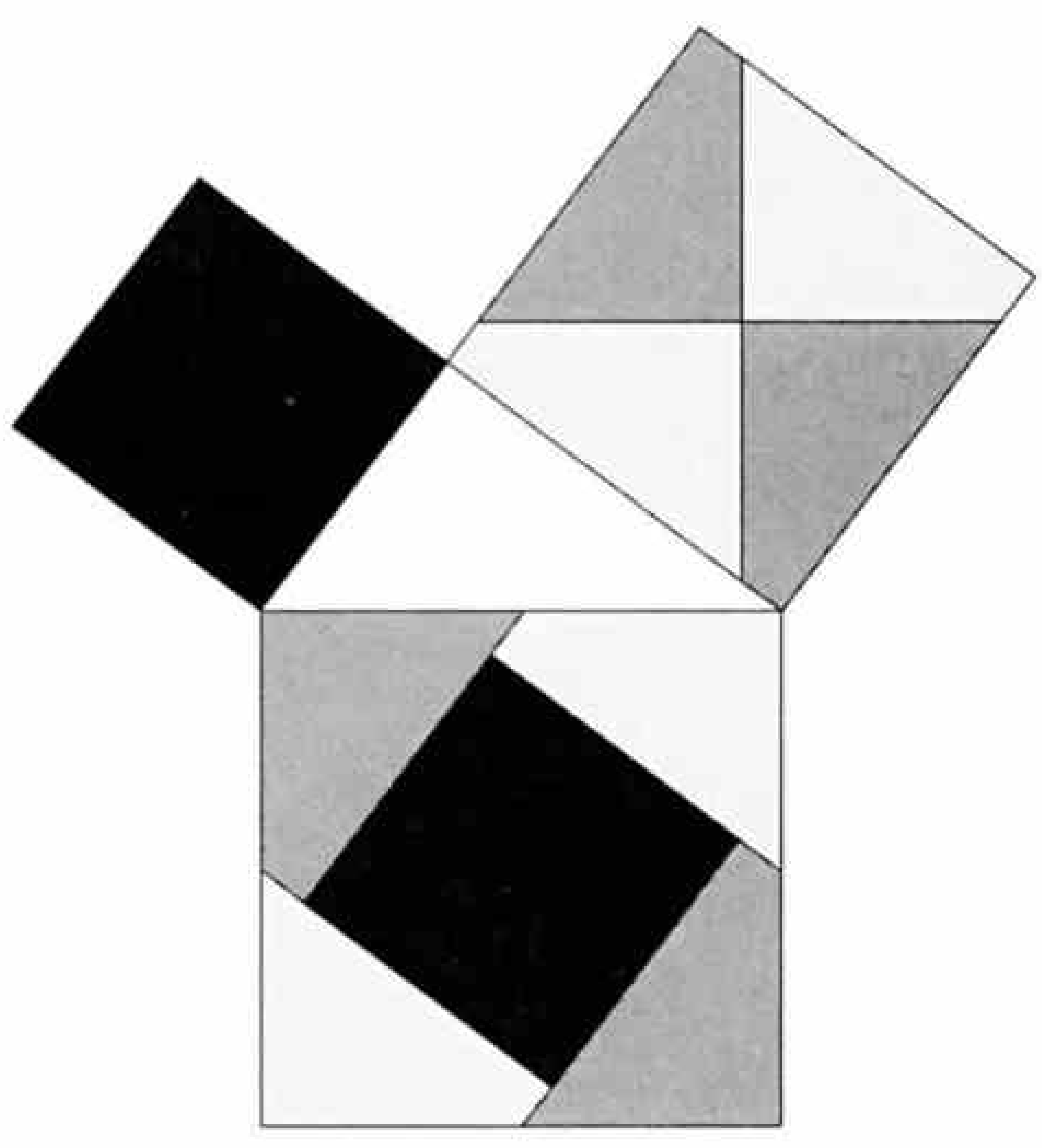
Немецкий физик Иоганн Эдуард Бётхер (1847–1919), бывший в свое время ректором Лейпцигской реальной гимназии, посвятил большую часть своего исследовательского времени чистой математике. В 1886 г. он опубликовал в естественно-научном журнале небольшую статью под названием «Простая модель для доказательства теоремы Пифагора».



В статье была предложена головоломка, где каждый из квадратов на катетах делился на четыре треугольника, с помощью которых можно было получить квадрат на гипотенузе с симметричным расположением кусочков, как показано на рисунке.

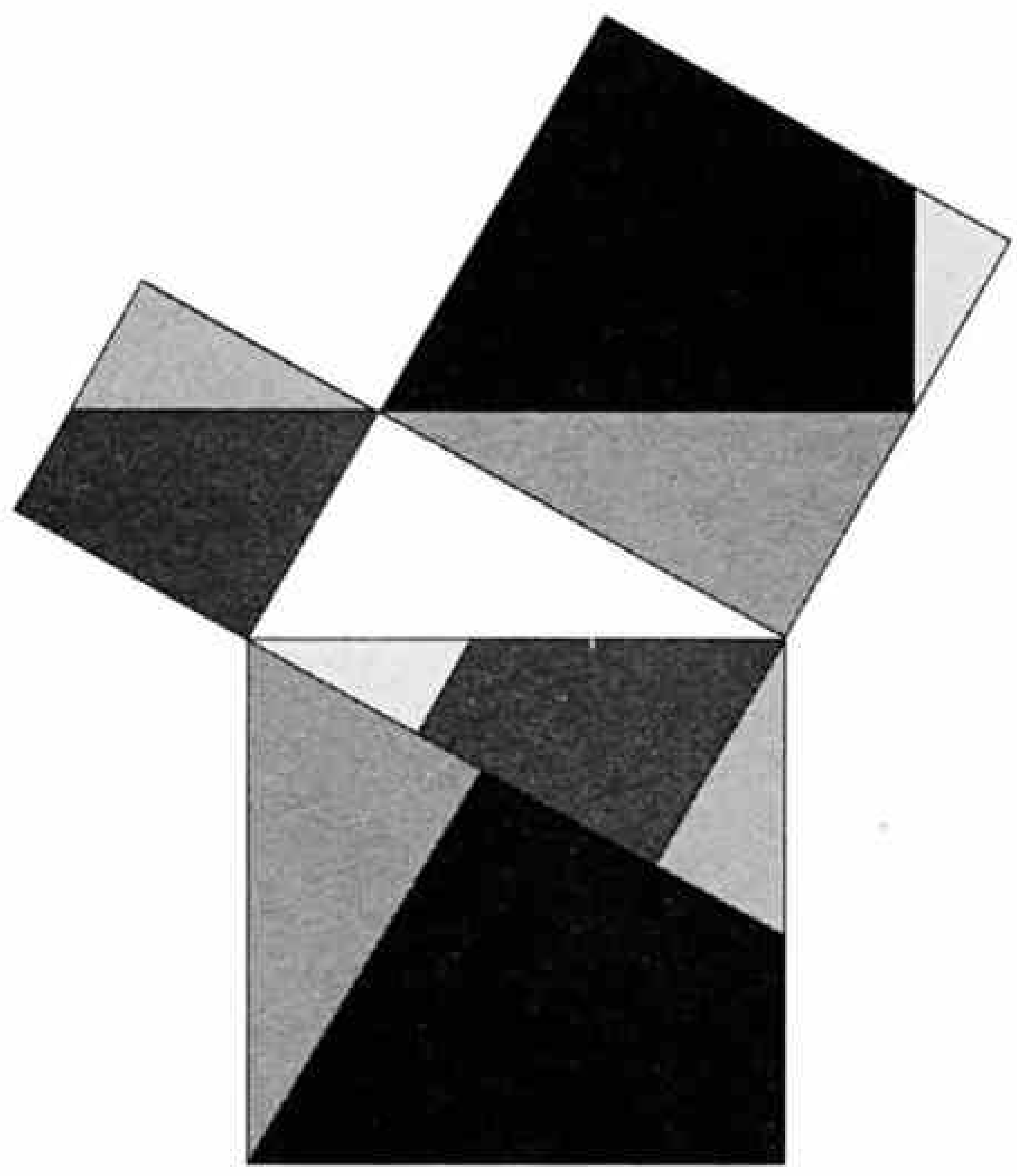
В области занимательной математики особенно известен талантливый английский самоучка Генри Эрнест Дьюдени (1857–1930), несмотря на отсутствие у него математического образования. Дьюдени придумал и опубликовал в газетах большое количество головоломок и других игр, которые затем были собраны в отдельные сборники и в настоящее время считаются каноническими пособиями для любителей математических задач. Теорема Пифагора встречается во многих из них.

Следующая головоломка из пяти частей позволяет собрать квадрат на гипотенузе из маленького квадрата и рассеченного большого квадрата на катетах.



Американский профессор и издатель научных и философских трудов Элиша Скотт Лумис (1852–1940) не очень известен в математических кругах. Не существует ни уравнения, ни теоремы, носящей его имя, а его многочисленные публикации в основном забыты, за исключением одной. В книге «Предложение Пифагора», опубликованной в 1927 г., собрано и классифицировано 371 доказательство теоремы Пифагора.

Линия, проведенная параллельно гипотенузе через вершину прямого угла треугольника, делит меньший квадрат на две части. Квадрат на большем катете можно разделить на три части, проведя линию, перпендикулярную к первой. Из этих пяти частей можно составить квадрат на гипотенузе.



Как видим, имеется много различных доказательств теоремы Пифагора, и действительно существуют люди, которые их коллекционируют.

О теореме Пифагора и параллельных линиях

Среди постулатов, лежащих в основе геометрии Евклида, наиболее известным и обсуждаемым является пятый постулат:

> «Через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной».

В предыдущем параграфе мы представили обзор доказательств теоремы Пифагора. Нетрудно заметить, что все они используют определенные свойства геометрических фигур. Например, что параллелограммы с одинаковыми основанием и высотой имеют одинаковую площадь, что стороны подобных треугольников пропорциональны,

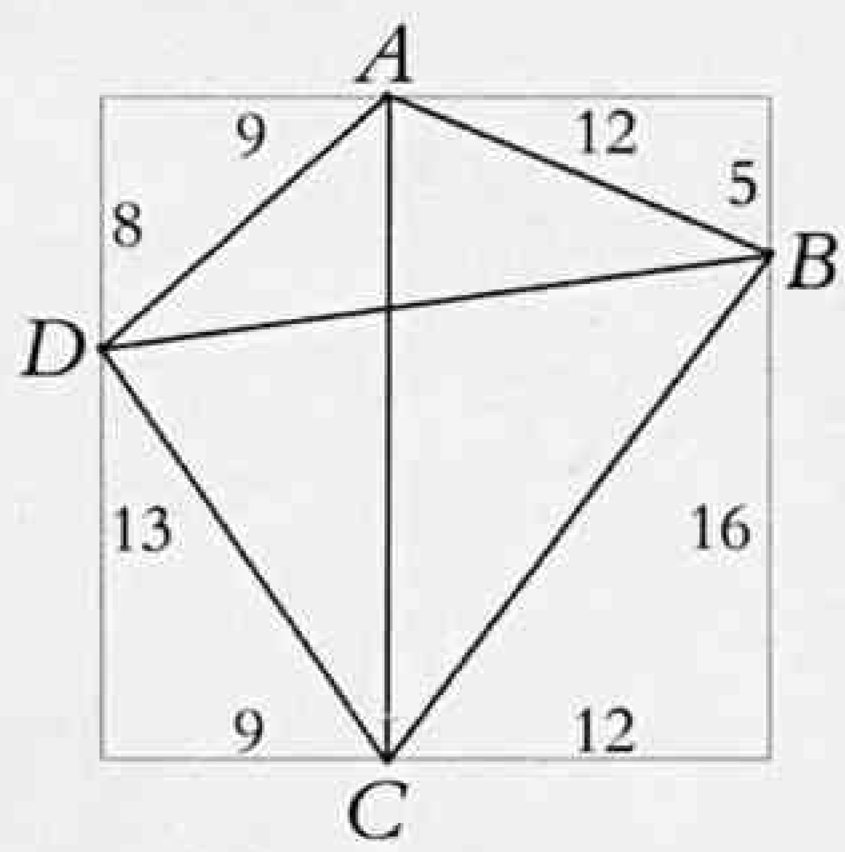
ЛЬЮИС КЭРРОЛЛ И ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Настоящее имя Льюиса Кэрролла (1832–1898), знаменитого автора «Алисы в стране чудес», – Чарльз Лютвидж Доджсон. Он посвятил свою жизнь логике, математике, фотографии и, конечно, писал фантастические рассказы и сказки.

В 1850 г. он разработал и опубликовал следующую геометрическую задачу: на сторонах квадрата с длиной стороны 21 даны четыре точки *A*, *B*, *C*, *D*. Из какой точки сумма расстояний до трех других минимальна?

Чтобы решить эту задачу, Кэрролл воспользовался теоремой Пифагора, сделав следующие расчеты:

$$AB=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13;$$
$$AC=21;$$
$$AD=\sqrt{9^2+8^2}=\sqrt{145}=12+;$$
$$BC=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{400}=20;$$
$$BD=\sqrt{3^2+21^2}=\sqrt{450}=21+;$$
$$CD=\sqrt{9^2+13^2}=\sqrt{250}=15+.$$



Записи 12+, 21+ и 15+ у Кэрролла указывают на то, что значение соответствующих трех корней чуть больше 12, 21 или 15.

Затем он пишет: «Таким образом, значение суммы расстояний от точки *A* до других точек больше 46 и меньше 47; от точки *B* – больше 54 и меньше 55; от точки *C* – больше 56 и меньше 57, а от точки *D* – больше 48 и меньше 51. (Почему не между 48 и 49? Постарайтесь сами ответить на этот вопрос.) Значит, сумма расстояний от точки *A* минимальна».

или что острые углы прямоугольного треугольника дополняют друг друга до прямого угла. Это позволяет нам утверждать, что все доказательства теоремы Пифагора прямо или косвенно используют пятый постулат о параллельных прямых. Удивительно то, что (принимая во внимание другие постулаты Евклида) сама теорема Пифагора эквивалентна пятому постулату.

Множество математиков на протяжении веков пытались вывести пятый постулат из других четырех, чтобы либо доказать его независимость, либо найти его другие формулировки. Когда этот постулат рассматривается на плоскости, где линии прямые, он интуитивно понятен. Однако, если мы рассмотрим другие пространства, такие как, например, поверхность сферы, где прямые линии представляют собой окружности, то увидим, что там нельзя провести прямую, параллельную данной.

Исходя из этих соображений, замена пятого постулата другими утверждениями, такими как отсутствие параллельных линий или существование нескольких линий, параллельных данной, порождает так называемые неевклидовы геометрии. Эти геометрии представляют не только теоретический интерес, но могут быть использованы для моделирования поверхностей, которые не являются плоскостью с прямыми линиями, например сфер, эллипсоидов или параболоидов.

Теорема Пифагора сегодня

Хотя прошло около 2500 лет с момента ее открытия, теорема Пифагора продолжает применяться в нашей повседневной жизни. Единственным разумным объяснением того, что эта фундаментальная теорема так долго остается актуальной, являются ее многочисленные приложения. Теорема помогает решать задачи в различных областях — от математики до эстетических и художественных проблем в дизайне интерьера. Далее мы рассмотрим некоторые из этих приложений — как в академической сфере, так и в повседневной жизни.

Математические и научные приложения

Теорема Пифагора имеет важное значение для расчета длин, площадей и объемов фигур. Например, диагональ квадрата со стороной x равна $x\sqrt{2}$; диагональ прямоугольника со сторонами x, y — $\sqrt{x^2+y^2}$; диагональ параллелепипеда (представьте себе коробку для обуви) с ребрами x, y, z — $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; у конуса с высотой h и радиусом основания r длина образующей равна $\sqrt{h^2+r^2}$. И этот список можно продолжать до конца книги.

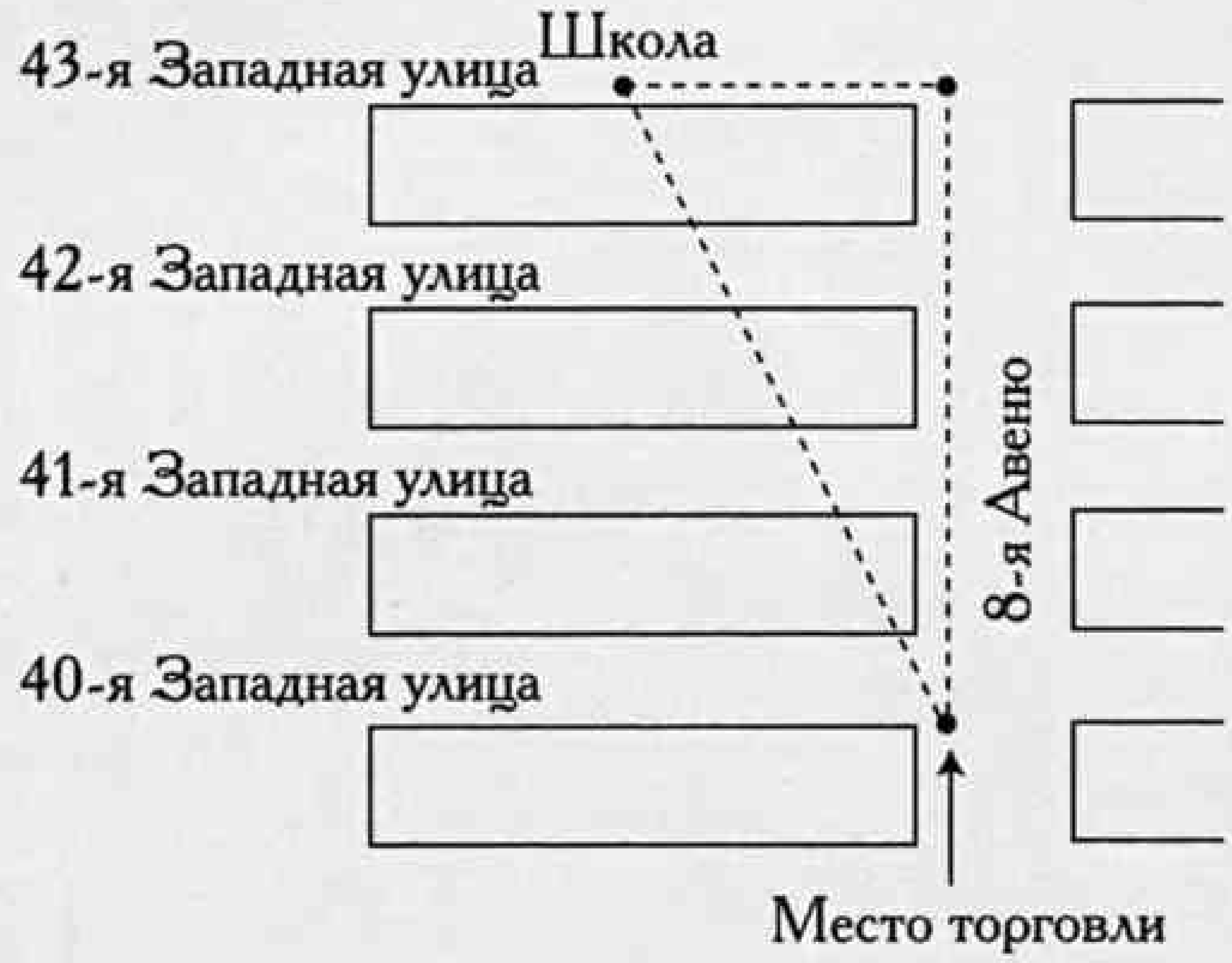
Теорема Пифагора также используется для вычисления расстояния $d(P, Q)$ на плоскости (и в пространстве) между точками с данными декартовыми координатами $P = (x_1, y_1)$ и $Q = (x_2, y_2)$.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА НА УЛИЦАХ ГОРОДОВ

В реальной жизни, чтобы пройти расстояние между двумя точками, не всегда получается воспользоваться прямолинейным маршрутом, ведь человек не может проходить сквозь стены.

Эта проблема особенно актуальна в крупных городах. Определение кратчайшего расстояния важно для составления маршрутов почтовых служб, сборщиков мусора и т. д. Эта задача также лежит в основе градостроительства для установления расстояний между аптеками или между секс-шопами и школами, для расположения медицинских центров и других общественных служб. Проблема определения расстояния в городе иногда приобретает решающее значение в суде.

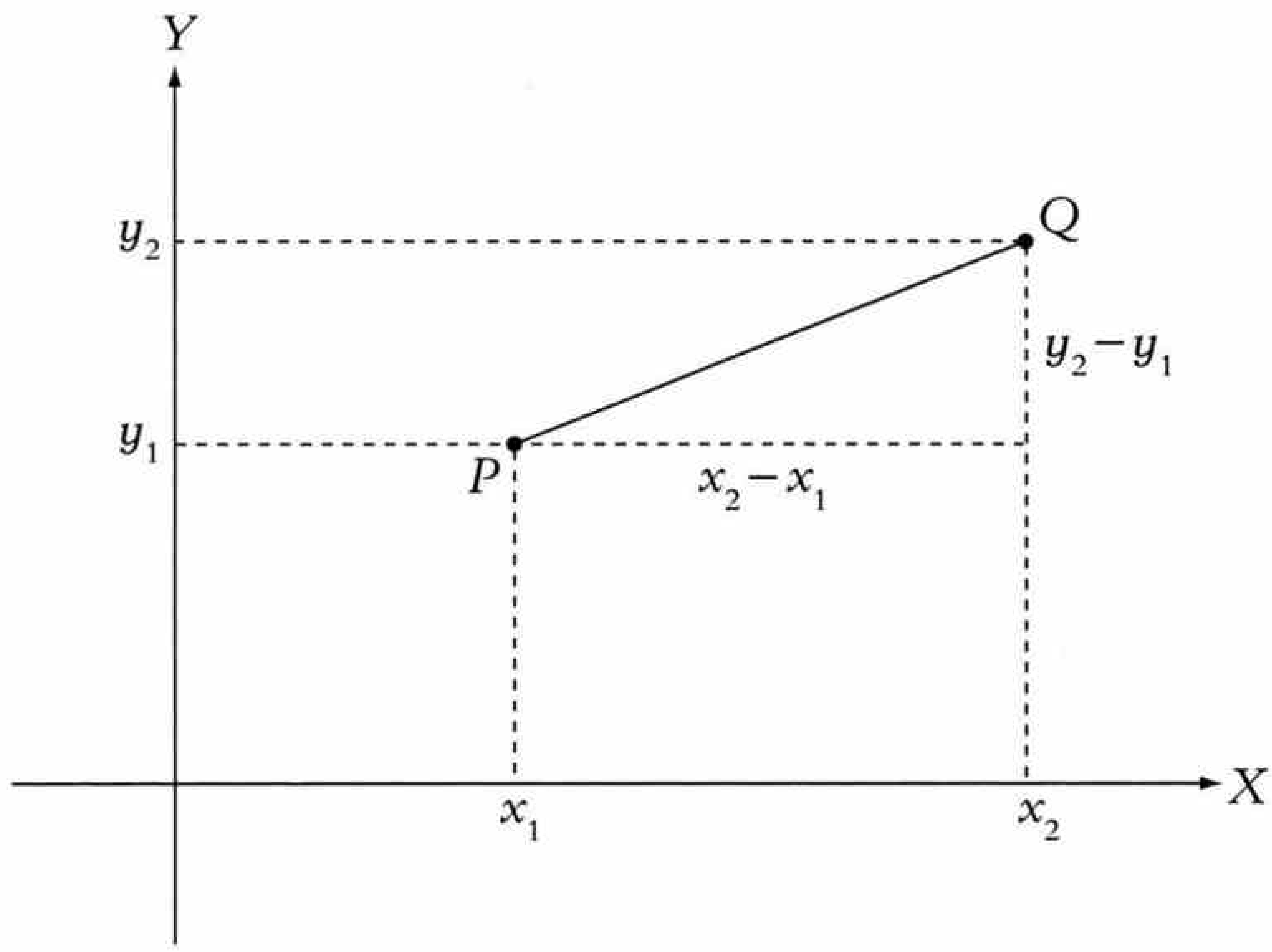
В 2002 г. американский гражданин Джеймс Роблинс был задержан в Манхэттене на углу 8-й Авеню и Западной 40-й улицы. Его обвиняли в торговле наркотиками с отягчающим обстоятельством: он находился на расстоянии менее 1000 шагов от школы Святого Креста, расположенной на 43-й улице, между 8-й и 9-й Авеню.



При подсчете расстояния до школы полиция применила теорему Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, где a = 764 шага (расстояние от места торговли вдоль 8-й Авеню), b = 490 шагов (расстояние до школы по 43-й улице), а гипотенуза c = 907,63 шага. В этом и состояло преступление. Расстояние до школы было менее 1000 шагов!

Но адвокаты заявили, что расстояние должно измеряться так, чтобы человек мог преодолеть его в реальной жизни, не проходя сквозь стены. Таким образом, отягчающего обстоятельства не существует ($a + b$ = 764 шага + 490 шагов = 1254 шага).

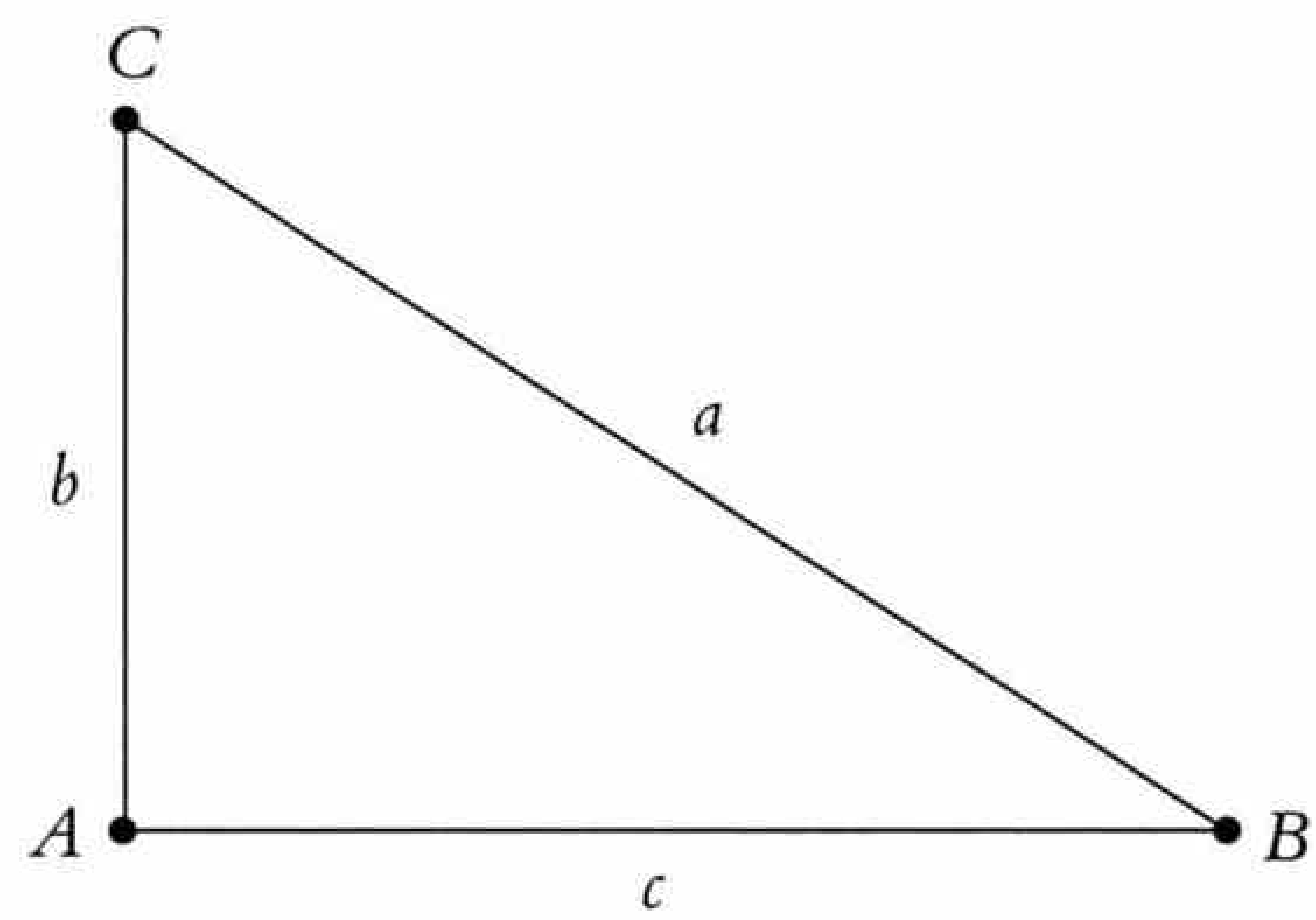
Апелляционный суд вынес решение в пользу полиции. Это означает, что в Нью-Йорке судебная система в настоящее время является «пифагорейской».



Применяя теорему, получаем:

$$\text{расстояние } (P,Q)=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

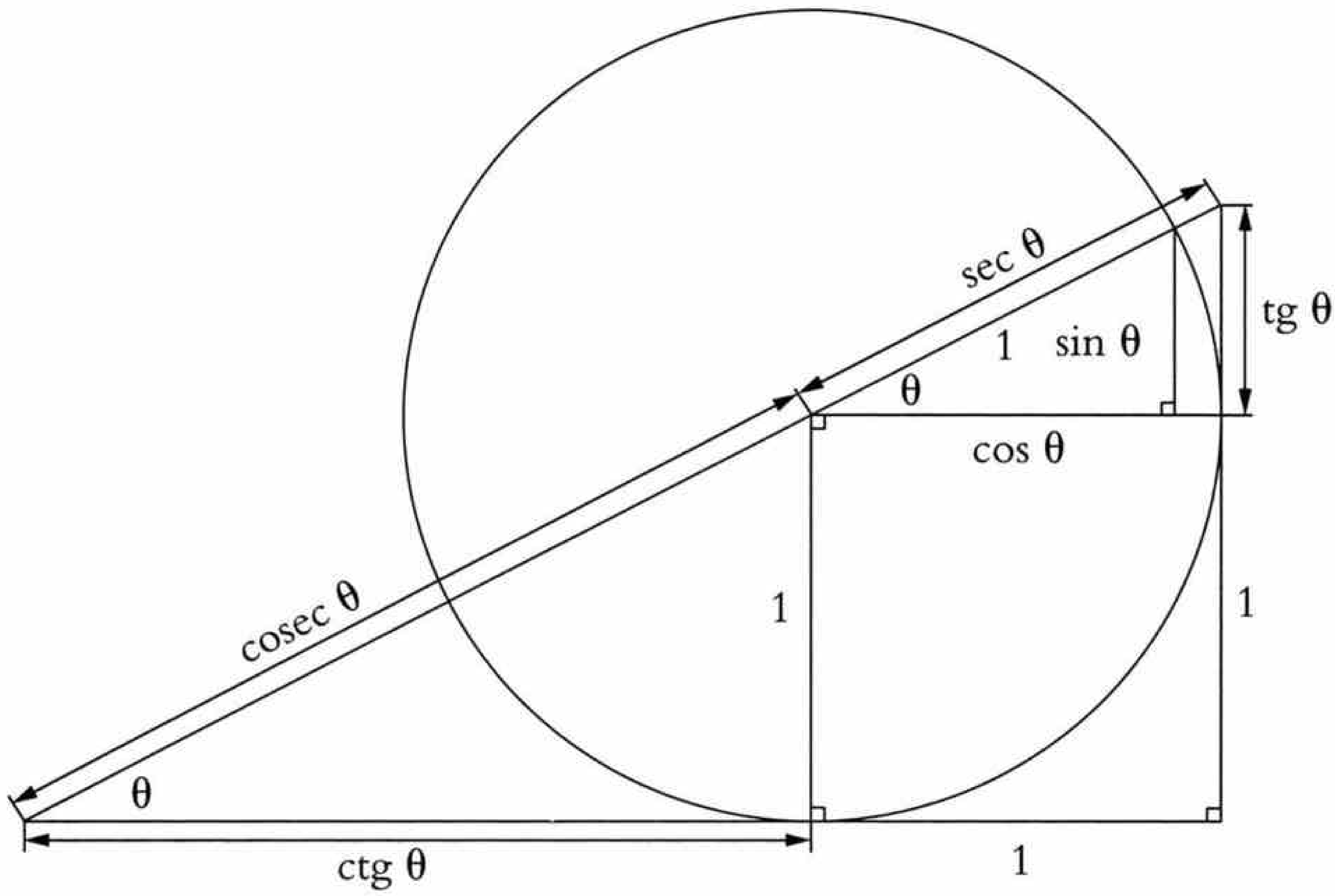
Теорема Пифагора также лежит в основе расчетов, когда используются функции (функциональное исчисление), например, при рассмотрении графика функции $y = f(x)$ в декартовой системе координат. Тригонометрия также не обходится без этой теоремы.



Поскольку углы прямоугольного треугольника связаны с функциями синуса, косинуса, тангенса и т. д., а именно $\sin B=\frac{b}{a}$, $\cos B=\frac{c}{a}$, то теорема Пифагора в тригонометрических терминах записывается как знаменитое соотношение $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$.

В результате теорема Пифагора используется в топографии (рельеф местности), картографии (производство карт), в задачах воздушного или морского судоходства и, конечно, в области архитектуры, инженерии и любых видах человеческой деятельности, которые требуют измерений.

Рассмотрим теперь следующий рисунок:



На нем мы видим круг и прямоугольный треугольник, катеты которого равны синусу и косинусу. Также мы можем видеть отрезки, соответствующие другим тригонометрическим функциям. Например, тангенс, который является отношением синуса к косинусу, а также секанс, равный единице, деленной на косинус; косеканс, равный единице, деленной на синус; котангенс, равный единице, деленной на тангенс. Опять благодаря теореме Пифагора множество прямоугольных треугольников, изображенных на рисунке, позволяет получить ряд интересных уравнений, связывающих эти шесть тригонометрических функций друг с другом.

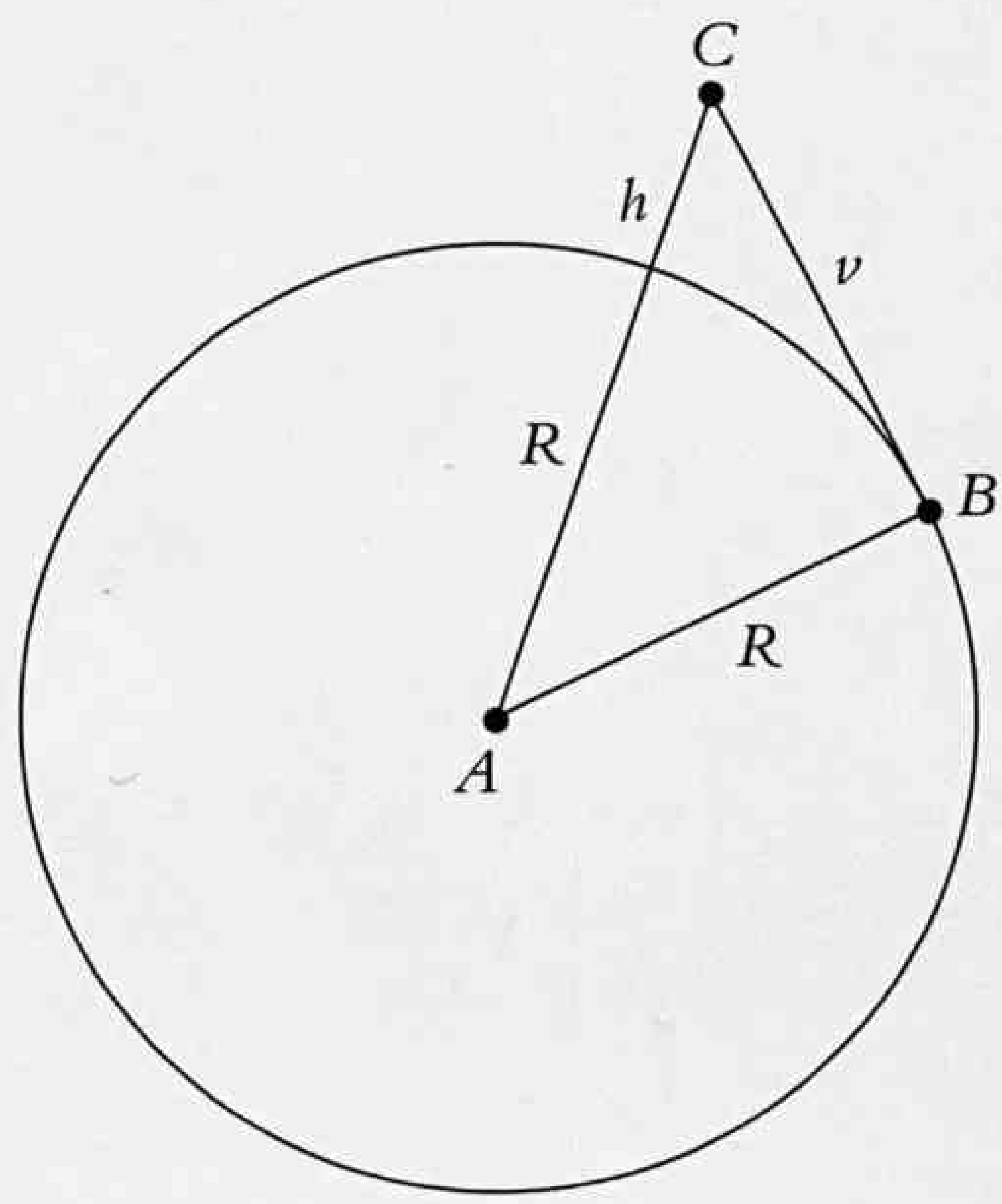
$$\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta,$$
$$\operatorname{ctg}^2 \theta + 1 = \operatorname{cosec}^2 \theta,$$
$$(\operatorname{tg} \theta + 1)^2 + (\operatorname{ctg} \theta + 1)^2 = (\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2.$$

ГДЕ НАХОДИТСЯ ГОРИЗОНТ

Представьте, что вы поднялись на вершину горы и смотрите на раскинувшееся перед вами море. Снизу пляжи с белым песком или волны, разбивающиеся о скалы. А вдали горизонт. Возможно, у вас возникнет вопрос, как далеко он находится. Хотя, пожалуй, пейзаж слишком красив и полностью захватит ваше внимание. Тем не менее для ответа на этот вопрос можно использовать теорему Пифагора. Вам только нужно знать высоту над уровнем моря.

Допустим, что высота горы — 1000 метров.

По теореме Пифагора имеем:



$$(R + h)^2 = R^2 + v^2.$$

Отсюда $v^2 = (R + h)^2 - R^2 = (R^2 + 2Rh + h^2) - R^2 = h^2 + 2Rh = h(h + 2R)$,
где R — радиус Земли.

Так как $2R + h$ приблизительно равно $2R$, потому что расстояние h пренебрежительно мало по сравнению с R, мы имеем:

$$v^2 \approx h \cdot (2R),$$

$$v \approx \sqrt{2Rh}.$$

При R = 6 371 км и h = 1 км получим v = 112,88 км.

Тригонометрия существовала еще в Вавилоне и Египте. Она возникла при расчетах во время астрономических наблюдений. Эти методы затем начали использоваться при решении практических задач в области архитектуры и геодезии, для точных измерений формы, высоты и расстояния. Разделив окружность на 360°, древнегреческий астроном Гиппарх, а позже Клавдий Птолемей и Менелай Александрийский выполняли трудоемкие вычисления длин хорд в круге, соответствующих различным углам.

Индийские и арабские математики также очень интересовались астрономическими расчетами. В поисках лучших инструментов для описания небесной сферы восточные мудрецы разработали свои собственные тригонометрические таблицы.

Выполняя на протяжении веков эту кропотливую работу, они постепенно совершенствовали свои тригонометрические таблицы. Плоды этого труда оказали огромное влияние на многих выдающихся и знаменитых математиков, таких как Леонардо Пизанский, также известный как Фибоначчи (1170–1250), Йоганн Мюллер, или Региомонтан (1436–1476), Франсуа Виет (1540–1603) и Николай Коперник (1473–1543).

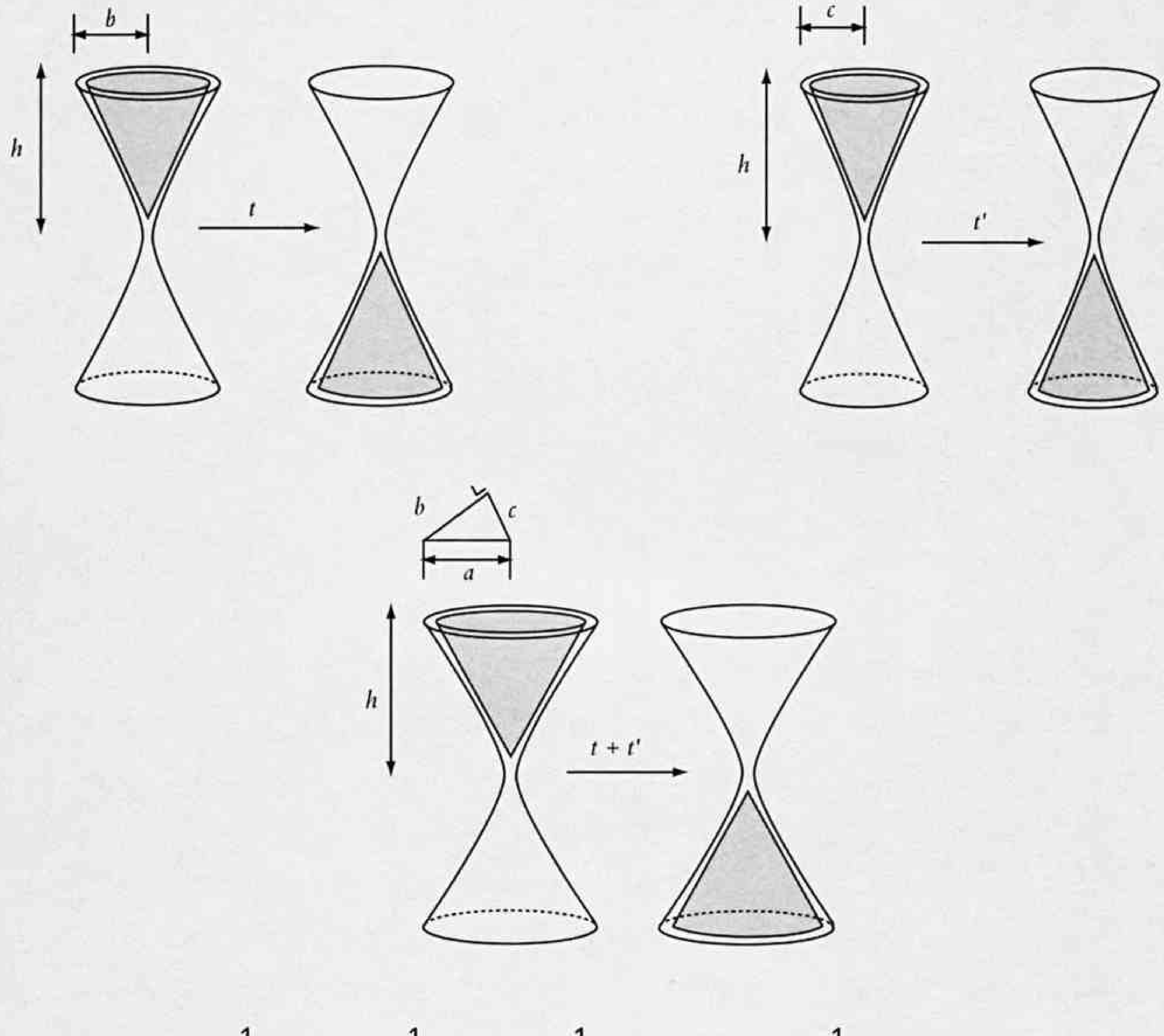
Первое строгое определение тригонометрических функций через отношения сторон прямоугольного треугольника приписывают Георгу Иоахиму фон Ретику (1514–1576), ученику Коперника. Развитие аналитической геометрии произошло гораздо позже, с введением декартовых координат и изучением кривых и функций. Именно тогда функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ стали предметом детального математического исследования.

Тригонометрия развивалась благодаря приложениям геометрии в области архитектуры и геодезии. Американский математик Элиша Скотт Лумис говорила: «Тригонометрия существует потому, что существует теорема Пифагора».

Деление участка земли на треугольники (триангуляция) является основным методом вычисления площадей. Развитие современных технологий лишь подтвердило эффективность этого метода. Любой треугольник всегда можно разделить на два прямоугольных треугольника, и это позволяет вычислять высоту или расстояние на основе измерения определенных сторон и углов. Сравнивая полученные результаты с различными значениями синуса и косинуса, можно заметить очень полезные свойства. Например, $b = a \sin B$. Это означает, что имея значение a и измерив угол B, мы с помощью тригонометрических таблиц найдем значение стороны b. С помощью рулетки и теодолита мы можем измерять длины и углы. Тогда тригонометрические соотношения становятся волшебной палочкой при проведении всех видов технических измерений. На самом деле египетские геодезисты действительно были священниками, и их расчеты земель выглядели почти мистическими действиями, вызывавшими благоговение у фермеров.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕНИ

Теорема Пифагора может быть использована для нахождения суммы площадей, но предположим, что у нас есть двое песочных часов одинаковой высоты и мы хотим сделать другие часы, которые отмеряют отрезок времени, равный сумме периодов первых двух песочных часов. И снова теорема Пифагора позволяет нам сделать это!



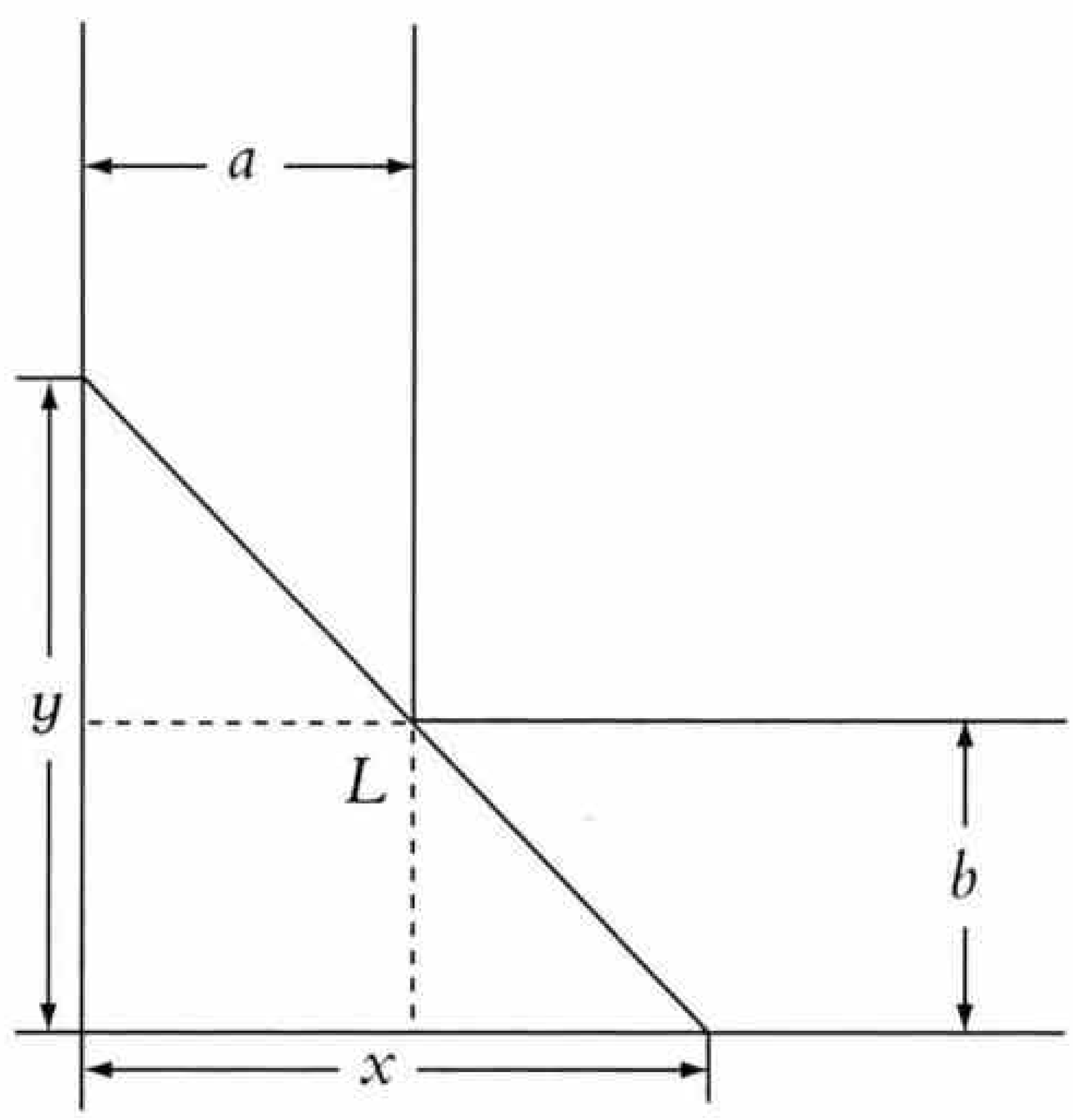
$$v_T = \frac{1}{3}\pi\ b^2\ h + \frac{1}{3}\pi\ c^2\ h = \frac{1}{3}\pi\ h\ \left(b^2 + c^2\right) = \frac{1}{3}\pi\ h\ a^2.$$

Радиус *a* больших песочных часов должен быть гипотенузой треугольника с катетами *b* и *c*, которые являются радиусами первых и вторых песочных часов.

Теорема Пифагора в повседневной жизни

Соотношение Пифагора явно или неявно присутствует в окружающей нас жизни. Например, при установке лестницы или пандуса, при проверке перпендикулярности двух поверхностей, а также при создании моделей, в фотографии и даже при ксерокопировании. Об этом мы расскажем в третьей главе.

Или возьмем проблему, знакомую практически всем. Предположим, мы решили переставить мебель из комнаты в комнату, но поворот в коридоре оказался под прямым углом. Как же нам пронести мебель по такому коридору?



Мебель какого максимального размера можно пронести в этом месте? Как видно на рисунке, ключом к решению этой задачи является уравнение Пифагора $x^2 + y^2 = L^2$. Кроме того, рисунок показывает пропорциональные соотношения:

$$\frac{b}{y} = \frac{(x-a)}{x}.$$

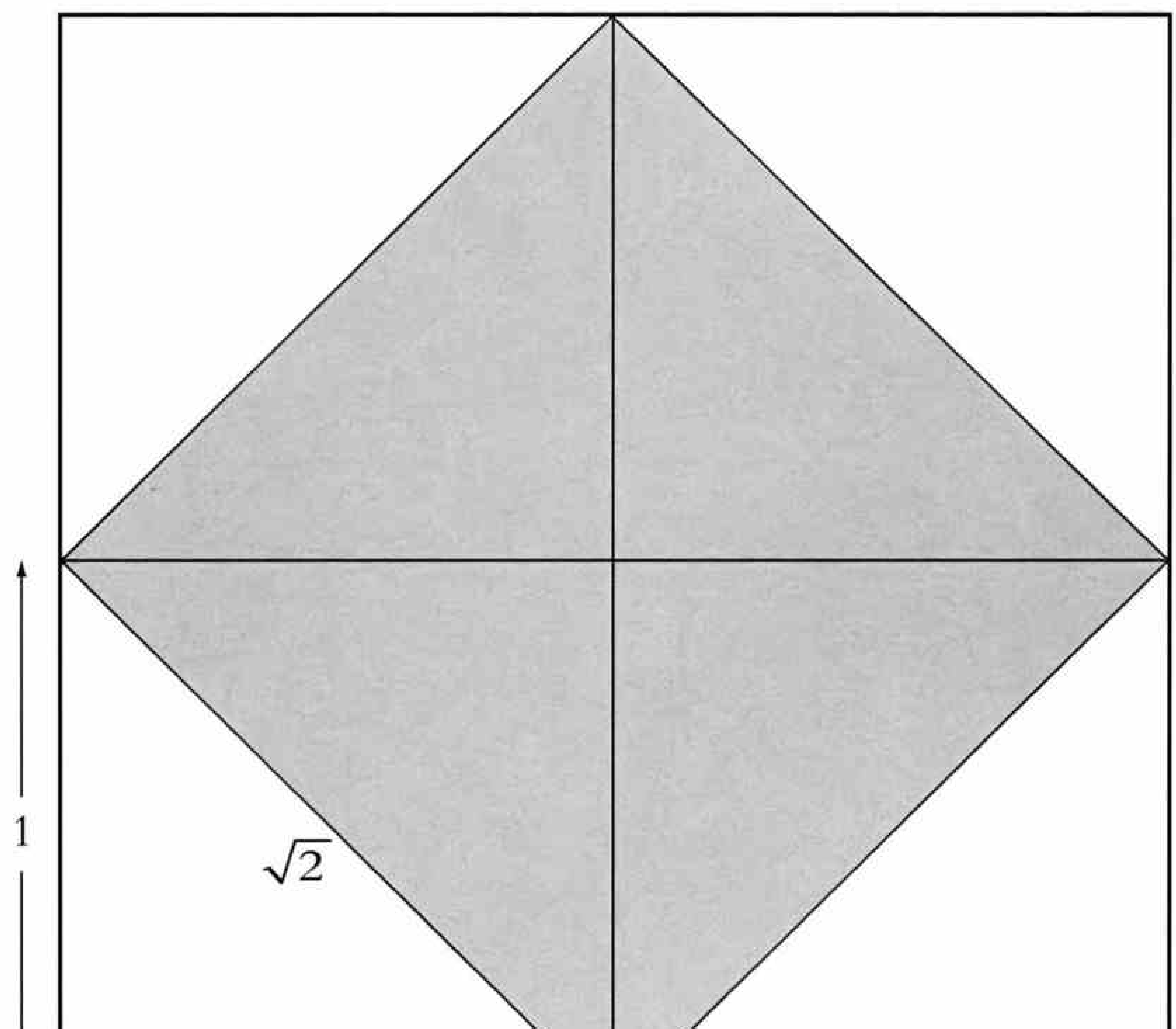
В четвертой главе мы увидим, как при решении таких задач возникают корни чисел.

Глава 3

Открытие числа $\sqrt{2}$

Число является правителем формы и идеи.
Пифагор

Самым первым иррациональным числом в истории математики стало число $\sqrt{2}$. Это открытие оказалось научным событием огромного значения и положило начало многовековому исследованию множества вещественных чисел. Вещественное число является элементом непрерывного множества, например, множества всех точек на прямой линии.

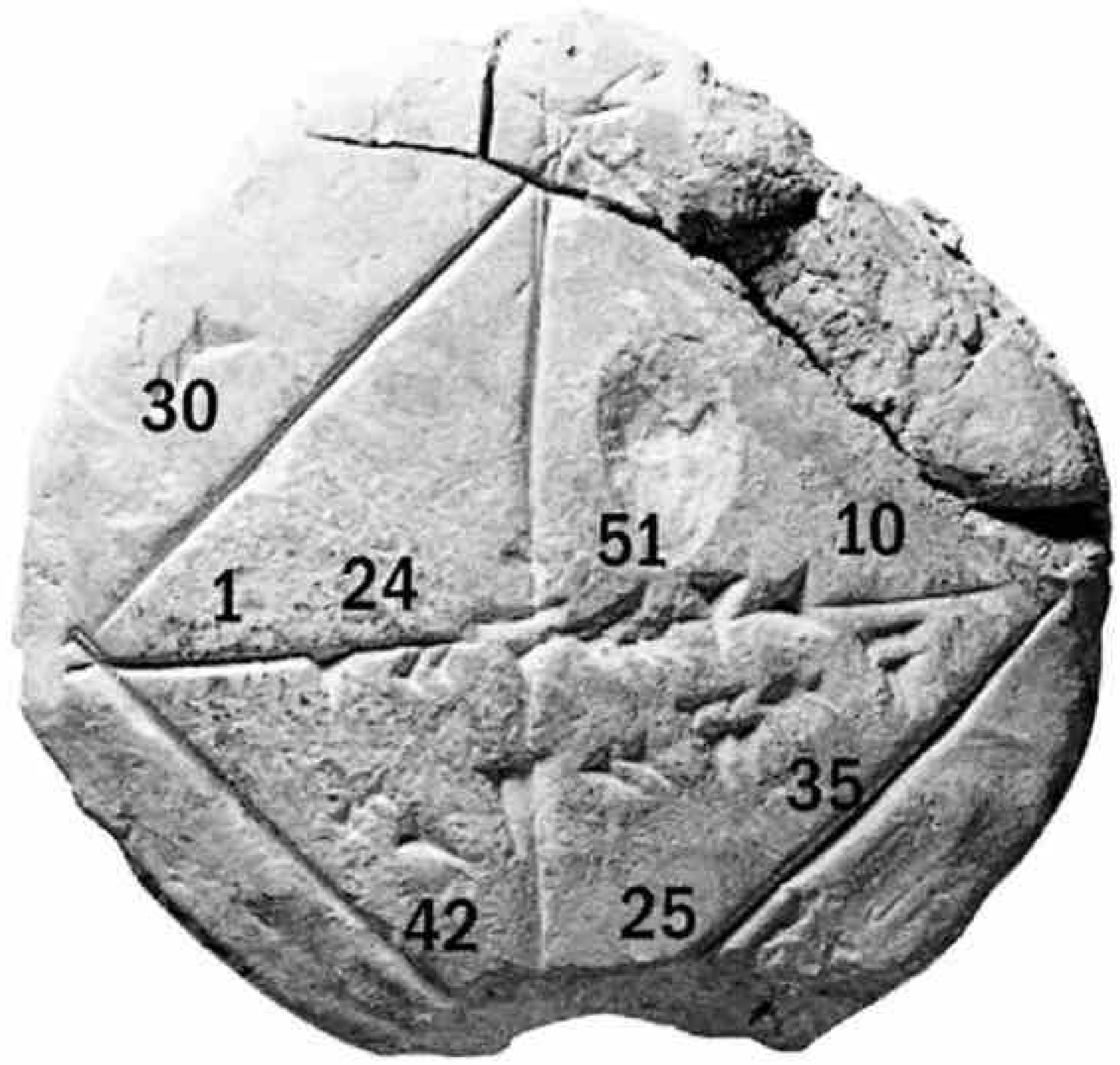


Число $\sqrt{2}$ можно найти с помощью простого квадрата. Возьмем четыре квадрата со стороной 1 и проведем в них четыре диагонали (как показано на рисунке).

Получится еще один внутренний квадрат (серый), площадь которого равна половине площади большого квадрата со стороной 2, составленного из данных четырех квадратов. Площадь большого квадрата равна 4 ($2 \cdot 2$), так что площадь серого квадрата равна 2. Это означает, что произведение его стороны на саму себя должно давать 2. Таким образом, длина стороны равна квадратному корню из 2 (в современных обозначениях $\sqrt{2}$). Кажущаяся простота этой операции противоречит логическим и вычислительным проблемам, которые породили это число.

История числа $\sqrt{2}$ (от 1800 г. до н. э. до наших дней)

В коллекции вавилонских глиняных табличек, хранящихся в Йельском университете, особое значение имеет табличка под номером YBC 7289, потому что достаточно беглого взгляда, чтобы среди клинописных обозначений увидеть знакомую диаграмму.



Этот артефакт датируется периодом 1800—1600 гг. до н. э. и содержит изображение квадрата с двумя диагоналями и рядом чисел в вавилонской шестидесятеричной системе счисления. Ученые выяснили, что эти числа соответствуют $\sqrt{2}$ с точностью до шести знаков после запятой:

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1,41421296.$$

В более поздних древнеиндийских текстах, известных как шульба-сутры (800–200 гг. до н. э.), содержится следующее определение числа $\sqrt{2}$: «...длина стороны увеличивается на треть, а эта треть — на ее четверть, и $1/34$ часть этой части вычитается», что в числах соответствует выражению:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}=\frac{577}{408}\approx 1{,}414215686.$$

Как видим, вавилоняне, индусы и, конечно же, египтяне знали и использовали дроби. Однако использование дробей носило исключительно практический характер. Лишь с развитием древнегреческой математики ученые начали изучать теоретические (и даже философские) аспекты чисел.

Открытие иррационального числа $\sqrt{2}$ приписывают пифагорейской школе, а потому это число неразрывно связано с доказательством теоремы Пифагора. В «Началах» Евклида, которые, как уже говорилось, знаменуют собой апогей развития древнегреческой геометрии, большое внимание уделяется иррациональным величинам.

ИСТОРИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Геометрические задачи о квадратах, прямоугольниках, треугольниках и других фигурах привели к развитию теории квадратных уравнений. Уже в 2000 г. до н. э. в Вавилоне умели решать конкретные уравнения вида $x^2 + x = 3/4$ (табличка BM13901). Пример реальной задачи, которая приводит к этому уравнению, можно сформулировать так: «Если площадь прямоугольника равна 1 ($x \cdot y = 1$), а периметр равен 4 ($2x + 2y = 4$), найти значения x и y...» На найденных в Сузах табличках, например, сравниваются площади и квадраты длин сторон 3-, 4-, 5-, 6- и 7-сторонних правильных многоугольников.

Примерно в 628 г. до н. э. индийский математик Брахмагупта решил уравнение $x^2 - 10x = -9$, описав также метод решения такого рода уравнений. Позднее, в IX в., арабский математик аль-Хорезми, благодаря которому появилась алгебра, решил уравнение $x^2 + 10x = 39$.

Алгебра ввела специальные обозначения вместо многословных описаний, объяснявших, как делать такие вычисления. Лишь во времена древнегреческого математика Диофанта впервые начали применяться сокращения. Алгебраические обозначения и символы, которые мы используем сегодня, не были известны до XV в.

Приближенное значение $\sqrt{2}$ пытались получить с помощью дробей. Аналитические выражения использовались в смелой попытке решать геометрические задачи с помощью арифметики. Следует учитывать, что число $\sqrt{2}$ тесно связано с тригонометрией, так как для угла в $45°$, или $\pi/4$ радиан,

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, методы расчета десятичного значения $\sqrt{2}$ опирались на знания тригонометрических функций синуса и косинуса.

Число $\sqrt{2}$ не только является положительным решением полиномиального уравнения

$$x^2 - 2 = 0,$$

но и, как все квадратные корни, оно может быть корнем квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

решениями которого являются значения

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

равные $\sqrt{2}$ в точке пересечения оси x и параболы $y = ax^2 + bx + c$.

Вычисление $\sqrt{2}$ с помощью дробей

Квадрат со стороной 5 имеет диагональ длиной $5\sqrt{2}$, так как $(5\sqrt{2})^2 = 50$. Это близко к квадрату числа 7, $49 = 7^2$. Отсюда $5\sqrt{2} \approx 7$ или $\sqrt{2} \approx 7/5$.

Поэтому:

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{49}{25}=\frac{50-1}{25}=2-\frac{1}{25}=2-0{,}04.$$

Это показывает, что существует очень небольшая разница между квадратами со стороной $\sqrt{2}$ и со стороной $7/5$.

Дробь $7/5$ является частью ряда

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, ...,$$

который состоит из дробных приближений числа $\sqrt{2}$.

Можно показать, что некоторые дроби из этого ряда дают приблизительное значение снизу, а другие — сверху:

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \sqrt{2} < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

Число $99/70$ дает очень точное приближение:

$$\left(\frac{99}{70}\right)^2 = \frac{9\,801}{4\,900} = \frac{9\,800}{4\,900} + \frac{1}{4\,900} = 2 + \frac{1}{70^2} \text{ и } \frac{99}{70} - \sqrt{2} < 0{,}00025.$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЛА $\sqrt{2}$

Число $\sqrt{2}$ может быть записано с помощью цепной дроби

$$\sqrt{2} = 1 + \left(1/(2 + (1/(2 + ...)\right)$$

или в виде бесконечных произведений:

$$\sqrt{2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{38}\right)\left(1 - \frac{1}{100}\right)...$$

$$\sqrt{2} = \left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\left(\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\right)\left(\frac{14\cdot 14}{13\cdot 15}\right)...$$

$$\sqrt{2} = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)...$$

По формуле Тейлора для тригонометрических функций можно записать:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + ...$$

А с помощью метода Эйлера число $\sqrt{2}$ выражается в виде следующего ряда:

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{15}{64} + \frac{35}{256} + \frac{315}{4\,096} + \frac{693}{16\,384} + ...$$

Но, очевидно, существуют близкие к $\sqrt{2}$ дроби с большими числителем и знаменателем:

$$\frac{3515043237929985687829131076921717644468626388891}{2485510909704211897294695733728148710290930026 29}.$$

Двести миллиардов знаков числа $\sqrt{2}$

Одним из самых популярных алгоритмов вычисления приближенного значения числа $\sqrt{2}$ является так называемый вавилонский метод, который состоит в применении рекуррентной формулы, начиная с натурального числа F_n:

$$F_{n+1} = (F_n + 2/F_n)/2.$$

С помощью этого метода японский математик Ясумаса Канада и его коллеги сумели вычислить 137 438 953 444 десятичных знака числа $\sqrt{2}$. Совсем недавно, в феврале 2007 г., этот рекорд был побит. Японский математик Шигеру Кондо с по-

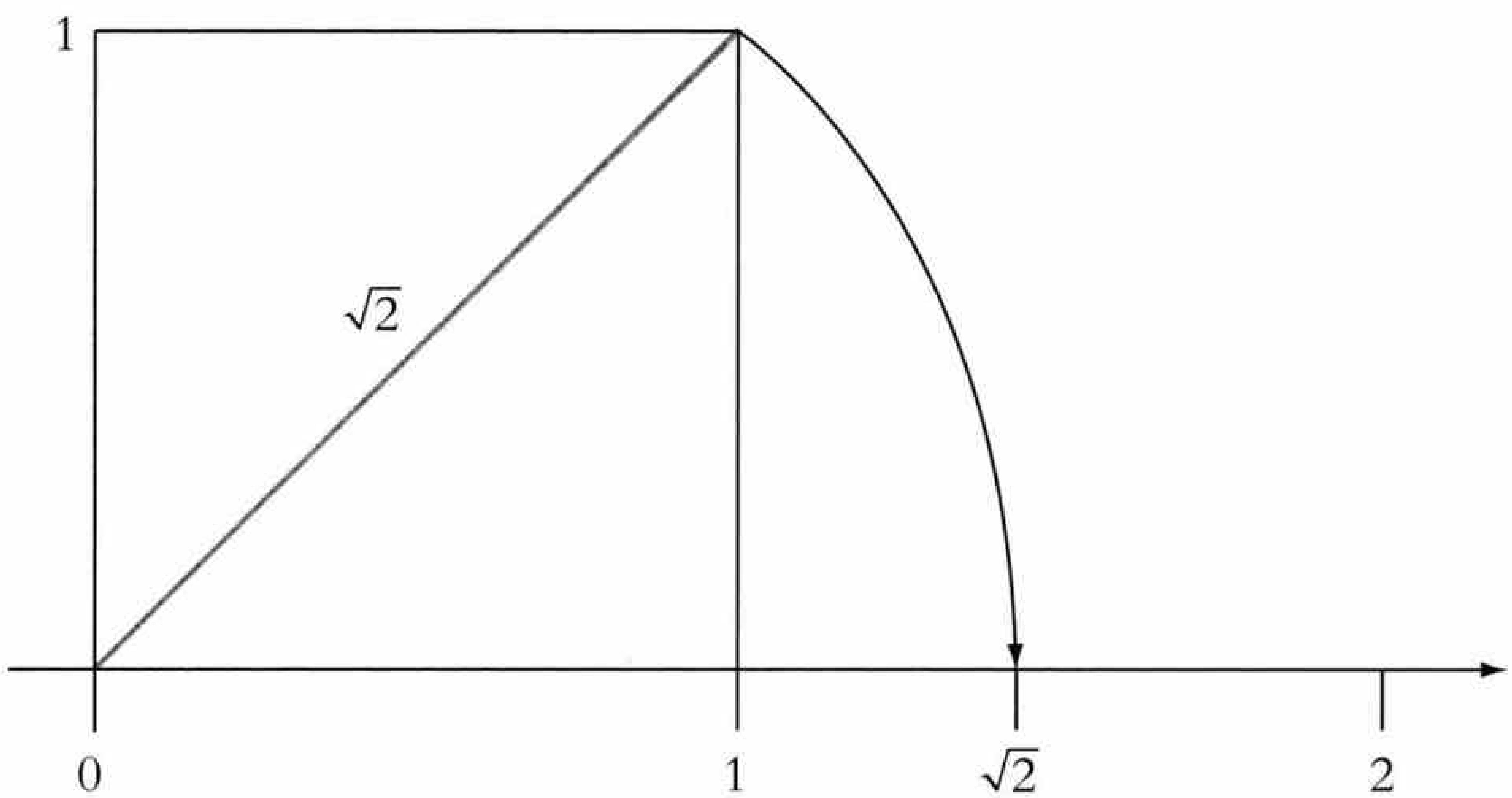
ПЕРВАЯ ТЫСЯЧА ДЕСЯТИЧНЫХ ЗНАКОВ ЧИСЛА $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$= 1, 4142135623 7309504880 1688724209 6980785696 7187537694 8073176679
7379907324 7846210703 8850387534 3276415727 3501384623 0912297024 9248360558
5073721264 4121497099 9358314132 2266592750 5592755799 9505011527 8206057147
0109559971 6059702745 3459686201 4728517418 6408891986 0955232923 0484308714
3214508397 6260362799 5251407989 6872533965 4633180882 9640620615 2583523950
5474575028 7759961729 8355752203 3753185701 1354374603 4084988471 6038689997
0699004815 0305440277 9031645424 7823068492 9369186215 8057846311 1596668713
0130156185 6898723723 5288509264 8612494977 1542183342 0428568606 0146824720
7714358548 7415565706 9677653720 2264854470 1585880162 0758474922 6572260020
8558446652 1458398893 9443709265 9180031138 8246468157 0826301005 9485870400
3186480342 1948972782 9064104507 2636881313 7398552561 1732204024 5091227700
2269411275 7362728049 5738108967 5040183698 6836845072 5799364729 0607629969
4138047565 4823728997 1803268024 7442062926 9124859052 1810044598 4215059112
0249441341 7285314781 0580360337 1077309182 8693147101 7111168391 6581726889
4197587165 8215212822 9518488472.

мощью своего компьютера (3,6 ГГц и 16 ГБ памяти), работавшего в течение 13 дней и 14 часов, получил 200 000 000 000 десятичных знаков числа $\sqrt{2}$. Другим числом, заслужившим столько же внимания, как и $\sqrt{2}$, является число пи.

Такие результаты стали возможны только в эпоху цифровых технологий, так как они получены с помощью компьютеров. Если попытаться напечатать полученные Кондо десятичные знаки на обычных листах бумаги по 30 строчек и 70 знаков в строке на каждой странице (2100 знаков на страницу), то потребуется почти 100 000 000 листов.

Удивительная иррациональность числа $\sqrt{2}$



Пифагорейцы обнаружили множество связей между природой и математикой. Например, они выяснили, что гармоничные соотношения между нотами соответствуют отношениям целых чисел. Исходя из этого, они начали искать числовые пропорции во всех явлениях природы, убежденные в том, что саму реальность можно описать в числах. Все есть число, утверждали они.

Пифагорейские математики считали, что две величины соизмеримы, если они кратны третьей, то есть если существует общее число, позволяющее этим двум величинам иметь целое число частей. Другими словами, пифагорейцы придерживались непоколебимого принципа, что все числа могут быть записаны как отношения целых чисел. Все здание пифагорейской математики было построено на этом, вот почему они стремились применить этот принцип ко всей Вселенной, чтобы описать ее с помощью чисел.

Однажды Гиппас из Метапонта, видный член секты Пифагора, решил применить теорему своего учителя, чтобы вычислить диагональ квадрата. Для древних греков квадраты были очень простыми фигурами, но, как ни странно, Гиппас не знал никого, кто попытался бы вычислить диагональ квадрата и посмотреть, как этот результат будет полезен для великого здания математики.

Как истинный последователь Пифагора, Гиппас искал универсальное доказательство и для простоты взял длину стороны квадрата, равную 1. Метод вычисления был прост. Квадрат разбивался на два треугольника, и затем применялась теорема учителя для вычисления гипотенузы. Ответом оказалось число $\sqrt{2}$ — решение, полностью разрушившее основной принцип пифагорейцев: ведь это число нельзя было представить в виде дроби.

Во-первых, это означало, что гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника несоизмерима с другими его сторонами. А именно, у прямоугольного треугольника с катетами, равными 1, гипотенуза равна $\sqrt{2}$ и является иррациональным числом. Кроме того, это разделило геометрические величины и числовые величины, которые с тех пор приходилось рассматривать как разные сущности. Открытие Гиппаса разрушило чудесную пифагорейскую идею о гармонии чисел.

Легенда гласит, что заключение Гиппаса не сразу стало проблемой, потому что пифагорейцы решили спорный вопрос, выбросив неугодного математика за борт корабля.

Давайте более подробно остановимся на этой задаче. По теореме Пифагора в квадрате со стороной 1 квадрат диагонали должен равняться 2 и, следовательно, длина диагонали d должна быть числом, которое при умножении само на себя дает 2 (то есть $d^2 = 2$). Другими словами, появляется число $\sqrt{2}$.

Это число было длиной отрезка, который может быть легко построен с помощью линейки и циркуля. Таким образом, можно было предположить, что сторона (1) и диагональ ($\sqrt{2}$) квадрата могут быть измерены с помощью единицы длины u, которая меньше 1. Разве не логично было предположить, что сторона и диагональ квадрата соизмеримы? Конечно, логично. Однако сторона и диагональ квадрата соизмеримыми не были.

Чтобы доказать соизмеримость, надо для единицы длины u найти целое число повторений n, чтобы получить длину стороны квадрата $1 = nu$. Также надо найти целое число повторений m, чтобы получить длину диагонали $\sqrt{2} = mu$. Другими словами:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}.$$

Таким образом, задача соизмеримости чисел 1 и $\sqrt{2}$ была сведена к вопросу существования дроби m/n, числитель и знаменатель которой являются положительными несоизмеримыми целыми числами.

По мнению некоторых историков, еще в 800—500 гг. до н. э. в индийских шульба-сутрах отмечается тот факт, что сторона квадрата и его диагональ не являются соизмеримыми числами. Неизвестно, что случилось с автором этого открытия, но по легенде, именно Гиппас из Метапонта заплатил высокую цену за свое любопытство и математическую интуицию.

ПРОПОРЦИЯ КОРДОВЫ

Когда архитектор Рафаэль де ла Ос (1924—2000) сравнивал пропорции Кордовской соборной мечети с пропорциями других арабских архитектурных памятников, он обнаружил, к своему удивлению, повторяющееся число $1/\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (или 1,3065).

Архитектор назвал это число «пропорцией Кордовы». Оно представляет собой отношение радиуса круга к длине стороны правильного вписанного восьмиугольника. Как известно, ислам отвергает иконы, но это не означает запрет на все изображения. В мусульманской символике божественное представлено квадратом. Таким образом, в украшениях куполов и фасадов часто встречается правильный восьмиугольник, который получается разворотом двух равновеликих квадратов.

Пропорция Кордовы присутствует во всех таких изображениях.

Восьмиугольное основание купола Кордовской соборной мечети. Пропорция Кордовы является отношением стороны этого восьмиугольника и радиуса описанной окружности.

Первое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$

Еще во времена древних греков было найдено красивое доказательство того, что число $\sqrt{2}$ не может быть выражено в виде дроби. Платон использовал метод доказательства от противного:

> «Если число $\sqrt{2}$ может быть выражено в виде дроби, то мы можем записать его в виде отношения двух целых чисел a и b, а именно: $\sqrt{2} = a/b$, причем a и b не имеют общих множителей. Возводя обе части равенства в квадрат, получим $2b^2 = a^2$. Учитывая, что левая часть выражения четная ($2b^2$ делится на 2), a^2 должно делиться на 2, что возможно только тогда, когда число a — четное, то есть его можно записать в виде $a = 2c$. Поэтому $2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$, то есть $b^2 = 2c^2$. Так как число $2c^2$ четное, то b^2, а следовательно, и b тоже должно делиться на 2. Но с самого начала мы предположили, что a и b не имеют общих множителей, поэтому a и b не могут быть четными одновременно. Это противоречие доказывает невозможность представления $\sqrt{2}$ в виде дроби».

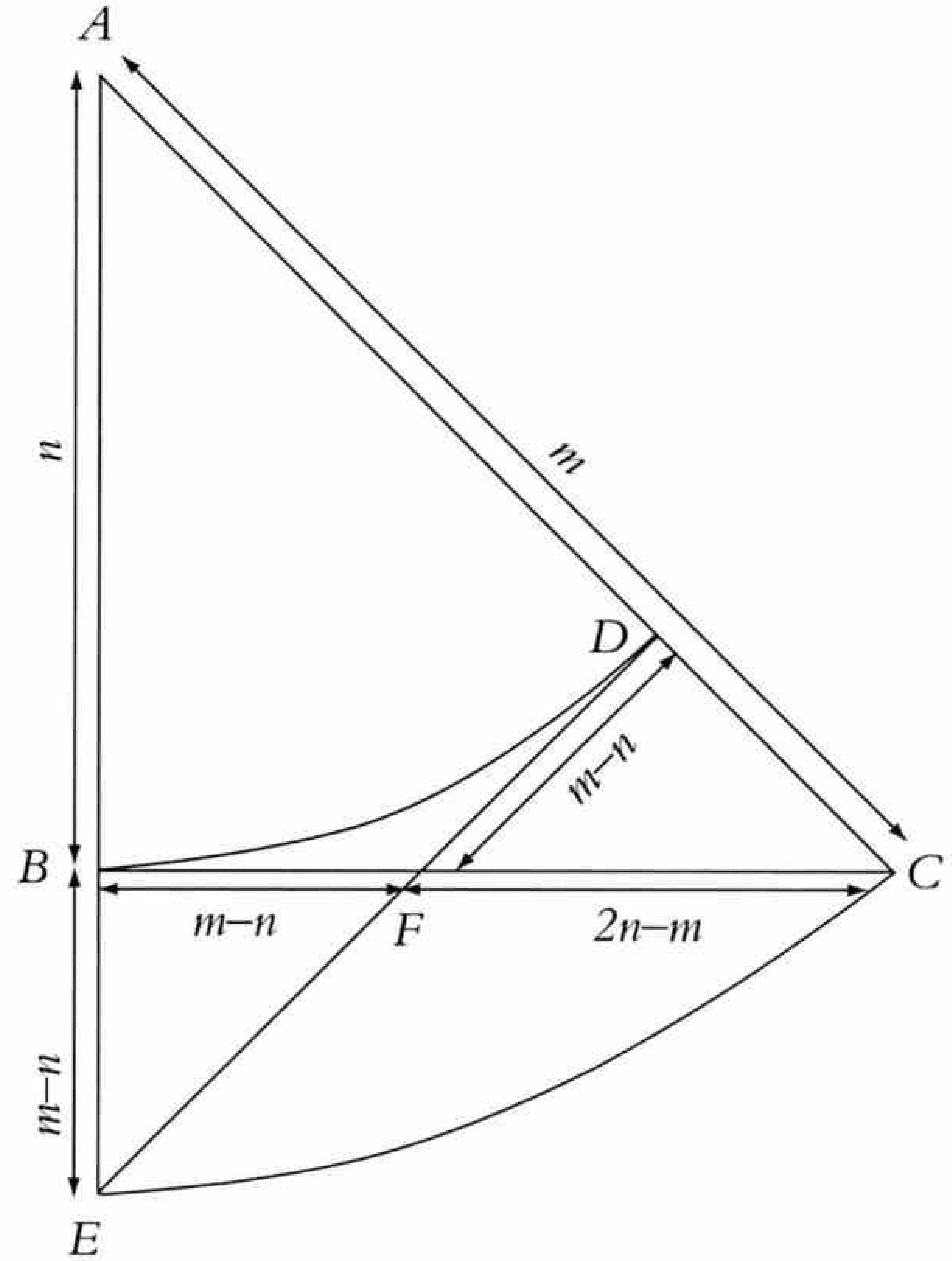
Другие доказательства иррациональности

Существует множество доказательств иррациональности числа $\sqrt{2}$. Мы приведем несколько самых интересных.

ПОЧЕМУ КАСТРЮЛИ НЕ КВАДРАТНЫЕ

Кастрюли имеют форму цилиндра. Вы никогда не увидите кастрюль в виде призмы с квадратным основанием. Сразу было очевидно, что круг является наиболее подходящей формой. Так как он не имеет углов, содержимое кастрюли легко перемешивать и такие кастрюли удобно чистить. С другой стороны, круглое основание позволяет теплу распределяться равномерно. Но если подумать, существует еще одно менее очевидное, но более важное объяснение. У кастрюль в форме цилиндра крышка не может упасть внутрь. И хотя в это трудно поверить, мы прибегнем к числу $\sqrt{2}$ для доказательства этого утверждения. Например, если бы основание кастрюли представляло собой квадрат со стороной 20 см, то его диагональ составила бы $20\sqrt{2}$ см, или 28,28 см. Крышка со стороной 20 см (и даже больше, например 22) неизбежно время от времени падала бы в кастрюлю, ведь длина ее стороны меньше длины диагонали кастрюли. В цилиндрических кастрюлях такое невозможно.

Геометрическое доказательство



Если бы число $\sqrt{2} > 1$ было дробью m/n, где m и n наименьшие (не имеющие общих множителей) целые числа, то соотношение $m^2 = 2n^2$ означало бы, что существует прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с катетами n и гипотенузой m. Как показано на рисунке, дуги BD, EC и отрезки DE и BE построены с помощью циркуля и линейки. Так как треугольник EBF равнобедренный и $BE = FB = m - n$, то $FC = FE = n - (m - n) = 2n - m$. Тогда получается треугольник EBF со сторонами, меньшими, чем те, с которых мы начали, что позволяет выразить число $\sqrt{2}$ как $(2n - m)/(m - n)$. Это противоречит тому, что m и n были наименьшими числами в выражении числа $\sqrt{2}$.

Доказательство с разложением на простые множители

Если число $\sqrt{2} = m / n$ выражено в виде дроби с целыми m, n, не имеющими общих делителей, то возводя в квадрат и избавляясь от квадратного корня, мы имеем $m^2 = 2n^2$. Записав m и n в виде произведения степеней простых чисел, мы получим, что число $2n^2$ всегда будет четным. Это означает, что m^2 тоже должно делиться на 2. Это противоречит тому, что мы начали с чисел, не имеющих общих делителей, то есть хотя бы одно из них должно быть нечетным.

Доказательство с помощью дробей (Миклош Лацкович)

Если число $\sqrt{2} = m/n$ выражено в виде дроби с наименьшими целыми m, n, не имеющими общих делителей, то $m^2 = 2n^2$, где $m > n$ и $n > m - n$. Следовательно (возвращаясь к геометрическому доказательству):

$$\frac{2n-m}{m-n} = \frac{\frac{2n-m}{n}}{\frac{m-n}{n}} = \frac{2-\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}-1}.$$

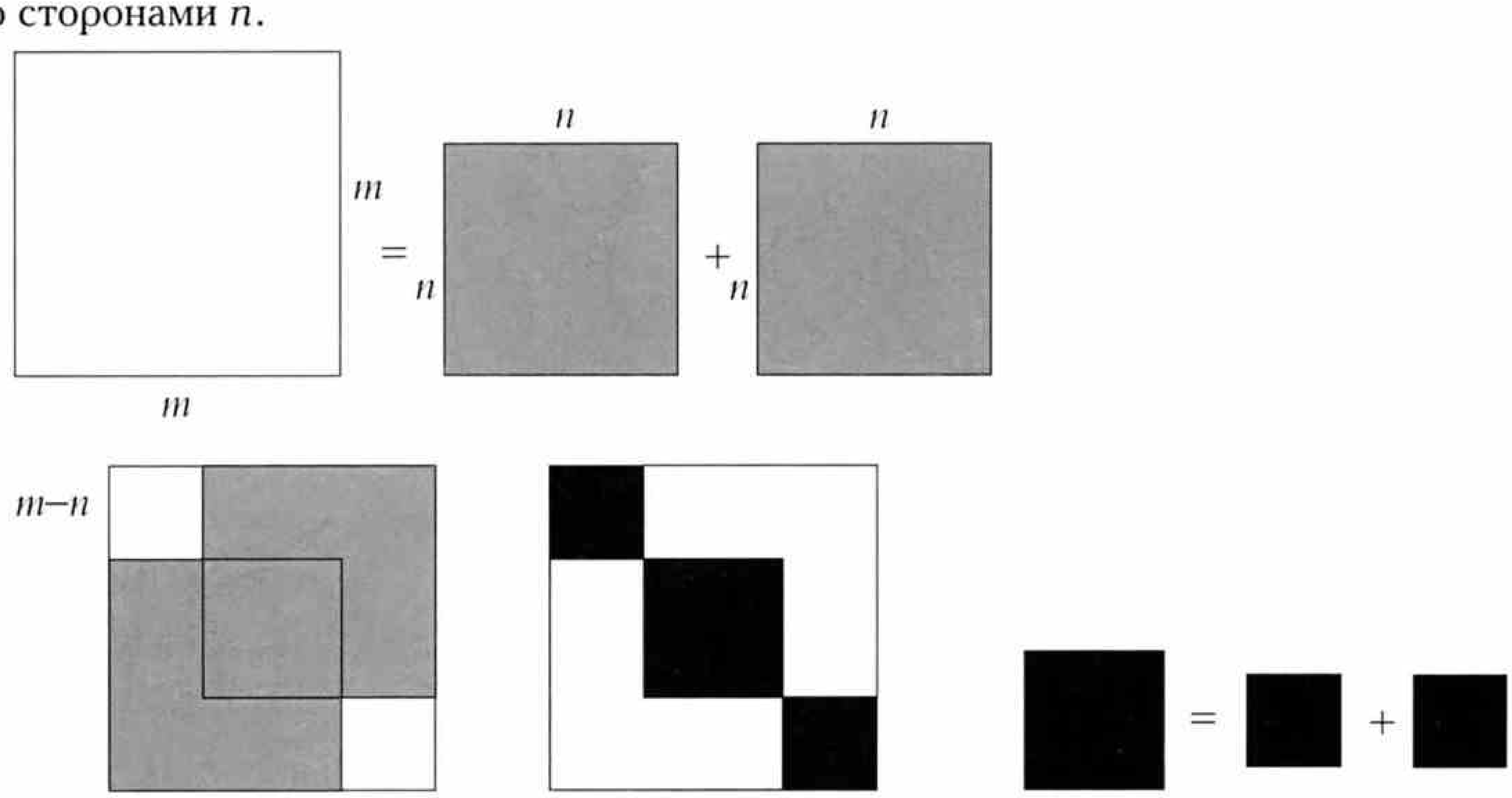
Так как $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, то $\frac{2-\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$. Упрощая это выражение, получим:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}.$$

Таким образом, мы выразили число $\sqrt{2}$ как отношение целых чисел, меньших, чем те, с которых мы начинали, что является противоречием.

Гениальное графическое доказательство (Александр Ган)

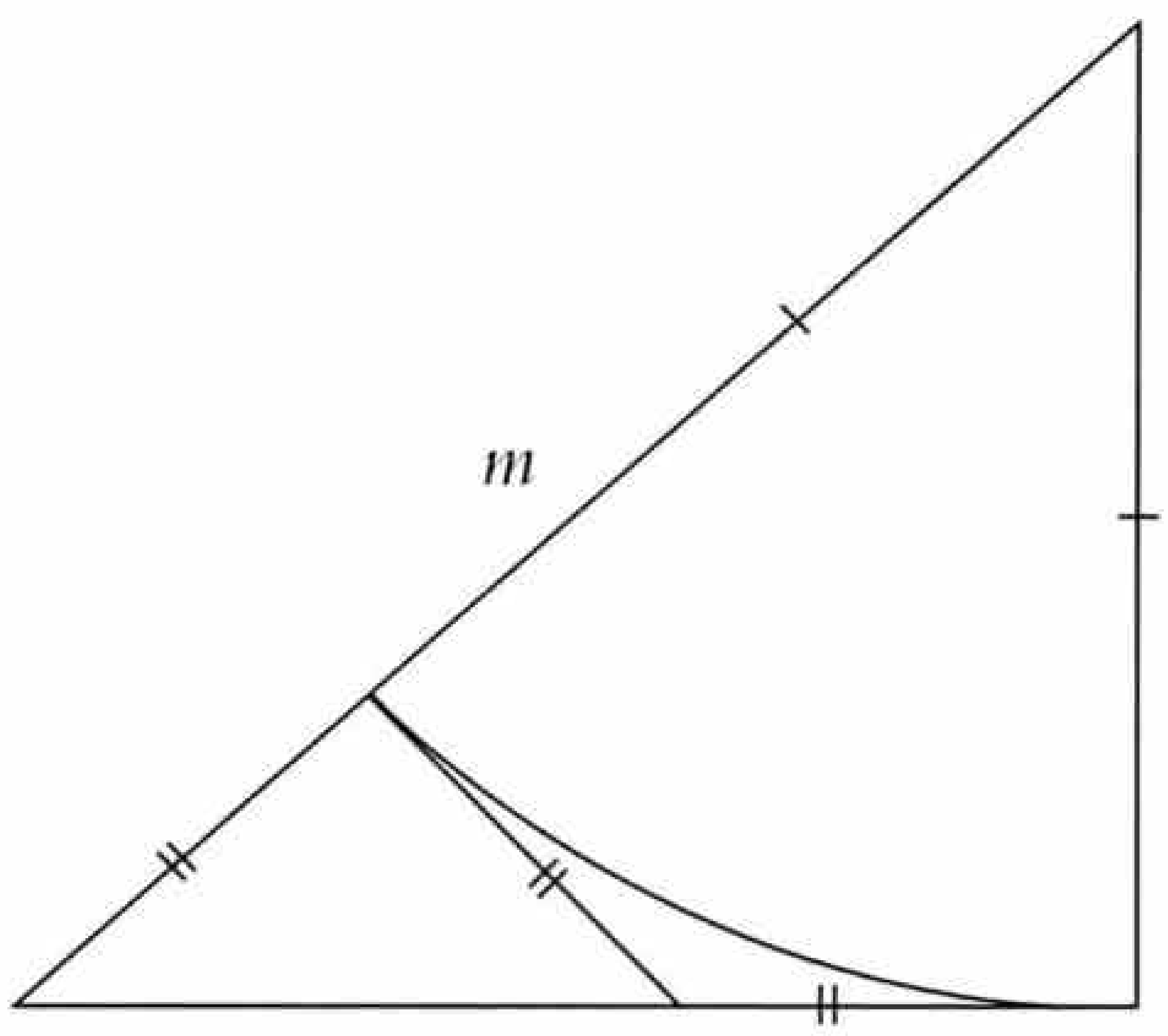
Если бы число $\sqrt{2}$ было дробью, то m/n давало бы $m^2 = 2n^2$, то есть площадь белого квадрата со стороной m равнялась бы сумме площадей двух серых квадратов со сторонами n.



Если серые квадраты расположить в противоположных углах белого квадрата, то их пересечение даст новый квадрат со стороной $m - 2(m - n) = 2n - m$, площадь которого должна равняться сумме площадей двух черных квадратов рядом с ним со стороной $m - n$. Таким образом, $(2n - m)^2 = 2(m - n)^2$. То есть число $\sqrt{2}$ может быть выражено в виде отношения $(2n - m)/(m - n)$ целых чисел, меньших, чем m и n, которые уже являлись наименьшими! Мы получили противоречие.

Доказательство с помощью треугольников (Том Апостол)

Это доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$ было получено в 2000 г. Его автор — математик Том Апостол, специалист по теории чисел.

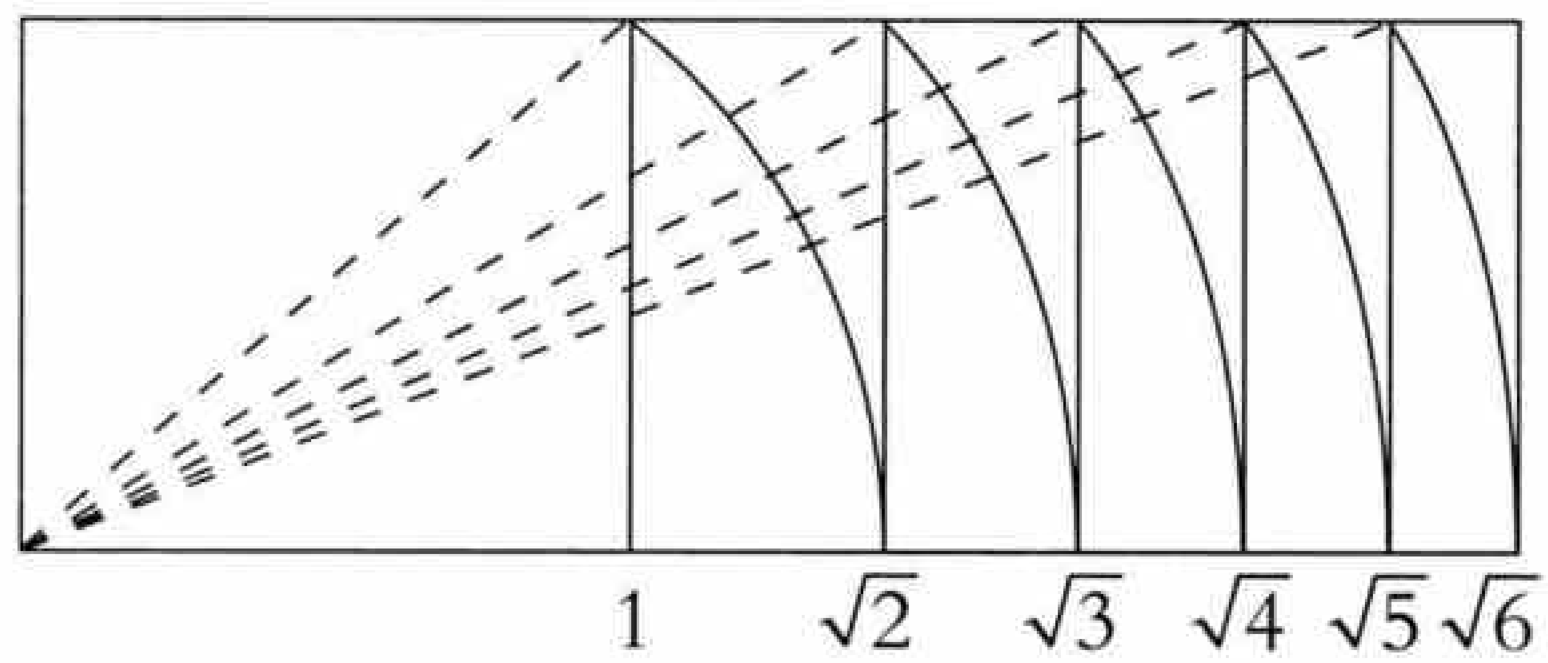


В самом маленьком прямоугольном треугольнике с целыми сторонами m, n, n, где $m^2 = 2n^2$, содержится другой, меньший треугольник с целыми сторонами. Это противоречит «наименьшим» значениям длин сторон, как предполагалось вначале.

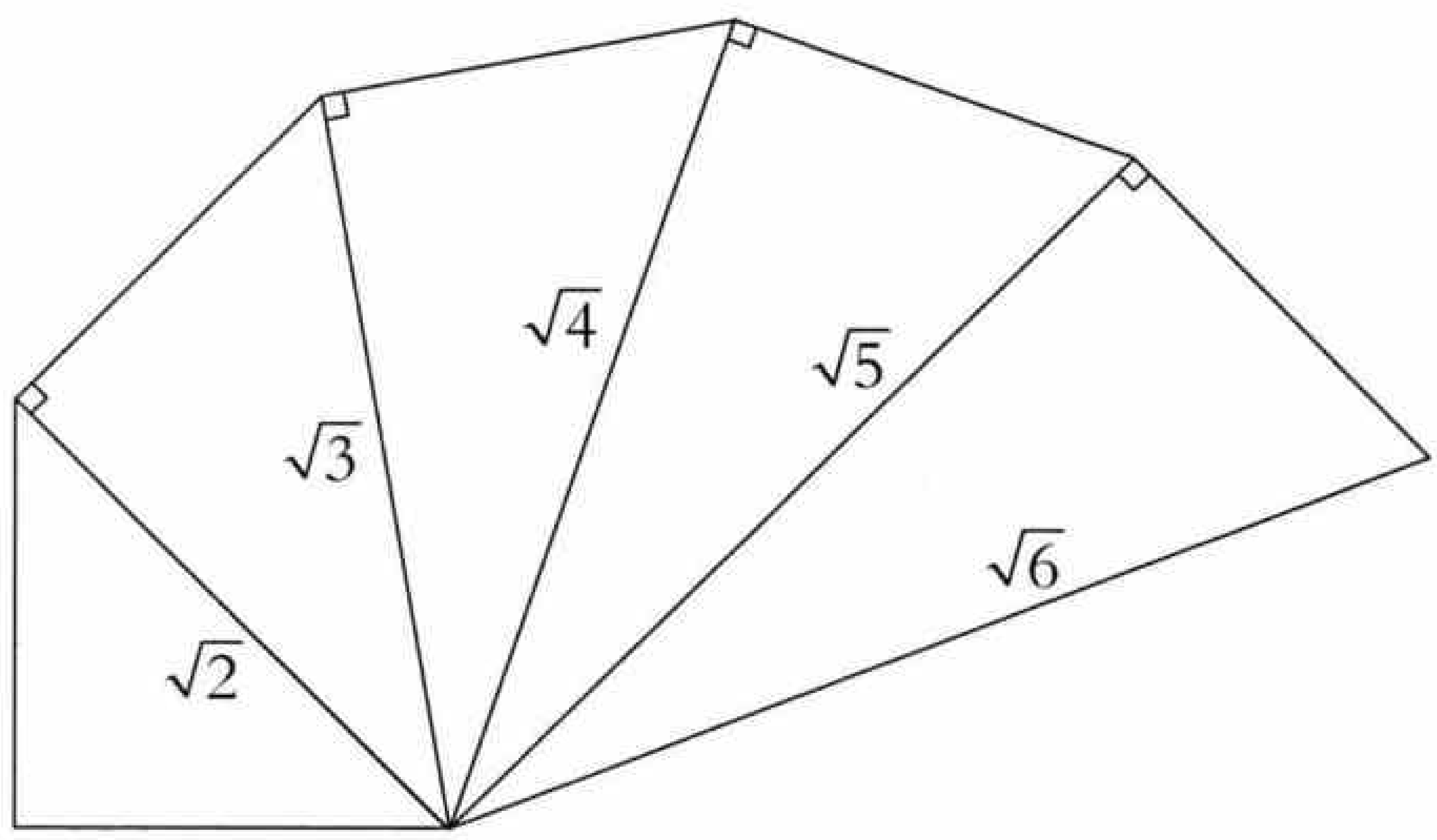
ПРОБЛЕМА $2^{\sqrt{2}}$

На Международном конгрессе математиков, состоявшемся в Париже в 1900 г., знаменитый немецкий математик Давид Гильберт определил границы современной математики и призвал своих коллег разрушить эти барьеры. Гильберт предложил список из 23 нерешенных проблем, которые, по его мнению, имели первостепенное значение. Среди них была и Великая теорема Ферма, а также упоминалось число $\sqrt{2}$. Задача формулировалась так: является ли $2^{\sqrt{2}}$ трансцендентным числом? (Трансцендентное число – это число, которое не может быть решением полиномиального уравнения с целыми коэффициентами.) Гильберт предполагал, что число $2^{\sqrt{2}}$ трансцендентно. В 1930 г., тридцать лет спустя, это было доказано.

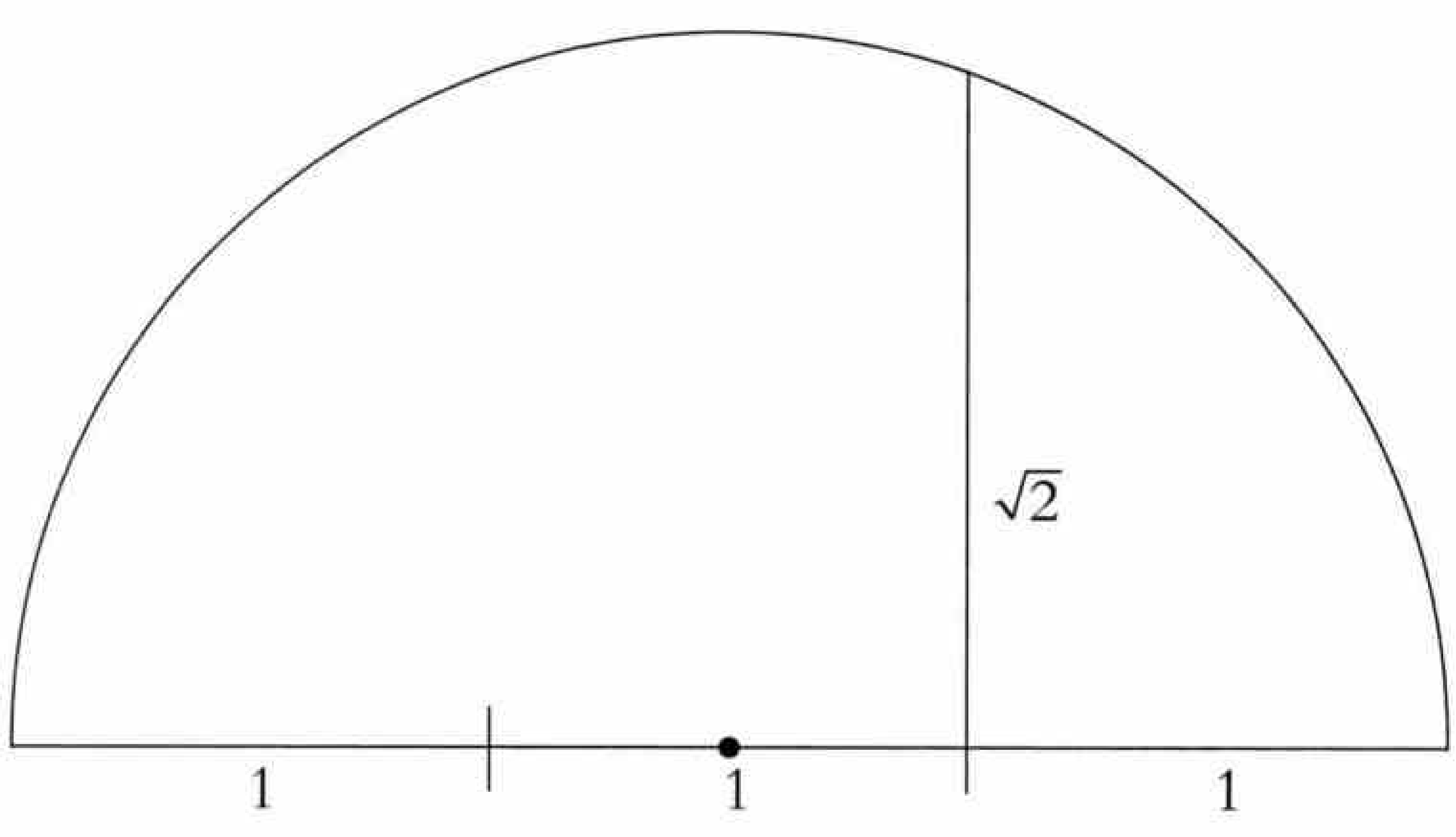
Геометрические представления числа $\sqrt{2}$



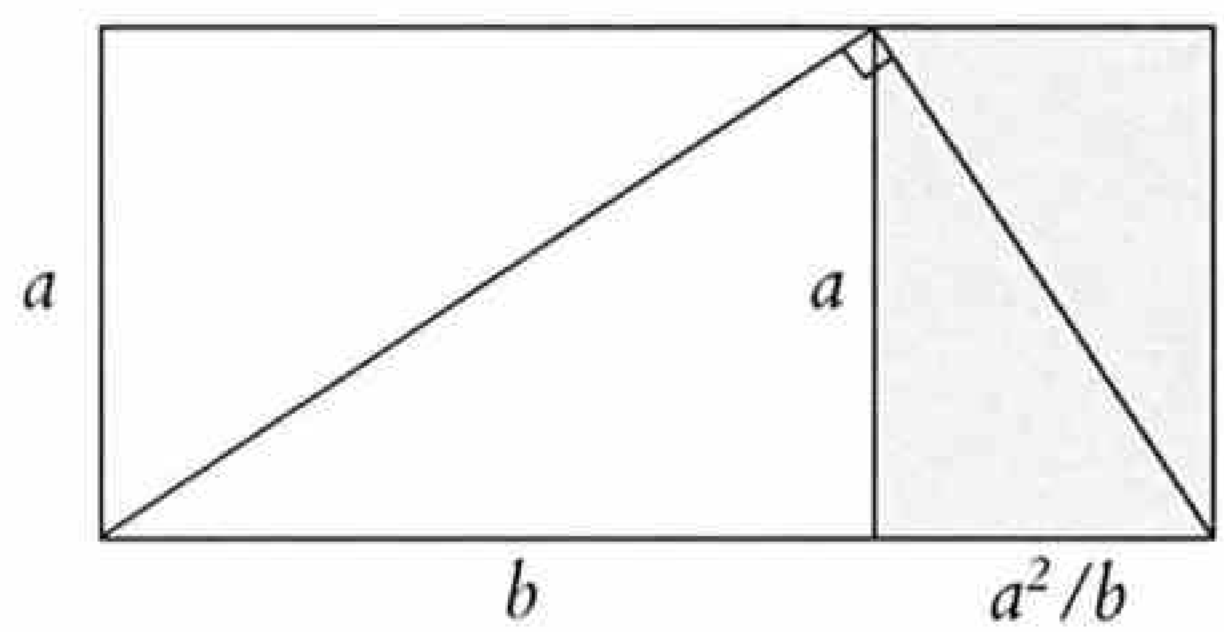
Первым геометрическим представлением числа $\sqrt{2}$ является диагональ квадрата со стороной 1. Тогда с помощью циркуля и линейки можно построить прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{2}$, диагональ которого равна $\sqrt{3}$. Таким образом, можно последовательно построить отрезки $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$... Ряд этих отрезков можно представить графически в виде спиральной фигуры.



Число $\sqrt{2}$ можно также изобразить с помощью окружностей. Проведем полукруг диаметром 3 и в точке на расстоянии 2 единицы от левого конца диаметра построим перпендикуляр, длина которого будет равна $\sqrt{2}$.



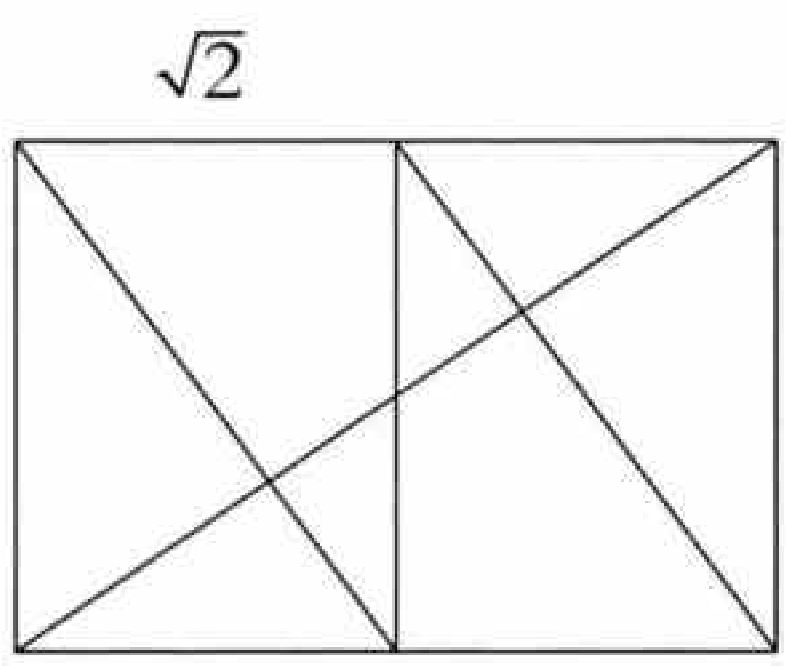
В любом заданном прямоугольнике со сторонами a и b всегда можно провести диагональ. Проведя затем перпендикуляр к этой диагонали в одной из вершин, можно построить так называемый дополнительный прямоугольник. Этот новый прямоугольник — той же формы, что и исходный, и имеет с ним общую сторону. Таким образом, соотношение его сторон a и a^2/b то же самое:

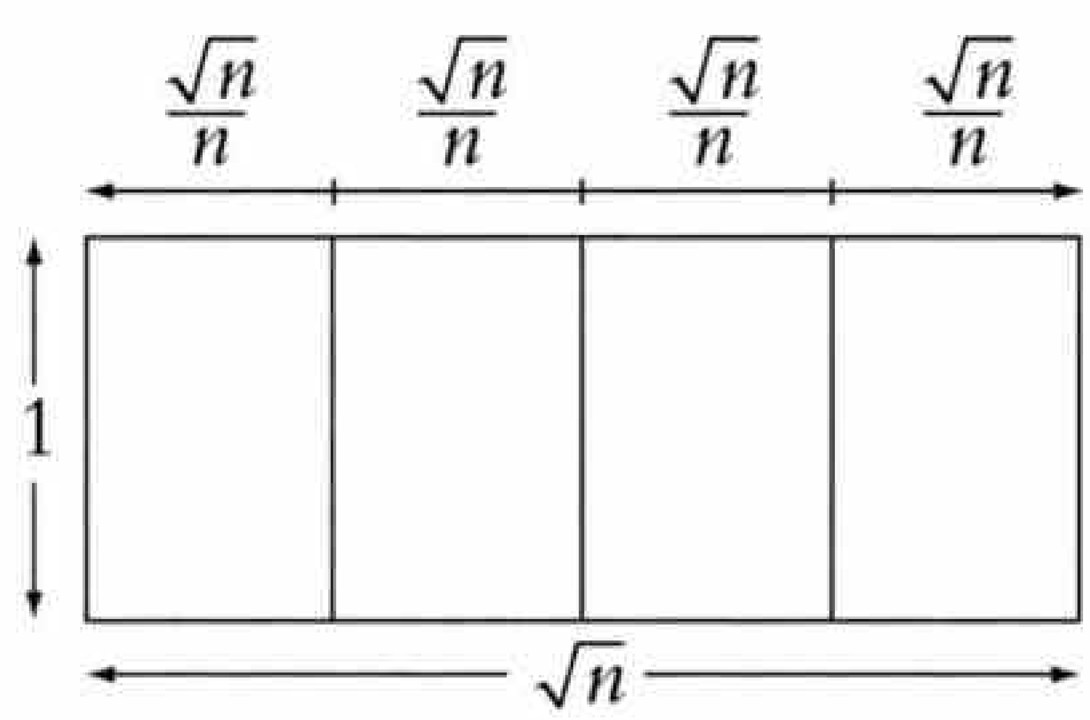


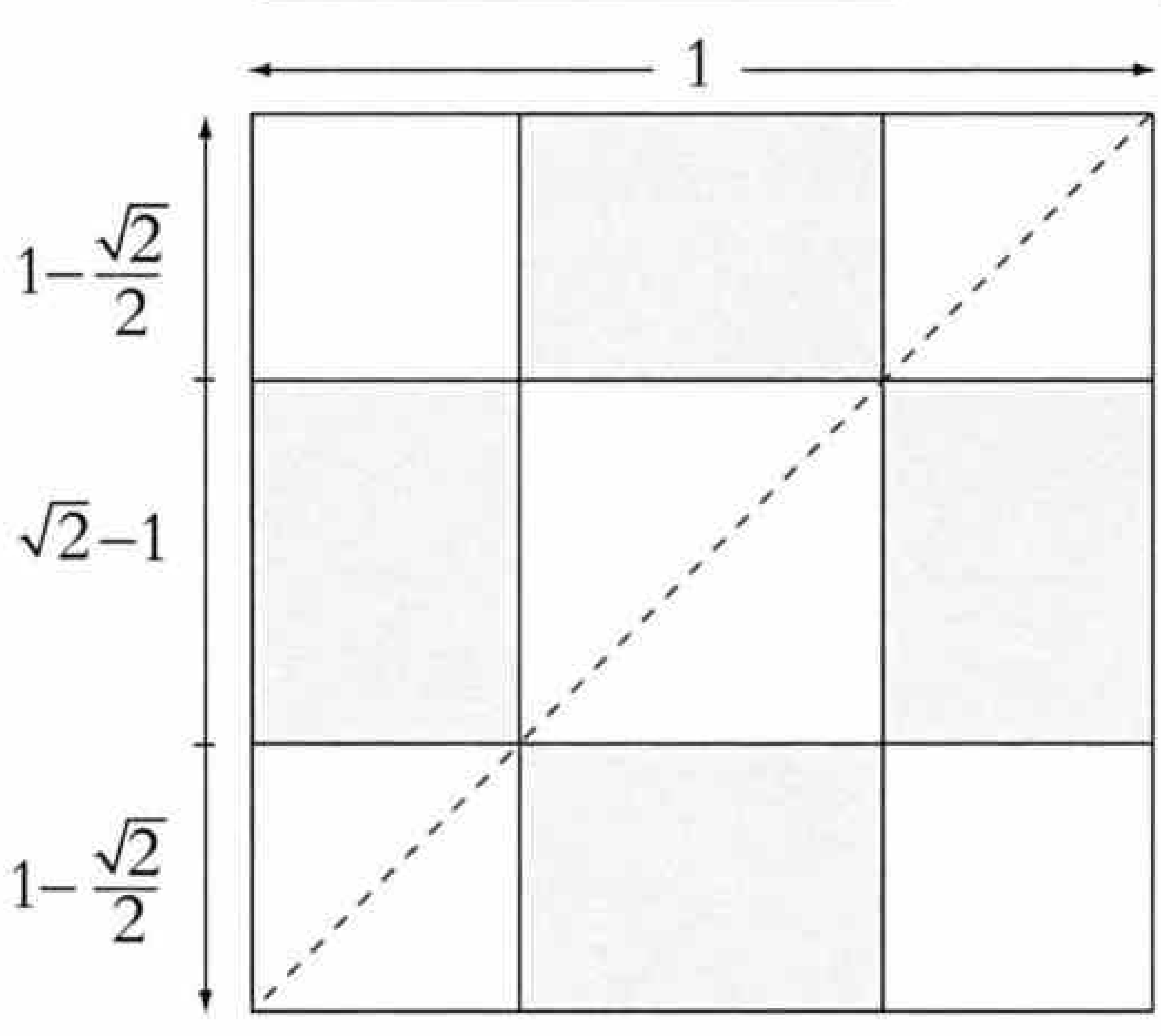
$$\frac{a}{a^2/b}=\frac{b}{a}.$$

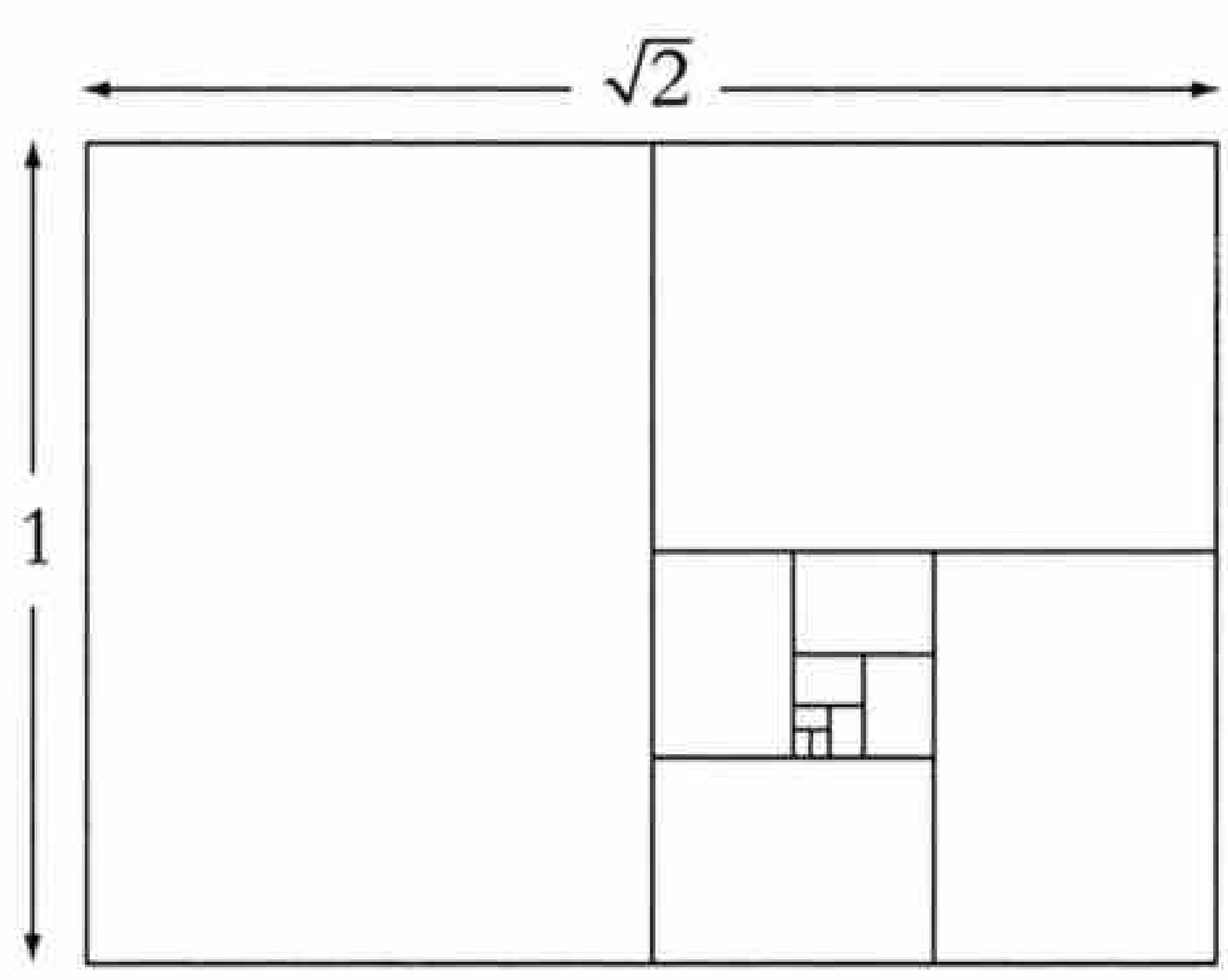
В каком случае этот дополнительный прямоугольник в два раза меньше исходного? Только если $a^2/b = b/2$, или $b^2/a^2 = 2$, то есть $b/a = \sqrt{2}$.

Таким образом, прямоугольники с отношением $\sqrt{2}$ являются единственным типом прямоугольников, когда дополнительные прямоугольники в два раза меньше исходных. На следующих рисунках показаны интересные геометрические следствия этого свойства.









Стандарт DIN и другие форматы бумаги

Раньше использовались различные форматы писчей и печатной бумаги, например, английские форматы foolscap (343 × 432 мм), small post (469 × 368 мм), legal (355 × × 215 мм), small foolscap (337 × 419 мм) и т. д.

Технологический прогресс привел к тому, что пишущие машинки уступили место новым устройствам: факсам, принтерам и копировальным машинам. Для удобства использования этих устройств в Европе были введены стандартные размеры бумаги, так называемый стандарт DIN.

Самое интересное, что этот стандарт далеко не новый. Это старый немецкий стандарт, введенный Германским институтом стандартизации (Deutsches Institut fur Normung), откуда и происходит аббревиатура DIN. Именно в этом учреждении в 1922 г. инженеру Вальтеру Порстману было поручено разработать стандарт для форматов бумаги (DIN 476).

Международная организация по стандартизации (ISO) приняла этот немецкий стандарт в качестве стандарта ISO 216. Эта организация была создана после Второй мировой войны в целях установления международных норм в промышленности, торговле и связи и поддержания тем самым гарантии качества и безопасности продукции. В настоящее время около 160 стран являются членами этой организации, штаб-квартира которой находится в швейцарском городе Женеве.

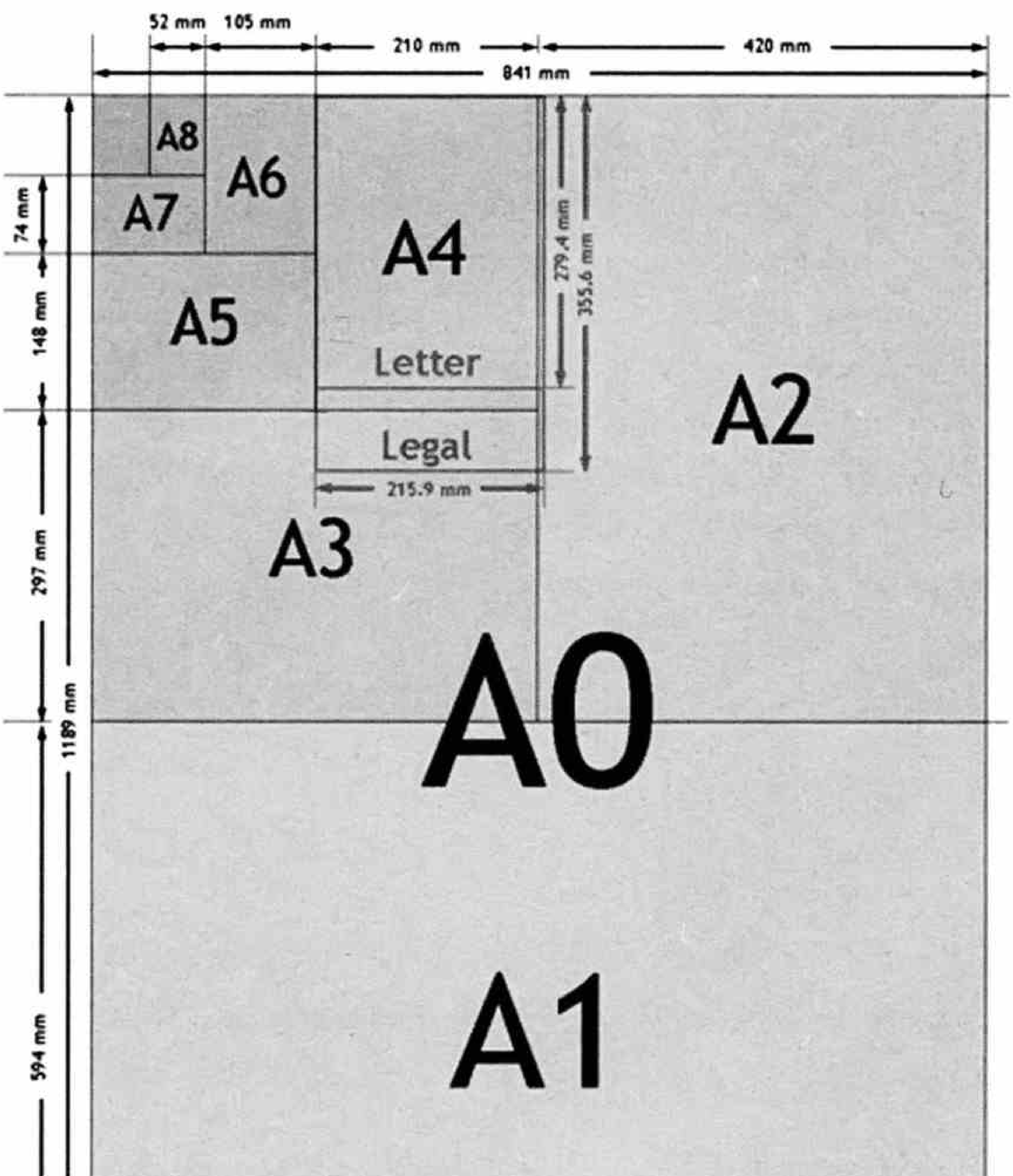
ОТ УДВОЕНИЯ КВАДРАТА К УДВОЕНИЮ КУБА

Можно ли только с помощью линейки и циркуля построить квадрат, площадь которого в два раза больше площади данного квадрата со стороной 1? Да, можно, так как диагональ данного квадрата $\sqrt{2}$ будет стороной нового квадрата, площадь которого равна 2.

Эта простая задача легко решается, но еще в Древней Греции естественным образом возник вопрос: можно ли таким же образом удвоить куб? Если дан куб со стороной 1, можно ли построить с помощью линейки и циркуля сторону x другого куба, объем которого в два раза больше? Этот новый объем равен $x^3 = 2$, другими словами, задача сводится к извлечению кубического корня из 2 – $\sqrt[3]{2}$. Лишь в XIX в. было доказано, что это невозможно сделать с помощью линейки и циркуля.

В настоящее время лишь несколько стран в мире не придерживаются этого стандарта: например, США, Канада и некоторые страны Латинской Америки.

В основе стандарта DIN лежит удивительное свойство, совершенно неизвестное широкой публике: самый крупный формат стандарта представляет собой прямоугольник с отношением сторон, равным $\sqrt{2}$, и площадью 1 м^2.



Форматы стандарта DIN от A0 площадью 1 м^2 до A8 размером с визитную карточку.

Прямоугольные листы бумаги $a \times b$ (где $a < b < 2a$), начиная с листа DIN A0, имеющего площадь в 1 м^2, каждый раз делятся пополам вдоль длинной стороны b, причем обе половинки имеют ту же форму с тем же отношением сторон:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b/2}.$$

Другими словами, $b^2/a^2 = 2$, что эквивалентно $b/a = \sqrt{2}$.

Как видим, отношение $\sqrt{2}$ является ключевым для таких форматов, полученных делением предыдущего пополам. В случае формата DIN A0, выраженного в миллиметрах, мы имеем $b : a = \sqrt{2}$ и $ba = 1\,000\,000$ мм^2 = 1 м^2. Отсюда следует, что $a^2\sqrt{2} = 10^6$, то есть $a = (10^6\sqrt{2}/2)^{1/2} = 841$ мм и $b = 1\,189$ мм.

Конечно, эти размеры посчитаны излишне точно. Производители рулонов бумаги используют другие размеры для нарезки бумаги. Например, для формата DIN A0 изготавливаются листы размером 880 × 1230 мм. Кроме форматов серии А существуют и другие серии: В и С. Их размеры в миллиметрах приведены в таблице ниже. Но это лишь теоретические размеры, на практике отклонения составляют ±1,5 мм на каждые 150 мм, то есть допустимая погрешность — 1 %.

Размеры (длина и ширина) листов серии В являются средним геометрическим размеров листов А ($N - 1$) и А (N) соответственно. Например, для формата DIN B4:

B4 (250 × 353)	250 мм $= \sqrt{210 \times 297}$ мм, A4
	353 мм $= \sqrt{297 \times 420}$ мм, A3

Размеры серии С являются средним геометрическим серий А и В. Таким образом получаются промежуточные форматы. Наиболее известны из них форматы конвертов.

Подняв крышку копировальной машины, можно увидеть вдоль края стекла полезные отметки для каждой серии форматов DIN. Скоросшиватели также рассчитаны на различные форматы. Даже выходной лоток принтера часто имеет регулируемые направляющие для подачи бумаги. Таким образом, дизайн копировальной машины неразрывно связан с теоремой Пифагора.

РАЗМЕРЫ ФОРМАТОВ СТАНДАРТА DIN (ММ)

Серия А	**А0**	841 × 1189	**Серия В**	**В0**	1000 × 1414	**Серия С**	**С0**	917 × 1297
	А1	594 × 841		В1	707 × 1000		С1	648 × 917
	А2	420 × 594		В2	500 × 707		С2	458 × 648
	А3	297 × 420		В3	353 × 500		С3	324 × 158
	А4	210 × 297		В4	250 × 353		С4	229 × 324
	А5	148 × 210		В5	176 × 250		С5	162 × 229
	А6	105 × 148		В6	125 × 176		С6	114 × 162
	А7	74 × 105		В7	88 × 125		С7/6	81 × 162
	А8	52 × 74		В8	62 × 88		С7	81 × 114
	А9	37 × 52		В9	44 × 62		С8	57 × 81
	А10	26 × 37		В10	31 × 44		С9	40 × 57
							С10	28 × 40

Но самые сложные пифагорейские операции выполняют электронные мозги копировальной машины. Это происходит, когда нужно увеличить или уменьшить размер ксерокопии. Рассмотрим пример, когда формат А3 уменьшается до А4. Так как площадь листа формата А4 равна половине площади листа формата А3, длина и ширина исходного листа делятся на $\sqrt{2}$:

$$\frac{x}{\sqrt{2}}, \text{ что можно записать как } \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

То есть, например, длина листа уменьшается в $\sqrt{2}/2$ раз, а именно в 0,7071 раз, или на 70 %. Таким же образом, чтобы увеличить формат А4, мы должны умножить длину и ширину на $\sqrt{2} = 1{,}4142$ (так как формат А3 в два раза больше по площади). То есть лист увеличится на 141,42 %.

Одним словом, какую бы ксерокопию мы ни делали, мы используем в математических вычислениях скромное число $\sqrt{2}$.

Числа диафрагмы в фотографии

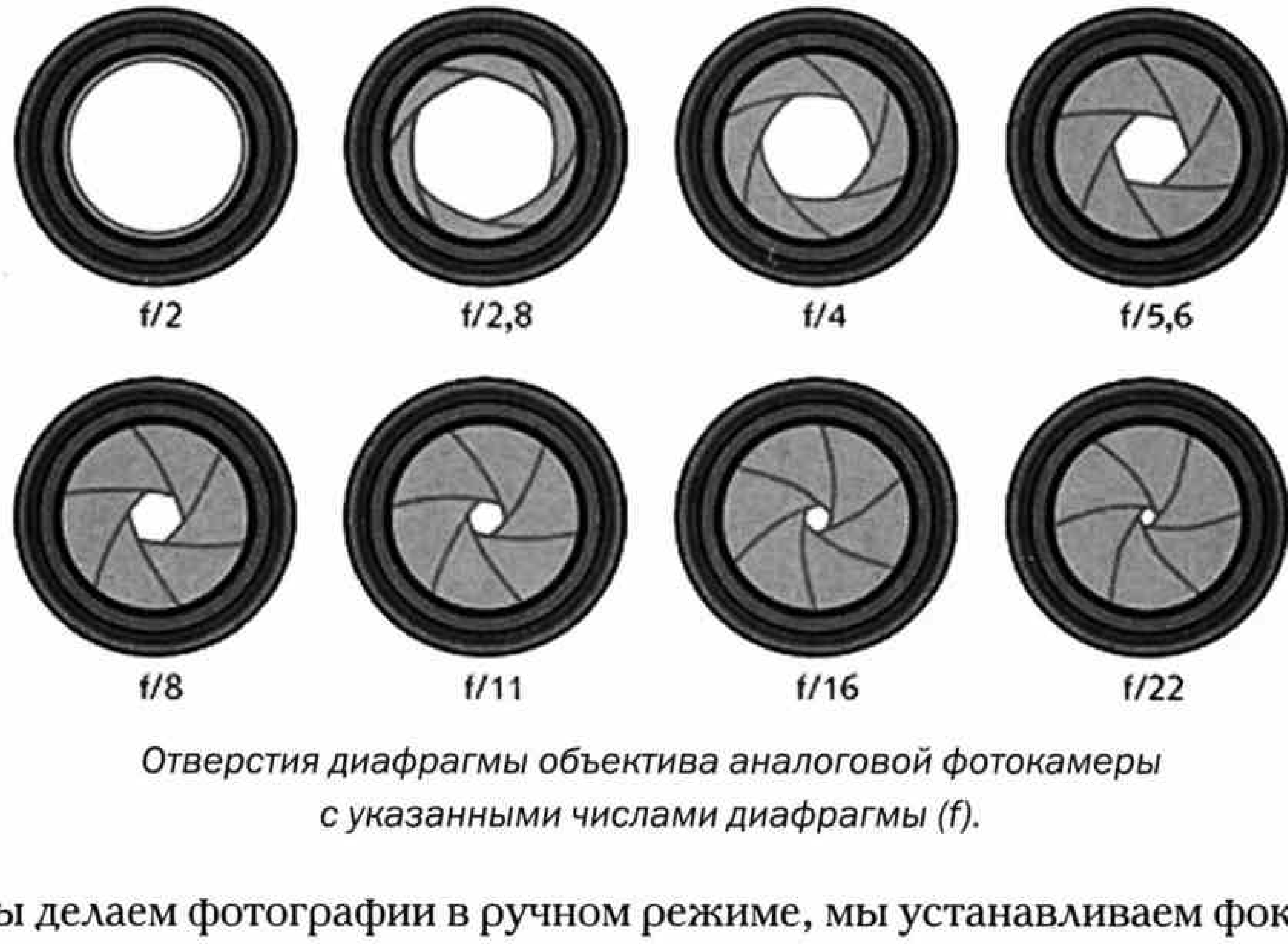
Рассмотрим круг радиуса R, площадь которого πR^2. Если мы хотим построить круг с вдвое большей площадью — $2\pi R^2$, — нам нужен радиус $r = \sqrt{2}R$. Аналогично, чтобы получить круг с вдвое меньшей площадью, мы разделим радиус на $\sqrt{2}$. Таким образом, для ряда кругов с вдвое большей или меньшей площадью мы будем каждый раз последовательно умножать или делить радиусы на $\sqrt{2}$. Мы получим ряд степеней числа $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}, \left(\sqrt{2}\right)^2, \left(\sqrt{2}\right)^3, \left(\sqrt{2}\right)^4, \left(\sqrt{2}\right)^5, \left(\sqrt{2}\right)^6, \left(\sqrt{2}\right)^7, \left(\sqrt{2}\right)^8 \ldots$$

Округляя эти числа до двух десятичных разрядов, получим:

$$1{,}41;\ 2;\ 2{,}82;\ 4;\ 5{,}64;\ 8;\ 11{,}28;\ 16\ldots$$

В то время как в бумажной промышленности стандарт, основанный на числе $\sqrt{2}$, диктуется пропорциями при делении листа бумаги пополам, в области фотографии также имеется причина использовать это вездесущее число. Оказывается, отверстие диафрагмы объектива определяется значениями ряда степеней $\sqrt{2}$, выраженными в десятичных знаках. В фотографии они называются *числами диафрагмы*.



Отверстия диафрагмы объектива аналоговой фотокамеры с указанными числами диафрагмы (f).

Когда мы делаем фотографии в ручном режиме, мы устанавливаем фокус, выдержку и экспозицию. Экспозиция определяется диафрагмой объектива (небольшим отверстием, которое закрывается кругообразно). Если свет очень яркий, мы закрываем диафрагму, в противном случае фотография получится передержанной. Если света

ТУННЕЛЬ ЧЕРЕЗ КУБ

Представьте себе большой деревянный куб со стороной 1 м. В нем мы хотим проделать отверстие, через которое мог бы пройти другой куб. Куб какого наибольшего размера мог бы пройти через данный куб? Эта интересная задача была решена голландцем Питером Ниуландом. Он установил, что куб максимального размера, который может пройти через отверстие, будет больше, чем оригинальный куб, а именно будет иметь сторону длиной 1,06066 м, иными словами, в $3\sqrt{2}/4$ раза длиннее.

недостаточно, например, в ночное время, мы открываем диафрагму: в противном случае фотография получится слишком темной. Диафрагма не может открываться и закрываться произвольно. Чтобы получить хорошую фотографию, размеры отверстия диафрагмы следует менять в соответствии с другими параметрами, например, с выдержкой. Размеры диафрагмы имеют фиксированные значения, зависящие от числа $\sqrt{2}$. При закрытии диафрагмы на одно деление шкалы диаметр отверстия уменьшается в $\sqrt{2}$ раз, а площадь отверстия уменьшается вдвое, тем самым уменьшая количество проходящего света.

Числами диафрагмы для ручной фотокамеры являются:

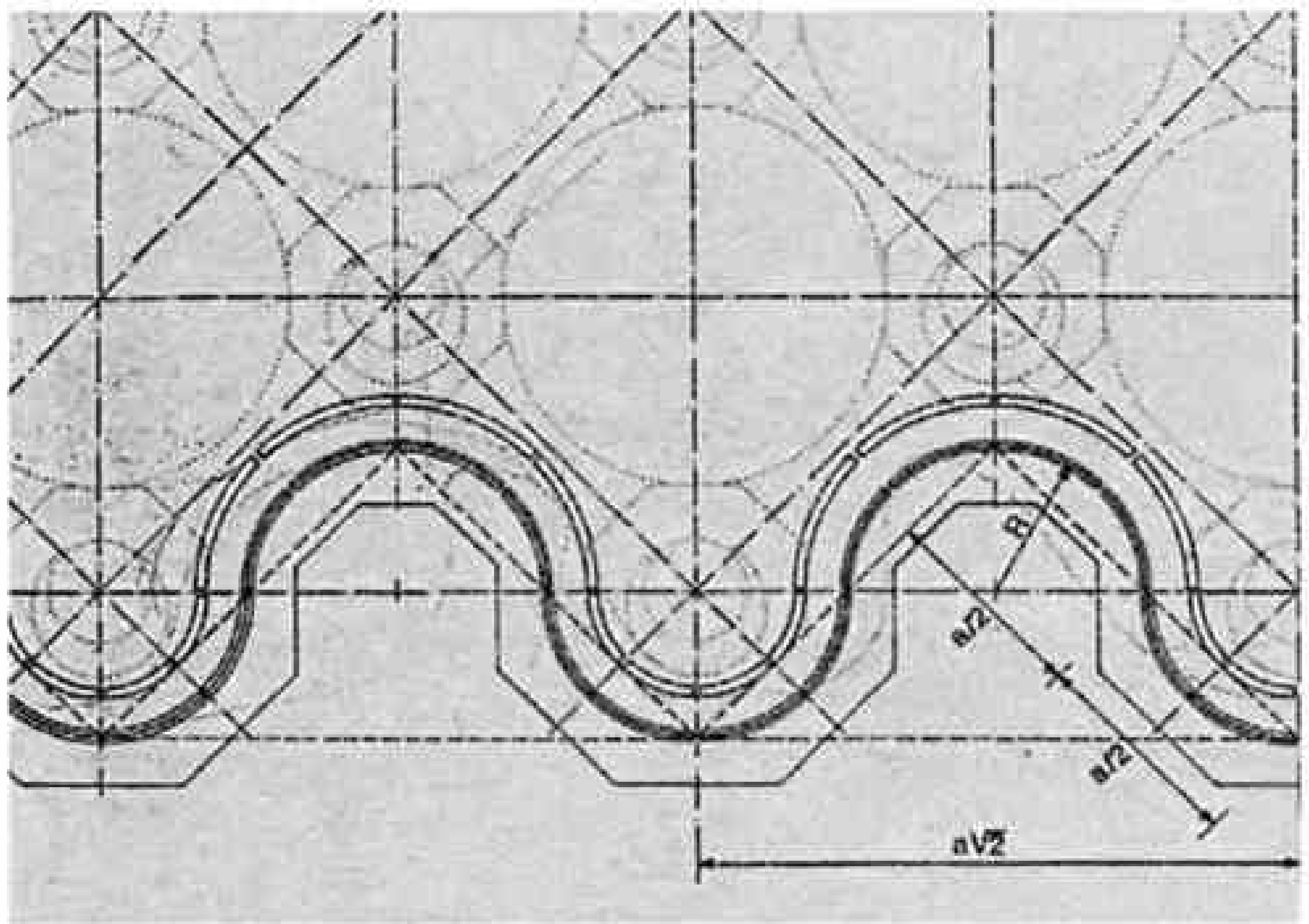
$$1{,}4;\ 2;\ 2{,}8;\ 4;\ 5{,}6;\ 8;\ 11;\ 16\ldots$$

Другими словами, это степени числа $\sqrt{2}$, округленные до одного десятичного знака, кроме числа 11,28, которое неожиданно округлилось до 11 вместо 11,3.

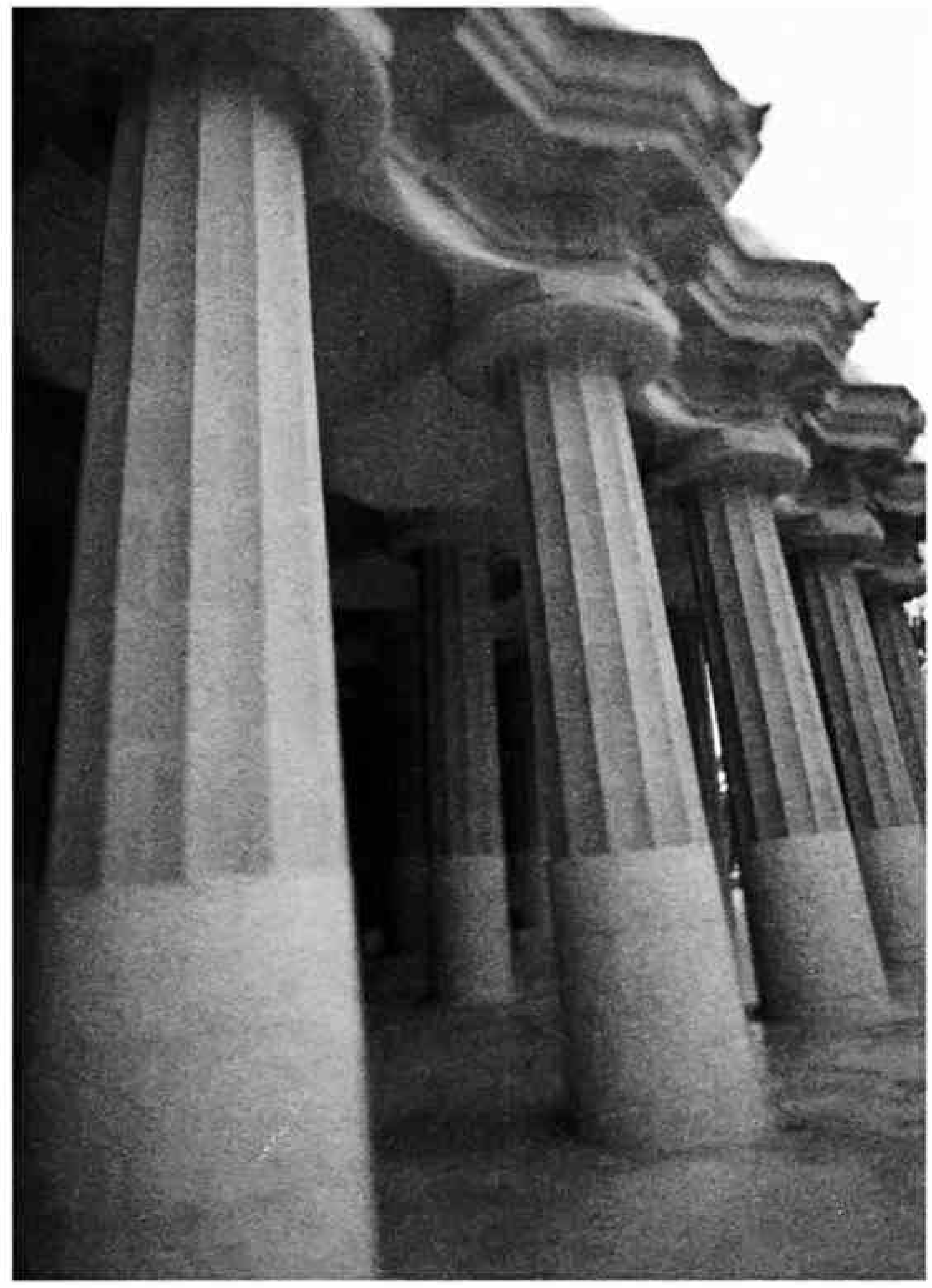
Пленки для фотоаппаратов постепенно остаются в другой эпохе, и задачей археологов будущего станет разгадывание странных инструкций: «В солнечную погоду следует использовать число диафрагмы 8, а в пасмурную — 16». Совсем недавно эти рекомендации казались достаточно простыми, хотя являлись лишь понятной переформулировкой вопроса: «Какую степень числа $\sqrt{2}$ лучше выбрать для данного фотоснимка?»

Число $\sqrt{2}$ в парке Гуэля

Квадратный корень из двух как диагональ единичного квадрата всегда будет присутствовать во всех квадратах, которые только можно начертить, сделать или просто вообразить. Это число появляется в таблицах, картинах, книгах — везде, где используются квадраты или форматы с отношением $\sqrt{2}$. Может быть, $\sqrt{2}$ не самое



Верхние концы колонн, которые поддерживают прогулочную террасу парка Гуэля. Расположенные, казалось бы, произвольно, они образуют идеальную сетку, как видно на рисунке.



необыкновенное число, но оно, безусловно, занимает почетное место в искусстве, архитектуре и дизайне.

Это особенно хорошо видно, например, в парке Гуэля, спроектированном великим архитектором Барселоны Антонио Гауди. Он создал серию уникальных построек, прекрасно сочетающихся с ландшафтом парка. Терраса, поддерживаемая огромными колоннами в греческом стиле, является центральным элементом всего паркового ансамбля. На этой террасе находится длинная, изогнутая в форме морского змея скамья, украшенная разноцветной керамической мозаикой, упорядоченные и неупорядоченные узоры которой сразу привлекают внимание. В каждом квадрате, конечно же, скрывается замечательное число $\sqrt{2}$.

Гауди поместил верхние концы колонн в сетке квадратов. Посетитель, рассматривающий узоры изогнутой скамейки или расположение колонн, примет их за творение архитектурного гения, не придерживающегося какой-либо рациональной системы. Но такое впечатление абсолютно неверно. Стабильность сооружения обеспечивается идеальной геометрией квадратов. Антонио Гауди сумел соединить чисто геометрические узоры с простыми и красивыми украшениями.

Глава 4

Спираль Феодора Киренского

Числа управляют миром.
Пифагор

В известном диснеевском мультфильме «Дональд Дак в стране Матемагии» есть шутка о квадратных корнях. Утенок Дональд Дак приезжает в эту волшебную страну и видит в лесу деревья, корни которых действительно квадратные.

Конечно, сценаристы показали здесь лишь игру слов. Однако, как мы видели, связь между квадратными корнями и геометрической формой квадрата достаточно тесная. Поэтому диснеевские мультипликаторы не сделали большой ошибки, изобразив квадратные корни в виде квадратов.

Все квадратные корни, а не только $\sqrt{2}$, связаны с длинами и пропорциями геометрических фигур. Теорема Пифагора позволяет графически изобразить различные числа, в том числе $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$... И это, пожалуй, не так уж странно, поскольку во все времена художники неявно использовали эти числа, следуя гармоническим пропорциям, основанным на математике.

Самым удивительным, однако, является то, что теорема Пифагора позволяет нам обнаружить квадратные корни во множестве природных форм, имеющих непостижимо идеальные, математически безупречные пропорции. Например, различные минералы имеют форму многогранников: от призматической формы некоторых кристаллов до идеальных кубов пирита. Измерения и расчеты таких форм дают удивительные математические результаты.

Обложка сочинения «Новая наука» (Nova scientia) итальянского математика Никколо Тартальи с подзаголовком «Сад математических наук» с изображением Евклида в качестве привратника.

Однако наиболее удивительным образом числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... появляются в мире растений. Эти числа можно обнаружить в цветах или плодах, в закономерностях их роста, в многоугольных формах, образованных лепестками, или в спиральном расположении семян.

КОРНИ УРАВНЕНИЙ: ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Корни неразрывно связаны с решениями уравнений второго, третьего, четвертого и следующих порядков. Эта задача в настоящее время легко и элегантно описывается с помощью алгебры, но на протяжении веков часто решалась приближенными геометрическими методами.

Уравнения третьей степени

В общем случае задача об уравнениях третьей степени была решена лишь в эпоху Возрождения. В XVI в. итальянский математик-самоучка Никколо Фонтана, известный под именем Тарталья (1499–1557), получил общие формулы решения такого рода задач и даже описал это решение в стихах.

Тарталья рассказал о своем достижении Джероламо Кардано (1501–1576), другому итальянскому математику, который обещал не разглашать открытие, но опубликовал решение под собственным именем, вызвав серьезный скандал в научных кругах.

Уравнения четвертой степени

Ученик Кардано, математик Лодовико Феррари (1522–1565), получил общие формулы для корней уравнений четвертой степени, основанные на формулах решений уравнений второй и третьей степеней.

Уравнения высших степеней

После получения формул для решений уравнений вплоть до четвертой степени с использованием арифметических операций и корней казалось возможным описать общее решение уравнений любой степени n. Безусловно, можно найти решения конкретных уравнений (например, уравнения $x^7 = 8$, решением которого является корень седьмой степени из 8), но не в общем случае.

Паоло Руффини (1765–1822) из итальянского города Валентано вывел правило, носящее теперь его имя и позволяющее проверить, является ли число решением полиномиального уравнения. Годы спустя, используя результаты своих предшественников, таких как Эйлер, Лагранж и Руффини, норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802–1829) и французский математик Эварист Галуа (1811–1832) доказали, что, начиная со степени $n = 5$, невозможно найти арифметические формулы для решений уравнений в общем случае.

Три примера из мира животных и растений, когда теорема Пифагора появляется в виде квадратных корней и математических рядов.

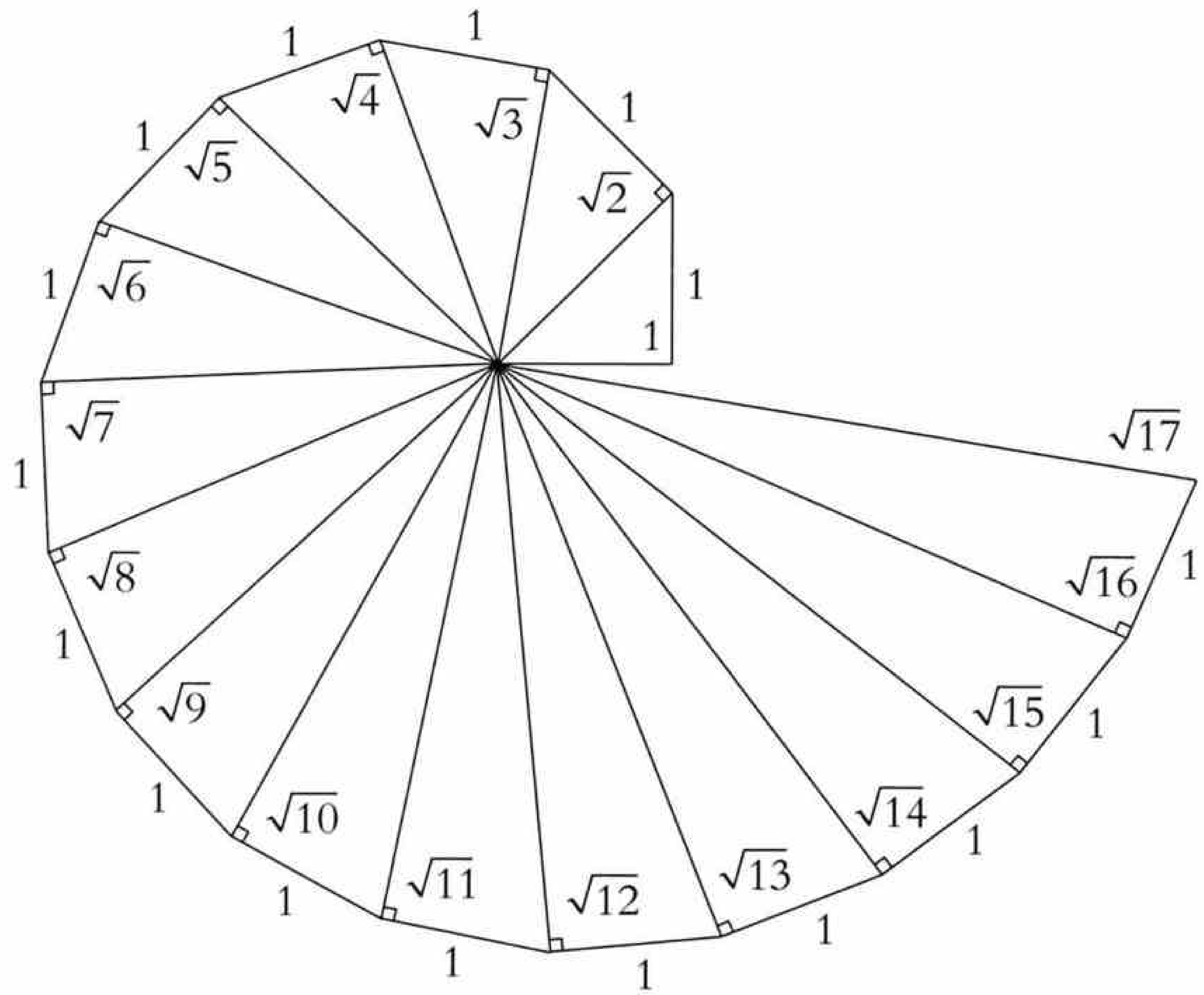
Но и мир животных содержит пифагорейские конфигурации. Квадратные корни регулируют, например, рост раковин или рогов и проявляются в геометрии спиралей и винтовых линий, бросающей вызов нашему воображению и, похоже, лежащей в основе того, что мы называем эстетикой. Теодор Андреа Кук, искусствовед начала XX в., первым стал изучать эти явления. Его классическая работа «Кривые жизни» считается отправной точкой современных исследований. Далее мы рассмотрим математику, лежащую в основе этих природных закономерностей.

Динамические пропорции $\sqrt{n}$

В течение долгого времени $\sqrt{2}$ было единственным известным иррациональным числом. В диалоге «Теэтет» Платон рассказывает, что его учитель математики Феодор Киренский примерно в 425 г. до н. э. впервые доказал иррациональность других квадратных корней. Феодор Киренский рассмотрел отрезки с длинами:

$$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{17}.$$

Теорема Пифагора позволяет изобразить все квадратные корни из натуральных чисел в виде спирали, состоящей из прямоугольных треугольников. Не существует никаких доказательств того, что именно Феодор Киренский придумал эту спираль. Однако в историю она вошла под его именем, возможно, в знак признания того, что он доказал иррациональность длин этих отрезков. В настоящее время эта фигура носит название спирали Феодора Киренского.

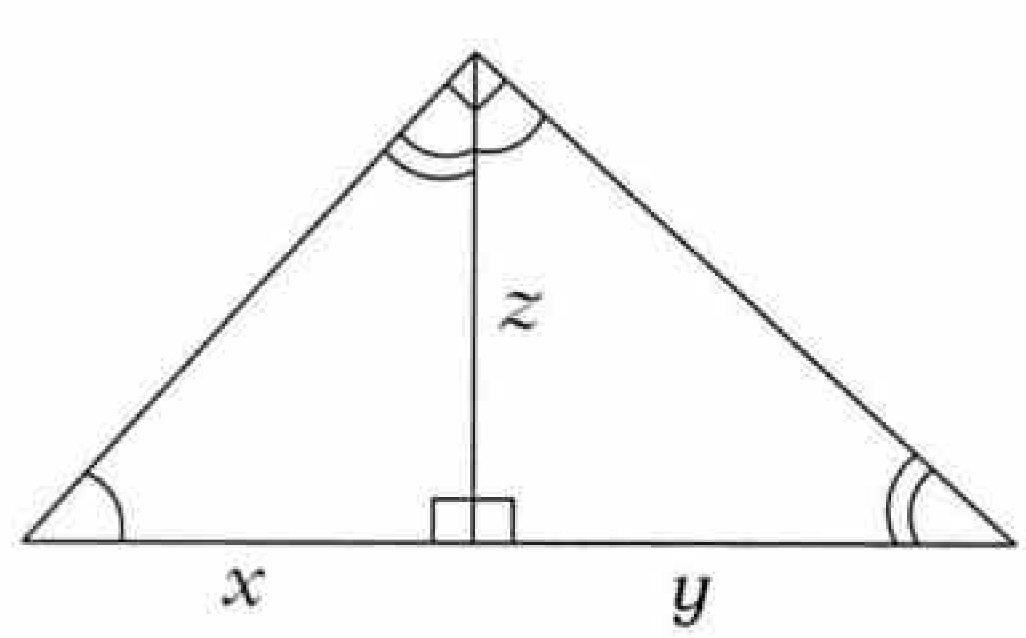


На рисунке выше можно видеть, что $\sqrt{2}$ является диагональю квадрата со стороной 1. Однако $\sqrt{3}$ будет диагональю прямоугольника со сторонами 1 и $\sqrt{2}$ (или гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 1 и $\sqrt{2}$). $\sqrt{4}$ будет гипотенузой треугольника с катетами 1 и $\sqrt{3}$, а $\sqrt{5}$ — гипотенузой треугольника с катетами 1 и $\sqrt{4}$. Таким образом, ряд чисел $\sqrt{n}$ растет в определенном порядке.

Этот способ построения прямоугольников со сторонами 1 и $\sqrt{n}$ означает, что пропорции $\sqrt{n}$ являются динамическими пропорциями.

Используя динамические пропорции и теорему о высоте прямоугольного треугольника, можно построить дополнительный прямоугольник. Но сначала напомним эту теорему.

В прямоугольном треугольнике высота z, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит ее на две части x, y.

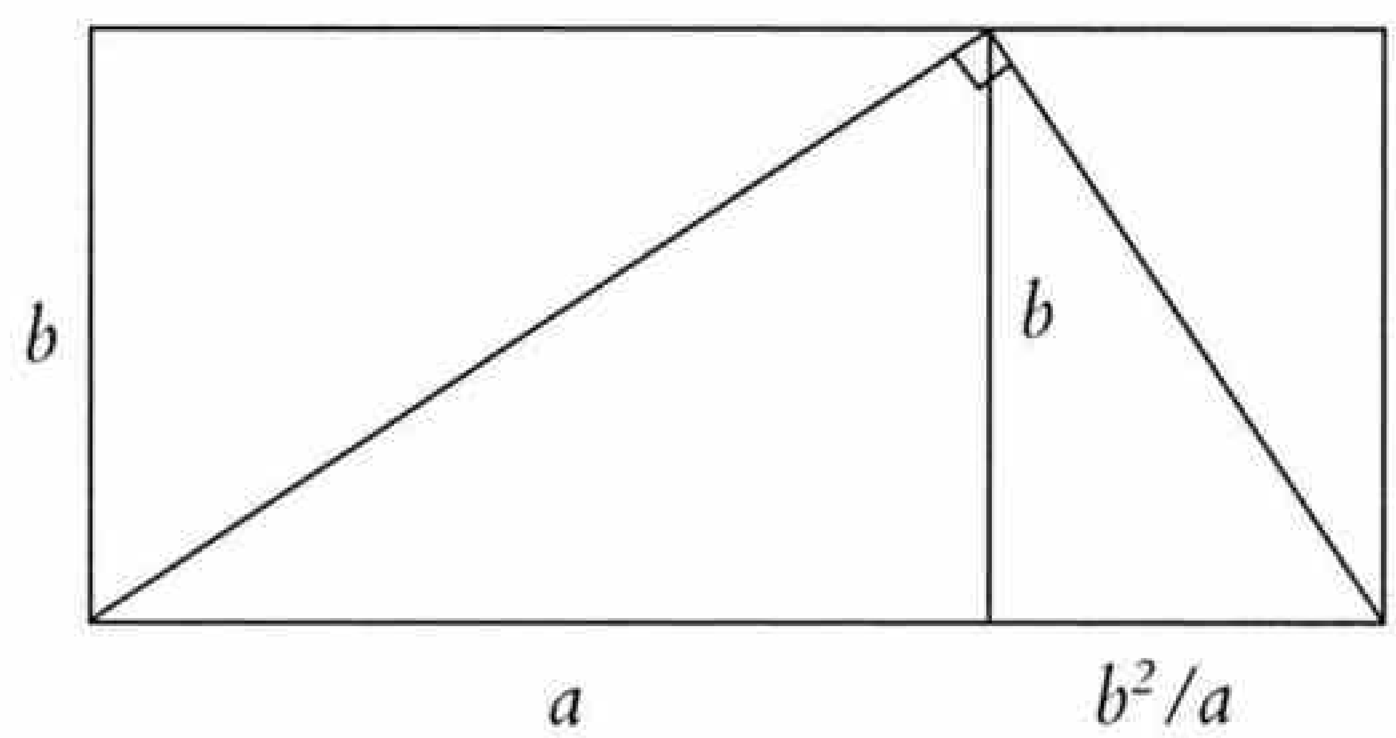


Таким образом, треугольник делится на два прямоугольных треугольника с равными углами. Поэтому их стороны пропорциональны:

$$\frac{z}{y}=\frac{x}{z},$$

откуда следует, что $z^2 = xy$ и, значит, $z=\sqrt{xy}$ является средним геометрическим чисел x и y.

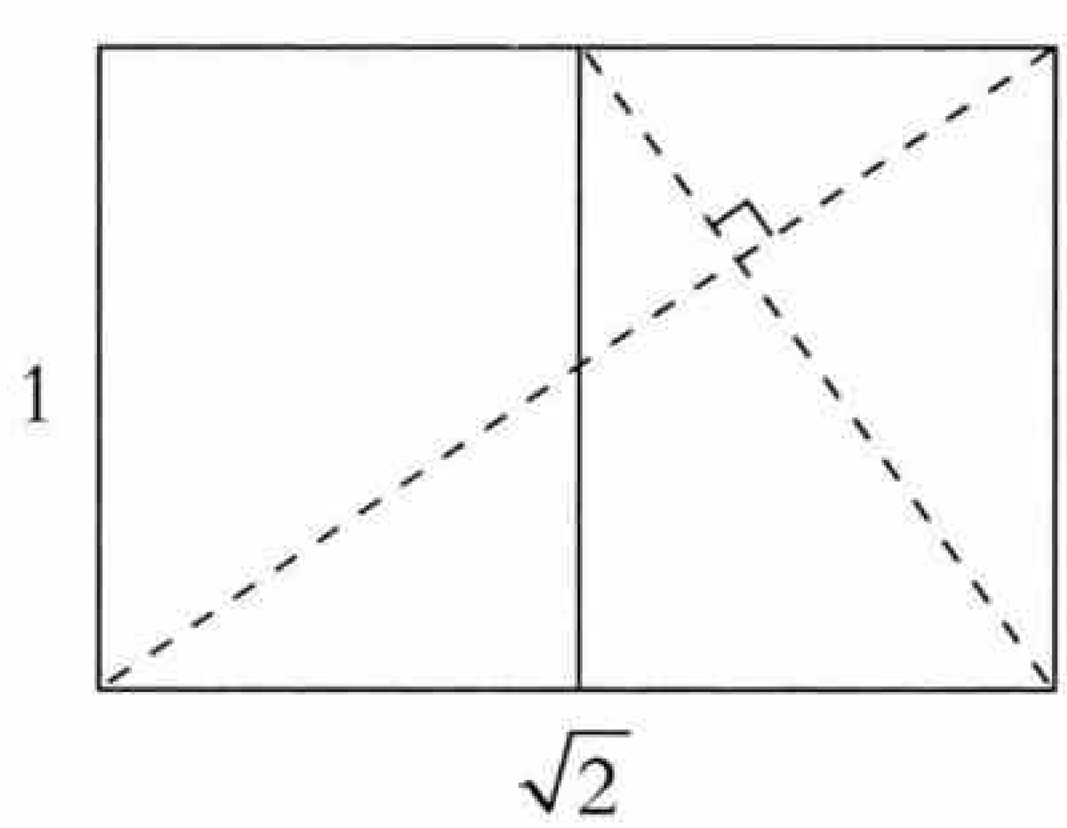
Этот результат известен как теорема о высоте прямоугольного треугольника. Давайте посмотрим, как она применяется для построения дополнительного прямоугольника.

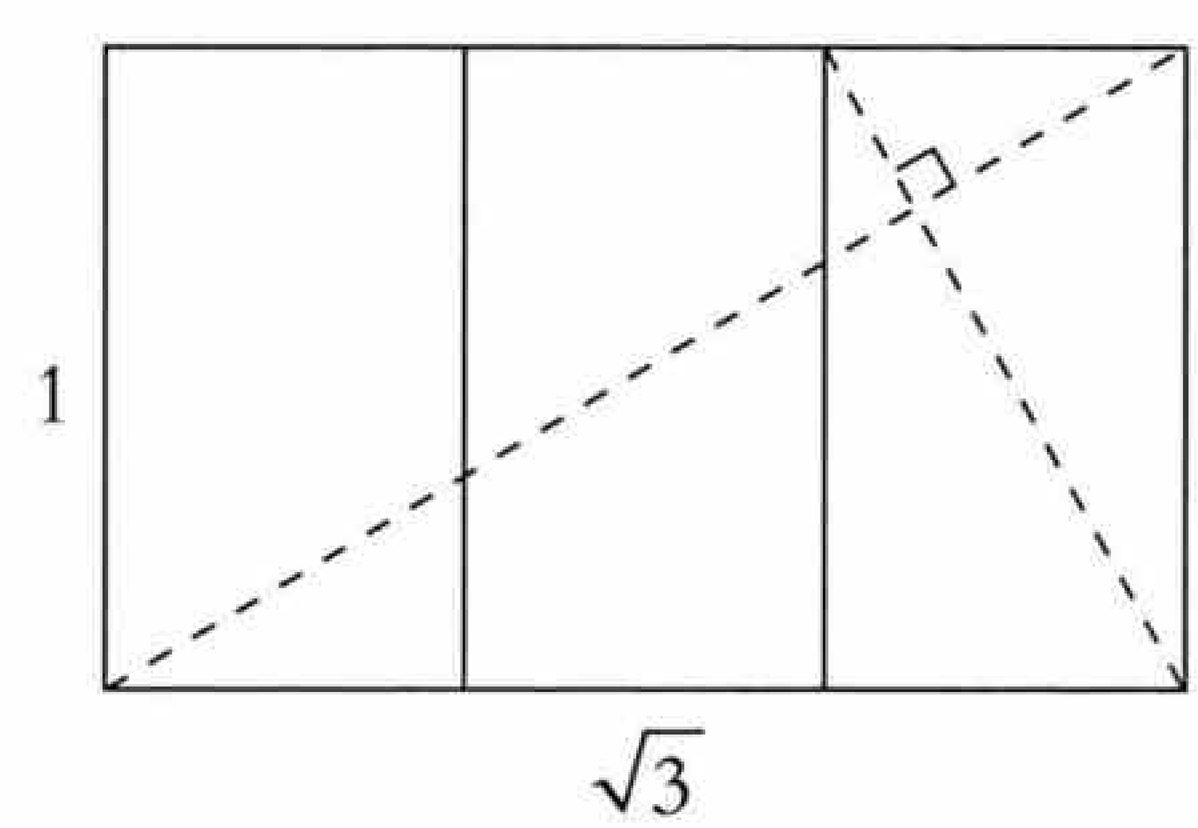


Рассмотрим прямоугольник, дополнительный к прямоугольнику со сторонами a, b так, что диагонали этих прямоугольников образуют прямой угол. Тогда стороны нового прямоугольника должны быть b и b^2/a. Таким образом, отношение сторон дополнительного прямоугольника равно $b/(b^2/a) = a/b$, то есть как у исходного прямоугольника.

В каком случае n штук дополнительных прямоугольников покроют исходный прямоугольник? Это произойдет, когда

$$n\frac{b^2}{a}=a.$$





Но если $n = a^2/b^2$, тогда $\frac{a}{b}=\sqrt{n}$.

ФОРМУЛА ГЕРОНА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО И $\sqrt{n}$

Герон Александрийский, живший между 10 и 70 гг. до н. э., был уникальным человеком. Он был геометром, механиком, инженером, автором энциклопедии и великим изобретателем. В геометрии его имя носит формула для вычисления площади треугольника по сторонам a, b, c. Если $p = (a + b + c)/2$ – полупериметр треугольника, то его площадь S равна:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Как мы видим, эта формула устанавливает связь между квадратными корнями и площадями различных фигур, так как любая фигура может быть разбита на треугольники. Герон также описал способ вычисления приближенного значения $\sqrt{n}$, который используется и по сей день. Если $ab = n$, то $\sqrt{n}$ приблизительно равен $(a + b)/2$.

Таким образом, если $a_1 = a$ является начальным приближением, то $a_2 = \dfrac{a_1 + n/a_1}{2}$ – более точным, а $a_3 = \dfrac{a_2 + n/a_2}{2}$ – еще более точным и так далее до бесконечности.

Например, если $n = 3$ и $a_1 = 2$, то $a_2 = \dfrac{2+\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{7}{4}$, $a_3 = \dfrac{\frac{7}{4}+\frac{3}{7/4}}{2}$ и т. д.

В этом и заключается удивительное свойство динамических пропорций: $\sqrt{n}$ — единственное отношение, которое позволяет разделить прямоугольник на n прямоугольных частей той же формы. Это свойство лежит в основе стандарта бумаги DIN, который использует отношение для $n = 2$. Для $n = 3$ это свойство используется для изготовления брошюр на бумаге с пропорциями $\sqrt{3}$.

Красота и золотое сечение

Золотое сечение является иррациональным числом, открытым древними греками. Впервые оно было описано в «Началах» Евклида. В XX в. оно стало обозначаться греческой буквой Ф (фи), и в математических терминах оно называется числом фи. Его приблизительное значение записывается как 1,6180339887... На первый взгляд это число не кажется особенным, поэтому мы рассмотрим его геометрические свойства. Например, Евклид, определяя это число в виде отношения, писал:

«Говорится, что прямая делится в крайнем и среднем отношении, если целое относится к большему отрезку, как больший отрезок к меньшему».

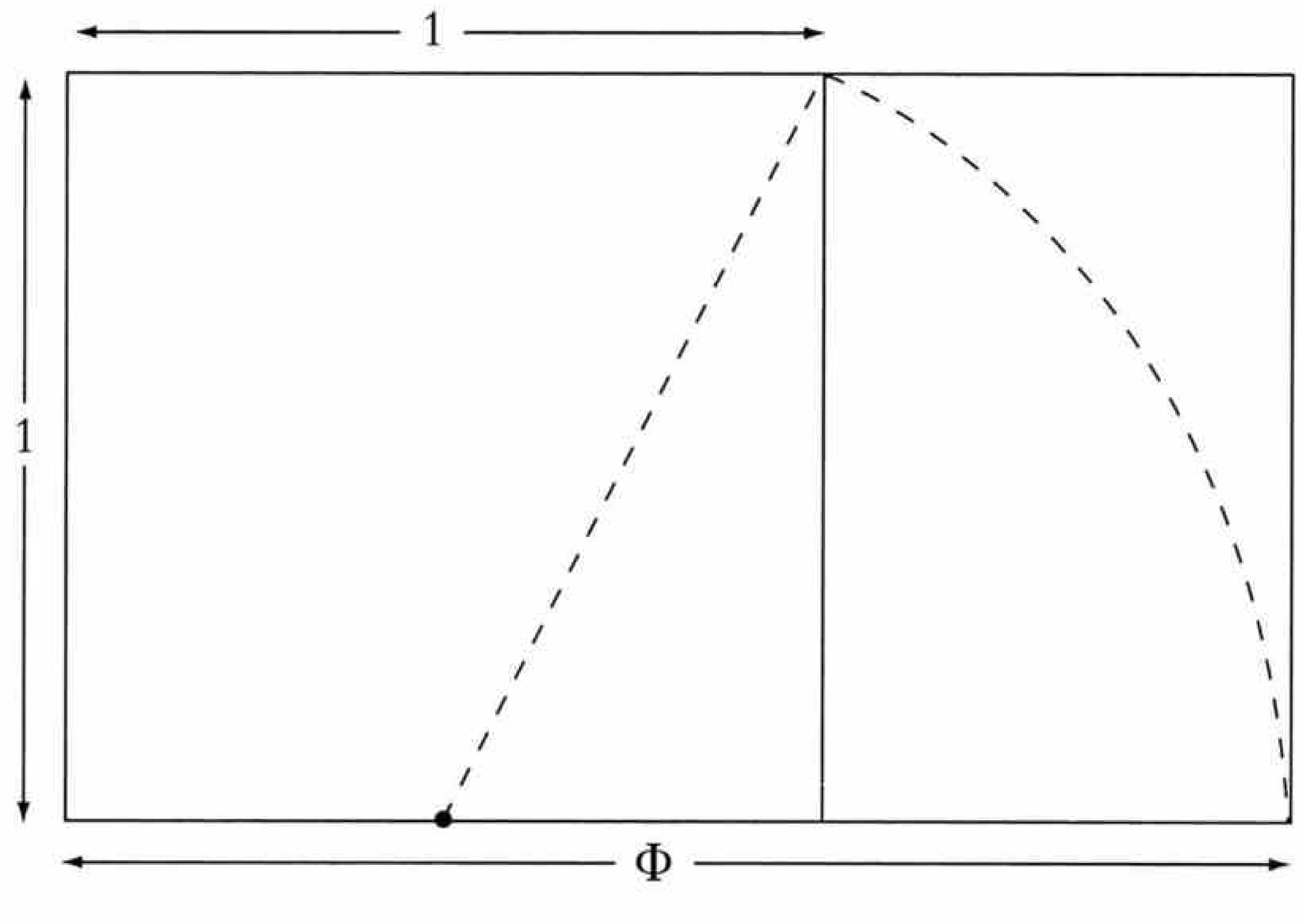
В эпоху Возрождения это отношение вызывало благоговейное поклонение. Леонардо да Винчи считал его высшим проявлением гармонии и мерилом эстетической красоты. Именно да Винчи окрестил число фи и представляемую им пропорцию золотым сечением.

В 1509 г. о золотой пропорции был даже написан целый трактат. Он назывался De Divina Proportione («О божественной пропорции»). Автор трактата — францисканский монах-математик Лука Пачоли, известный своими новаторскими трудами по теории вероятностей. Пачоли был знаком с самыми выдающимися художниками того времени, в том числе с Леонардо да Винчи, и его работы затрагивали вопросы космологии и математики, объединяли теорию платоновых тел с архитектурными стилями и графической перспективой. Художники эпохи Возрождения широко использовали золотое сечение, и мы можем обнаружить это число в самых известных работах.

Легендарная золотая пропорция может быть записана как

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618...$$

Именно Пачоли назвал прямоугольники с отношением сторон, равным Ф, золотыми. На следующем рисунке показан простой способ построения прямоугольников с «золотым» отношением сторон.

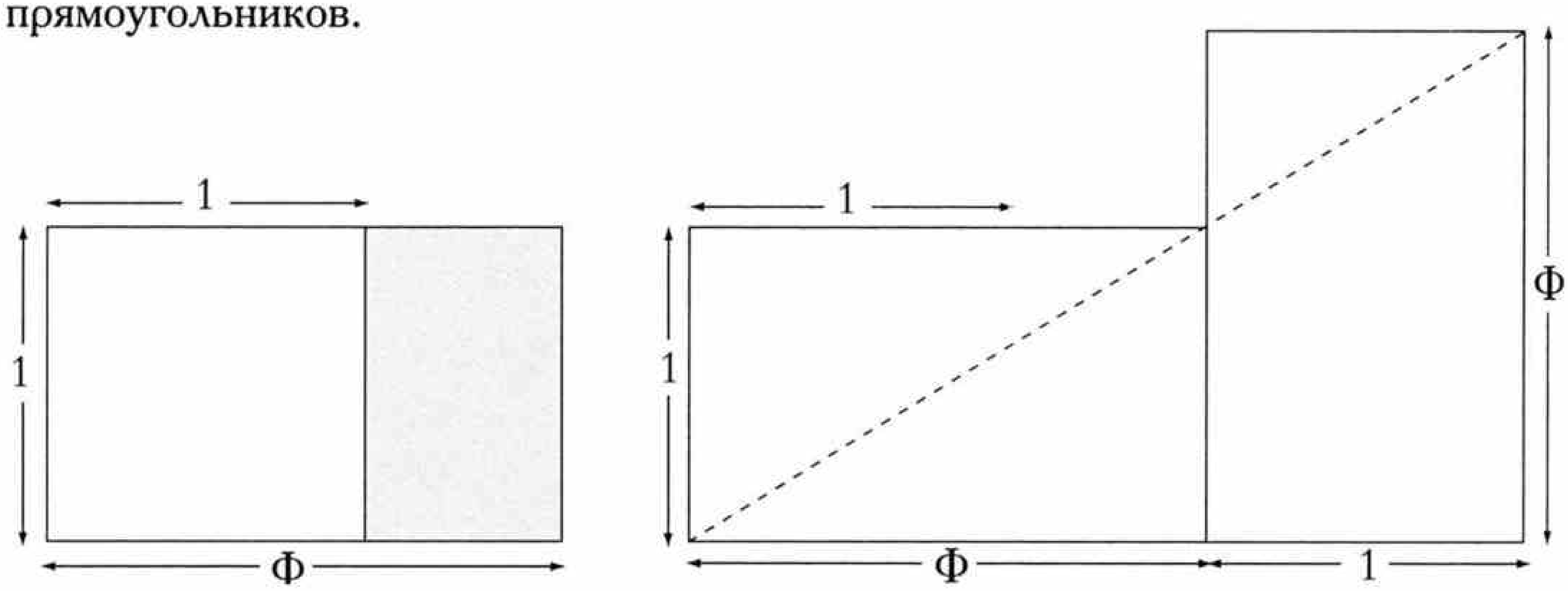


Как можно видеть, здесь тоже используется теорема Пифагора. Если середину стороны квадрата соединить с противоположным углом, то получится отрезок следующей длины:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

который в сумме с $\frac{1}{2}$ дает золотую пропорцию $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

На следующем рисунке показаны два важных геометрических свойства «золотых» прямоугольников.



Первое свойство состоит в том, что «золотой» прямоугольник можно разделить на квадрат и другой прямоугольник, который также является «золотым». Второе свойство показывает, что диагональ одного горизонтально расположенного «золотого» прямоугольника проходит через верхний правый угол другого вертикально расположенного «золотого» прямоугольника, если оба прямоугольника помещены рядом, как на рисунке.

Многоугольники, многогранники и квадратные корни

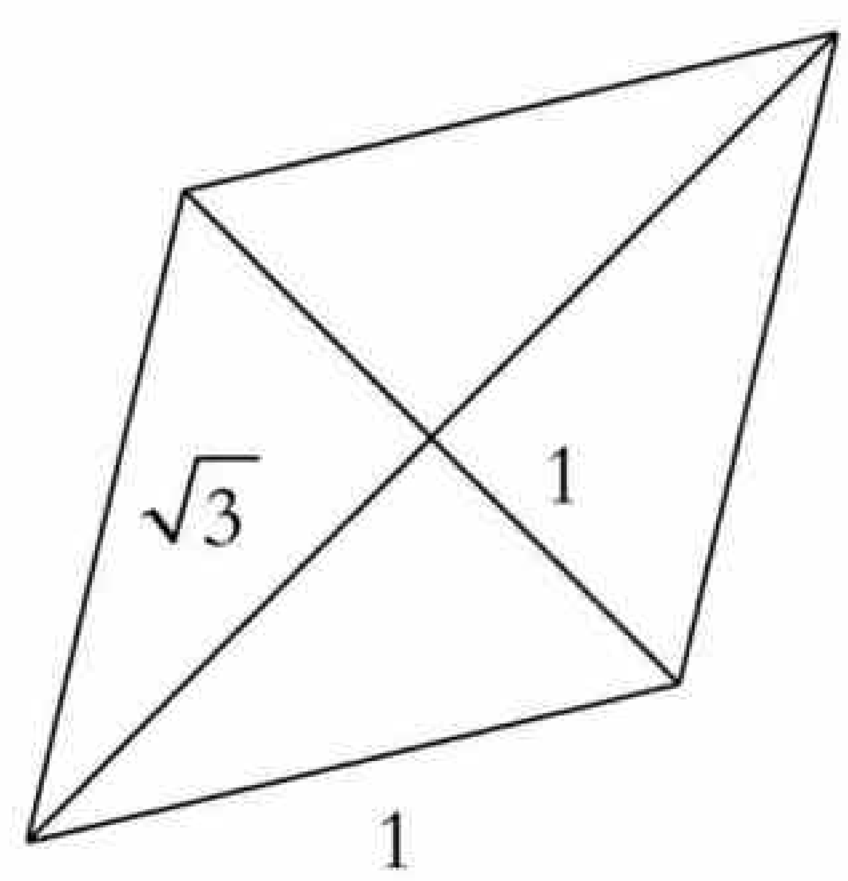
Теорема Пифагора позволяет измерять отрезки, имеющие важное значение при изучении многоугольников на плоскости и многогранников в трехмерном пространстве.

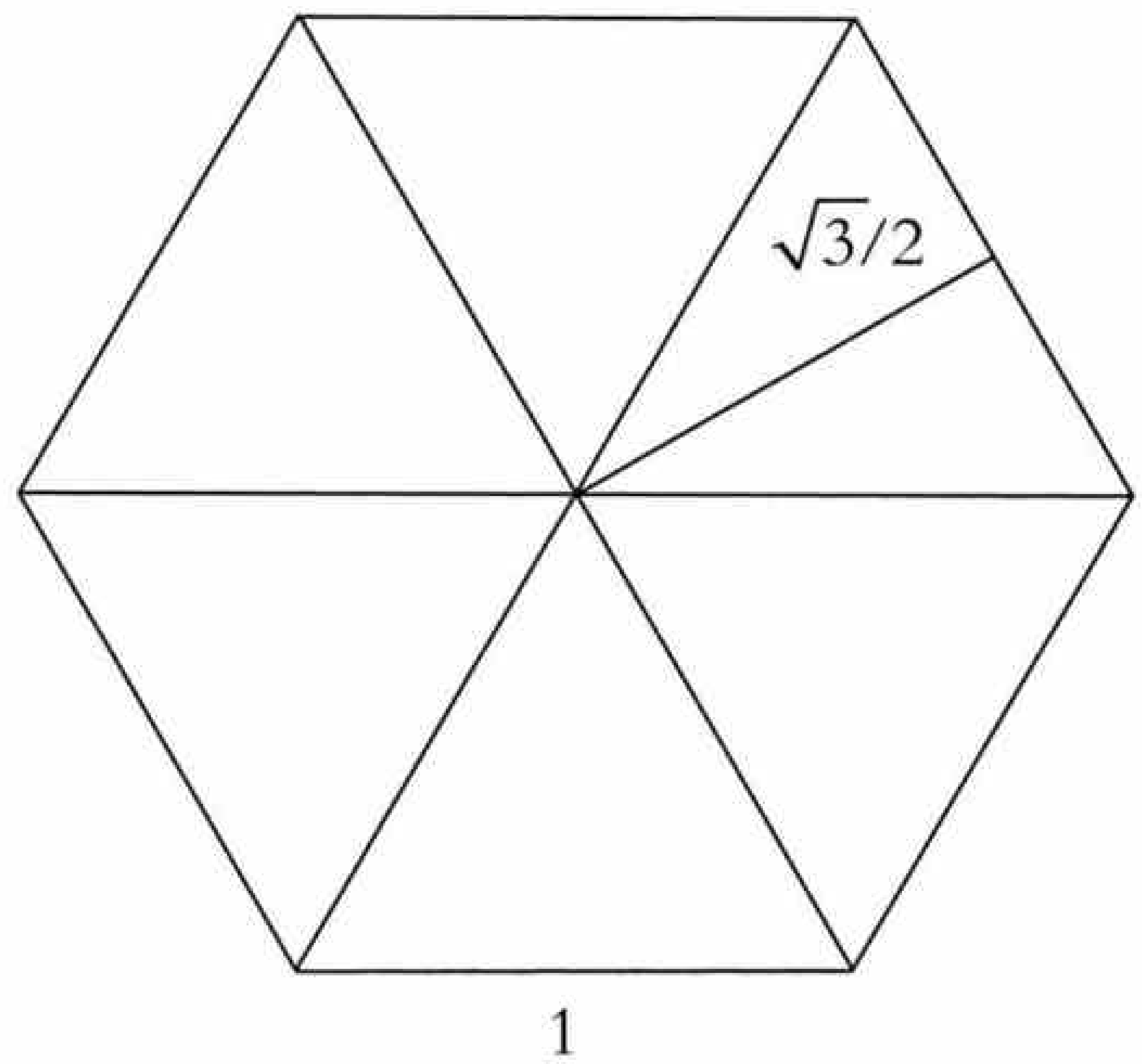
$\sqrt{3}$ в равностороннем треугольнике и в правильном шестиугольнике

Равносторонний треугольник является правильным треугольником, так как его три стороны и три угла равны. Если взять сторону равную 1 и применить теорему Пифагора, то высота такого треугольника будет равна

$$\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

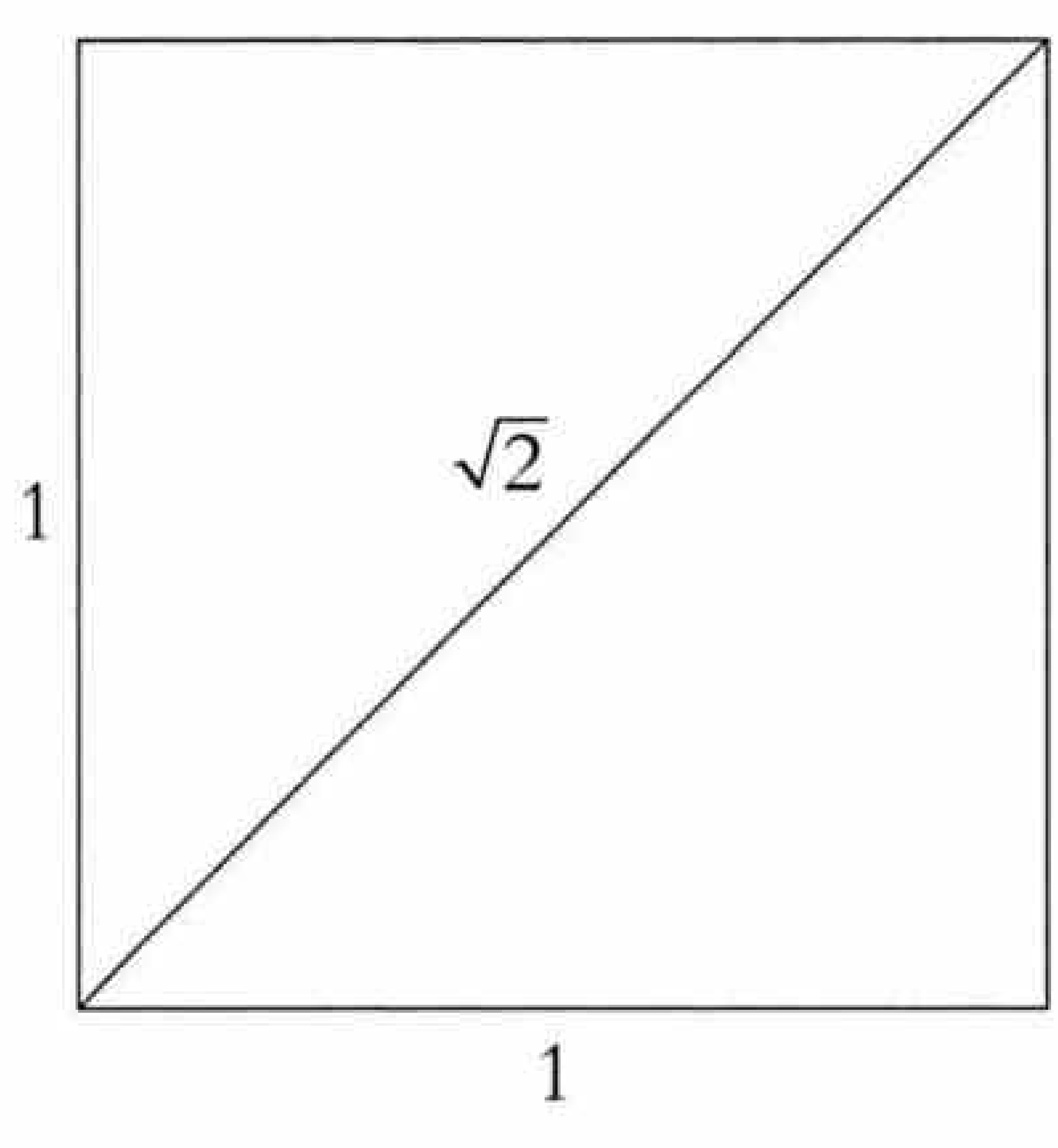
Тогда площадь такого треугольника составит $\sqrt{3}/4$.

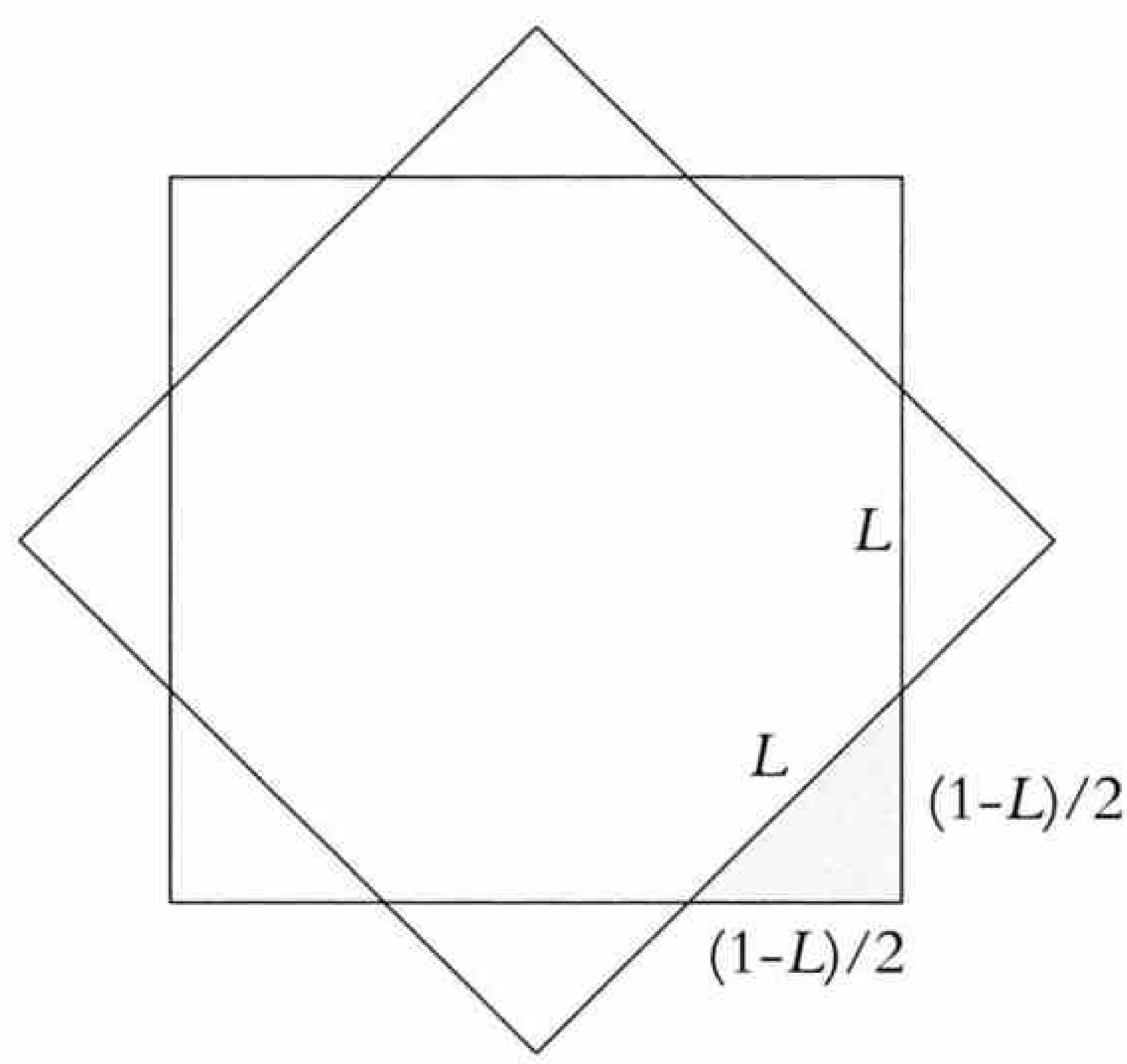




Соединив два таких треугольника, мы получим ромб с диагоналями 1 и $\sqrt{3}$. Шесть таких треугольников образуют правильный шестиугольник, апофема (расстояние от центра до стороны) которого равна $\sqrt{3}/2$, а площадь — $3\sqrt{3}/2$.

$\sqrt{2}$ в квадрате и в правильном восьмиугольнике





Диагональ квадрата со стороной 1 равна $\sqrt{2}$. Так как правильный восьмиугольник образован пересечением двух одинаковых квадратов, повернутых друг относительно друга, по теореме Пифагора мы получаем

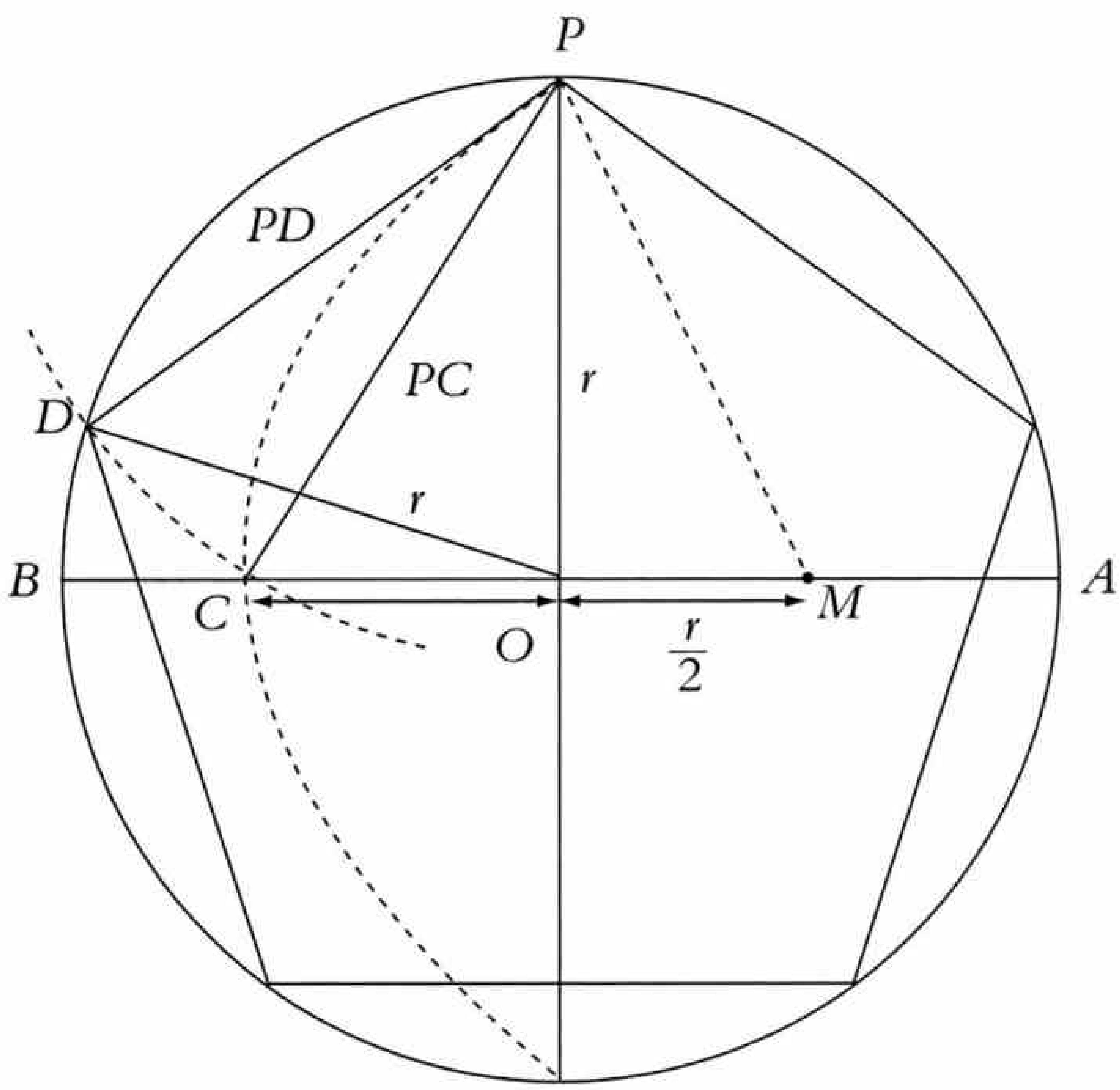
НАЛИЧНЫЕ ИЛИ КАРТА?

Большинство банковских и визитных карточек, парковочные талоны и даже телеэкраны формата 16:9 содержат золотое сечение. Это можно проверить, не проводя измерения и математические расчеты. Достаточно взять две банковские карты одного и того же размера и расположить одну карту горизонтально, а другую — вертикально, выровняв их по нижней стороне. Затем достаточно проверить, проходит ли продолжение диагонали горизонтальной карты через правый верхний угол вертикальной карты.

$$L^2 = 2\left(\frac{1-L}{2}\right)^2,$$

так что $2L^2 = (1 - L)^2 = 1 + L^2 - 2L$ или $L^2 + 2L - 1 = 0$, откуда получаем $L = \sqrt{2} - 1$ (так как нас интересует только положительный корень).

$\sqrt{5}$ и построение правильного пятиугольника



Карандаш, циркуль и линейка — это все, что нужно для построения правильного пятиугольника. Однако без теоремы Пифагора эта фигура просто не получится.

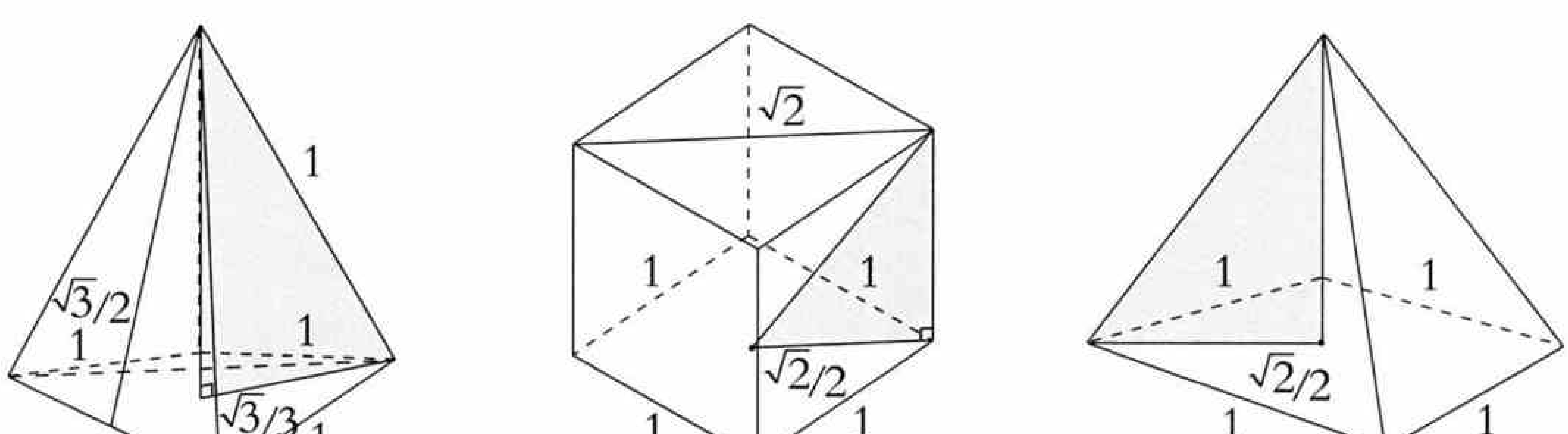
Проведем окружность с центром O и радиусом r и отметим на радиусе OA середину M. Затем проведем дугу окружности с центром в точке M и радиусом PM, которая пересекает радиус OB в точке C. Далее проведем дугу окружности с центром в точке P и радиусом PC. Точку пересечения этой дуги с исходной окружностью обозначим D. $PD = PC$ по построению. Покажем, что PD — сторона правильного пятиугольника, вписанного в исходную окружность. Чтобы это доказать, мы дважды применим теорему Пифагора.

$$PM = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = r\sqrt{5}/2,$$

$$PC^2 = OP^2 + OC^2 = r^2 + \left(PM - \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 r^2.$$

Чтобы проверить, что отрезок PD будет стороной правильного пятиугольника, вписанного в окружность, рассмотрим на предыдущем рисунке треугольник ODP. Нам остается доказать, что угол O этого треугольника равен 72°, или $360^\circ/5$. Для доказательства можно воспользоваться предыдущим равенством для PC^2, теоремой косинусов в треугольнике ODP, формулой двойного угла и тем фактом, что $\cos 36^\circ = \varphi/2$, где φ — золотое сечение, задаваемое формулой $(\sqrt{5}+1)/2$.

Аналогичным образом можно найти числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$... и т. д. в различных многогранниках. Квадратные корни содержатся не только на гранях многоугольников, но и на диагоналях, высотах и их проекциях.



На первом рисунке мы видим тетраэдр с ребром 1. Теорема Пифагора позволяет вычислить его высоту по формуле

$$\sqrt{1^2 - (\sqrt{3}/3)^2} = \sqrt{6}/3.$$

То же самое можно сделать для куба и пирамиды, так как теорема позволяет посчитать длины отрезков для всевозможных фигур.

Пифагорейская космогония и многогранники

В трудах ученика Пифагора Филолая Кротонского, неоплатоника Прокла и византийца Симпликия часто упоминаются пифагорейские связи между четырьмя элементами — огнем, землей, воздухом и водой — и правильными многогранниками: тетраэдром, кубом, октаэдром и икосаэдром соответственно. В этот ряд входит и пятый многогранник, додекаэдр, который символизирует всю Вселенную. Его 12 граней являются пятиугольниками, а это значит, что они содержат пятиконечную звезду, пифагорейский символ. Хотя уже пифагорейцы знали об этих многогранниках и подчеркивали их космологическую символику, именно Платон был самым большим сторонником этих идей. В честь него эти многогранники получили название «платоновы тела».

В 12-й и 13-й книгах «Начал» Евклида упоминаются длины ребер пяти правильных многогранников. Вписанные в сферу радиуса 1, эти многогранники имеют ребра длиной $2\sqrt{6}/3$ (тетраэдр), $\sqrt{2}$ (октаэдр), $2\sqrt{3}/3$ (куб), $\sqrt{10(5-\sqrt{5})}/5$ (икосаэдр) и $(\sqrt{15}-\sqrt{3})/3$ (додекаэдр).

Эти многогранники привлекали внимание таких художников, как Пьеро делла Франческа, Лука Пачоли, Леонардо да Винчи и Альбрехт Дюрер. Кроме того, астроном Иоганн Кеплер построил на их основе модель Солнечной системы в эпоху, когда было известно только шесть планет.

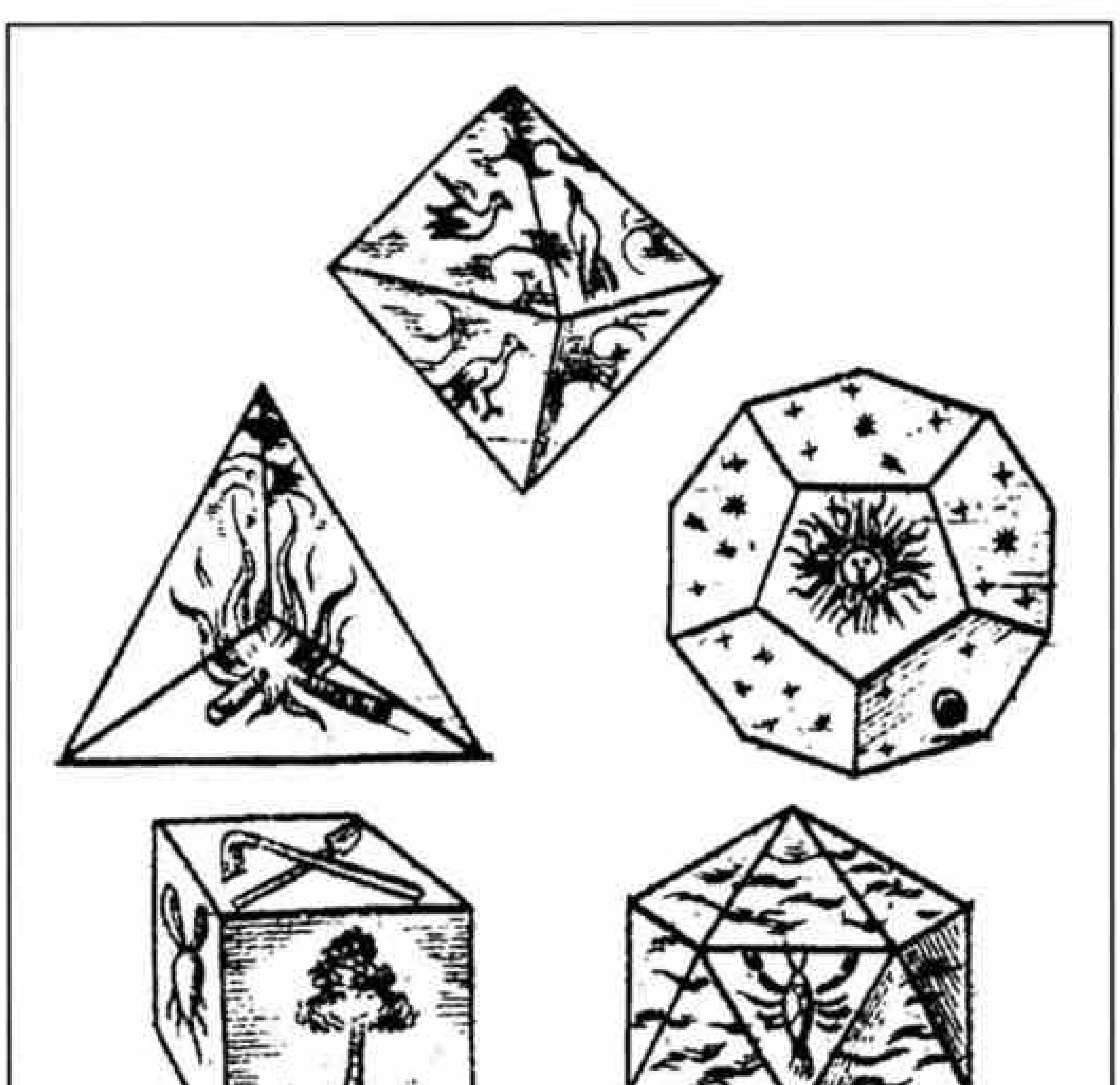
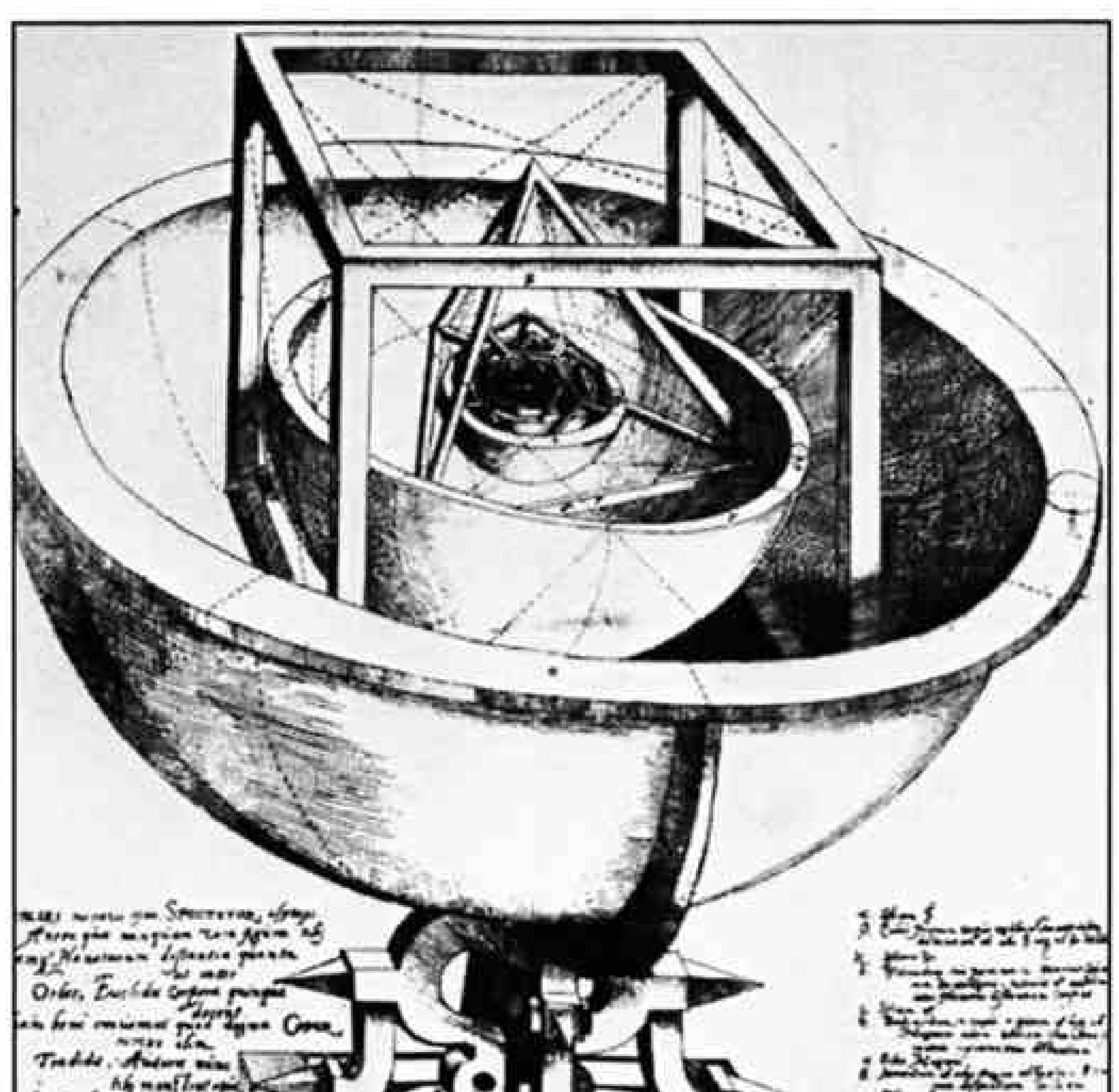


Иллюстрация из книги Кеплера «Гармония мира» (Harmonice Mundi, 1619).



Кеплеровская модель Солнечной системы из книги «Тайна мира» (Mysterium Cosmographicum, 1596).

Квадратные корни, искусство и дизайн

Ученые и философы с благоговением относятся к проявлениям квадратных корней в природе. Их удивление вполне понятно. На протяжении многих веков человеческий разум развивал сложные математические инструменты, с помощью которых можно было попытаться понять мир, в то время как природа с невероятной легкостью создает пропорции, которые превосходят самые сложные интеллектуальные конструкции человека. Тем не менее ученые вскоре отложили благоговение в сторону и посвятили себя углубленному изучению этих пропорций и отношений. Они стремились использовать эти знания для решения одной из главных задач: создания новых миров.

Живопись, скульптура и архитектура используют геометрию для создания различных форм на плоскости или в трехмерном пространстве. Квадратные корни $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ и, конечно, золотое сечение появляются в пропорциях этих фигур.

Можно сказать, что на протяжении всей истории эстетические решения идут в ногу с теоретическими знаниями и техническими возможностями. Используя геометрические знания, можно в общих чертах описать историю развития искусства с точки зрения развития математики.

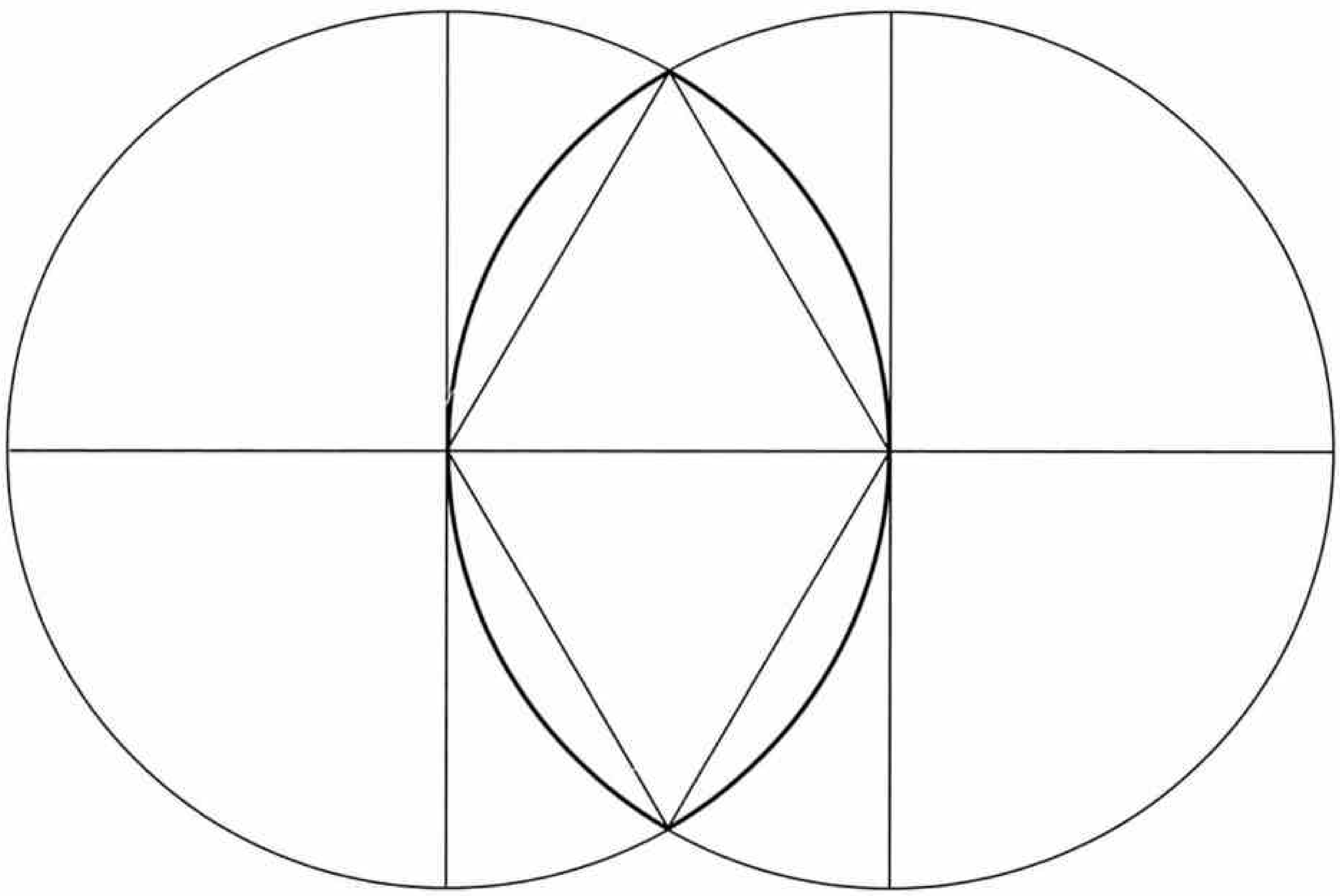
С древних времен и до средневекового Рима расчерчивание холста на квадраты и использование простых пропорций (1/3, 1/4, 1/2, 2/3, 3/4...) было обычным явлением. Во время готического периода широко применялись геометрические рисунки, сделанные с помощью линейки и циркуля, что привело к расцвету многоугольных форм, в которых, как мы уже видели, появляются квадратные корни. Типичная

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ ПРИ РАССМАТРИВАНИИ СТАТУЙ

Немецкий астроном и математик Йоганн Мюллер (1436–1476), известный как Региомонтан, сформулировал в XV в. знаменитую задачу, получившую название «задача Региомонтана». На постаменте стоит большая статуя, так что верхний край постамента расположен выше точки зрения наблюдателя. Где должен стоять наблюдатель, чтобы увидеть статую целиком? Другими словами, под каким максимальным углом можно видеть всю статую? Эта задача считается одной из первых задач на нахождение максимума.

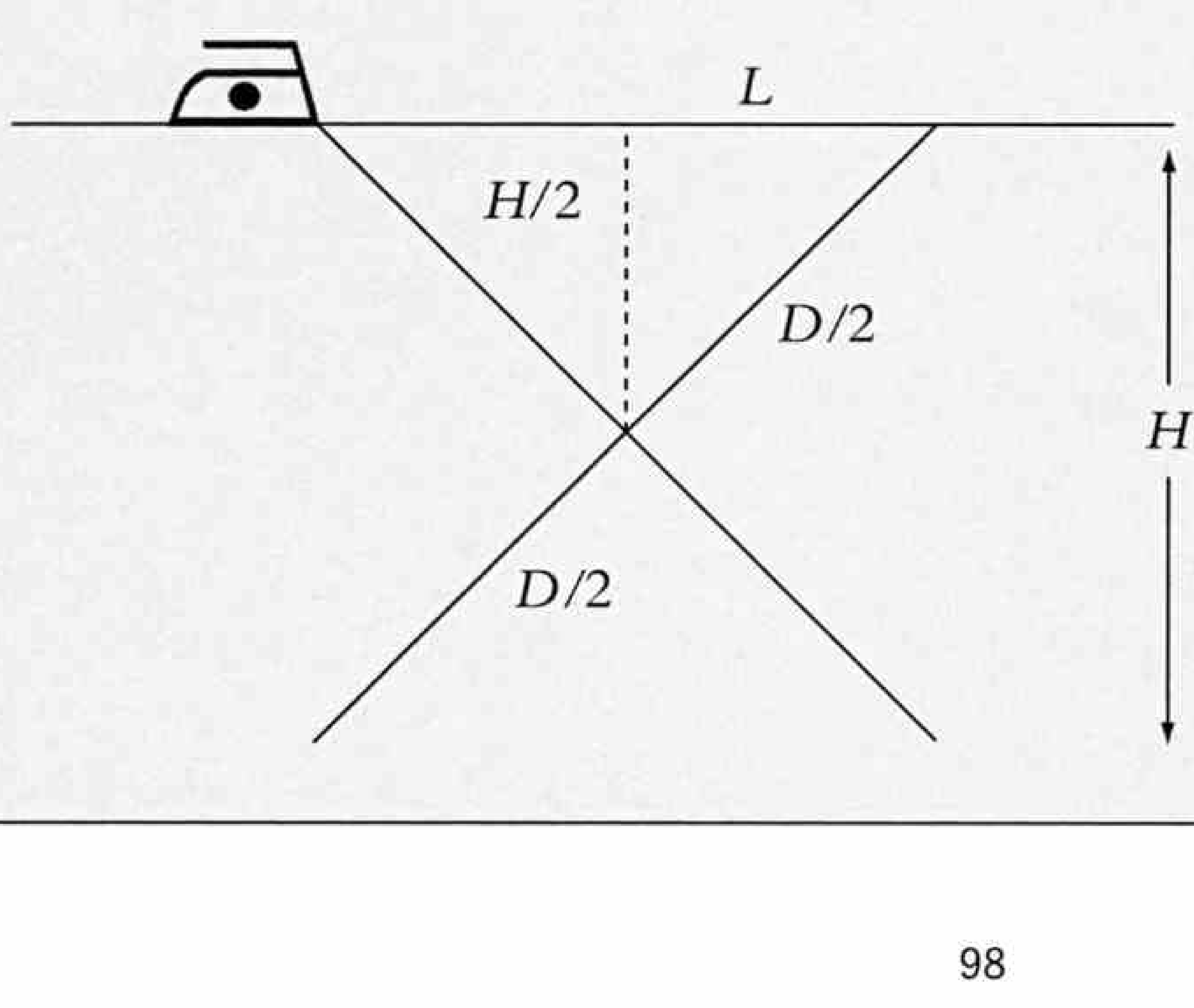
Если верхний край постамента высотой a расположен выше точки зрения наблюдателя, и вершина статуи находится на высоте b, то максимальный угол зрения соответствует расстоянию $\sqrt{ab}$ от постамента.

готическая арка представляет собой две дуги окружностей, центры которых находятся в углах равностороннего треугольника.

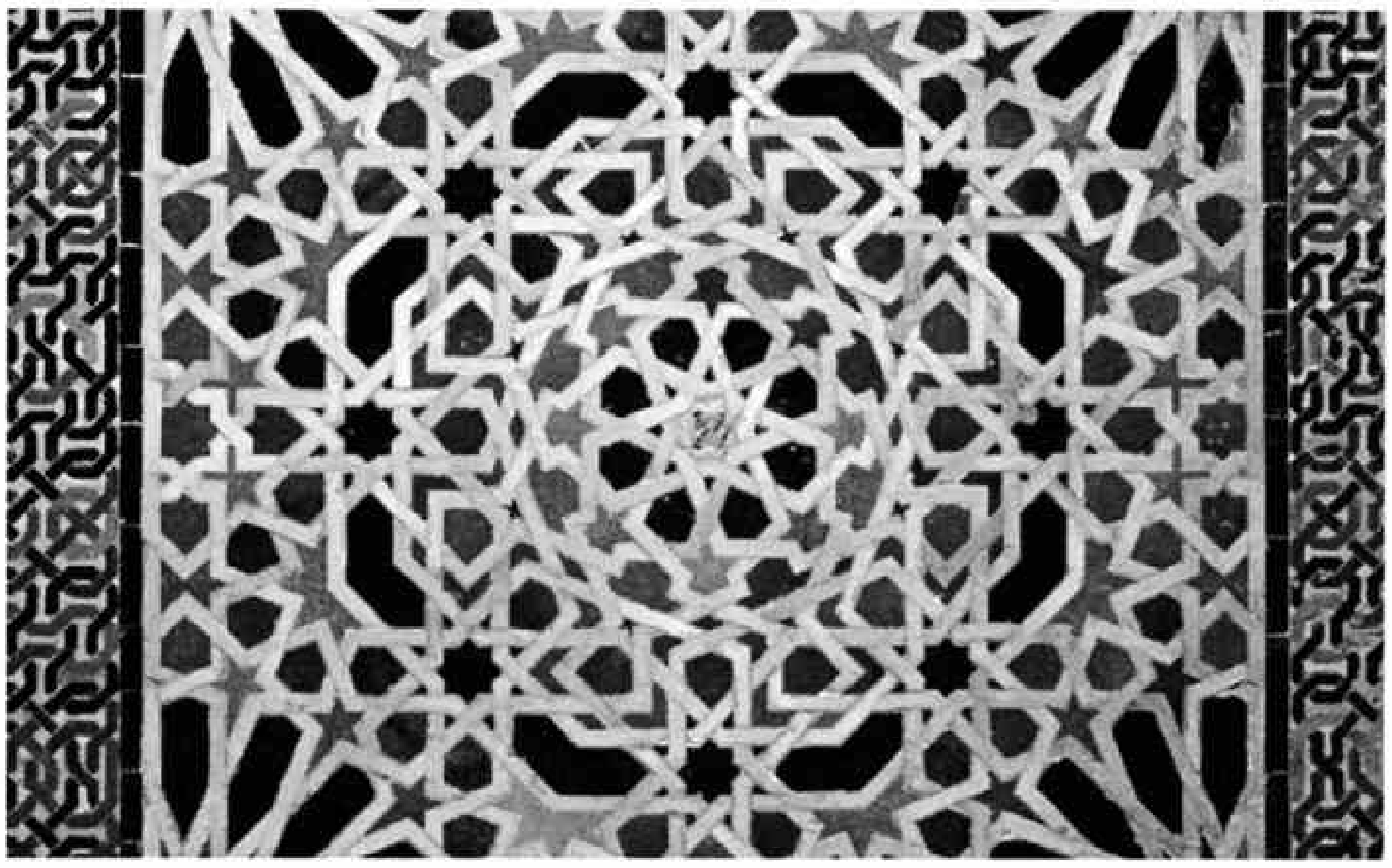


ПИФАГОР И ГЛАДИЛЬНАЯ ДОСКА

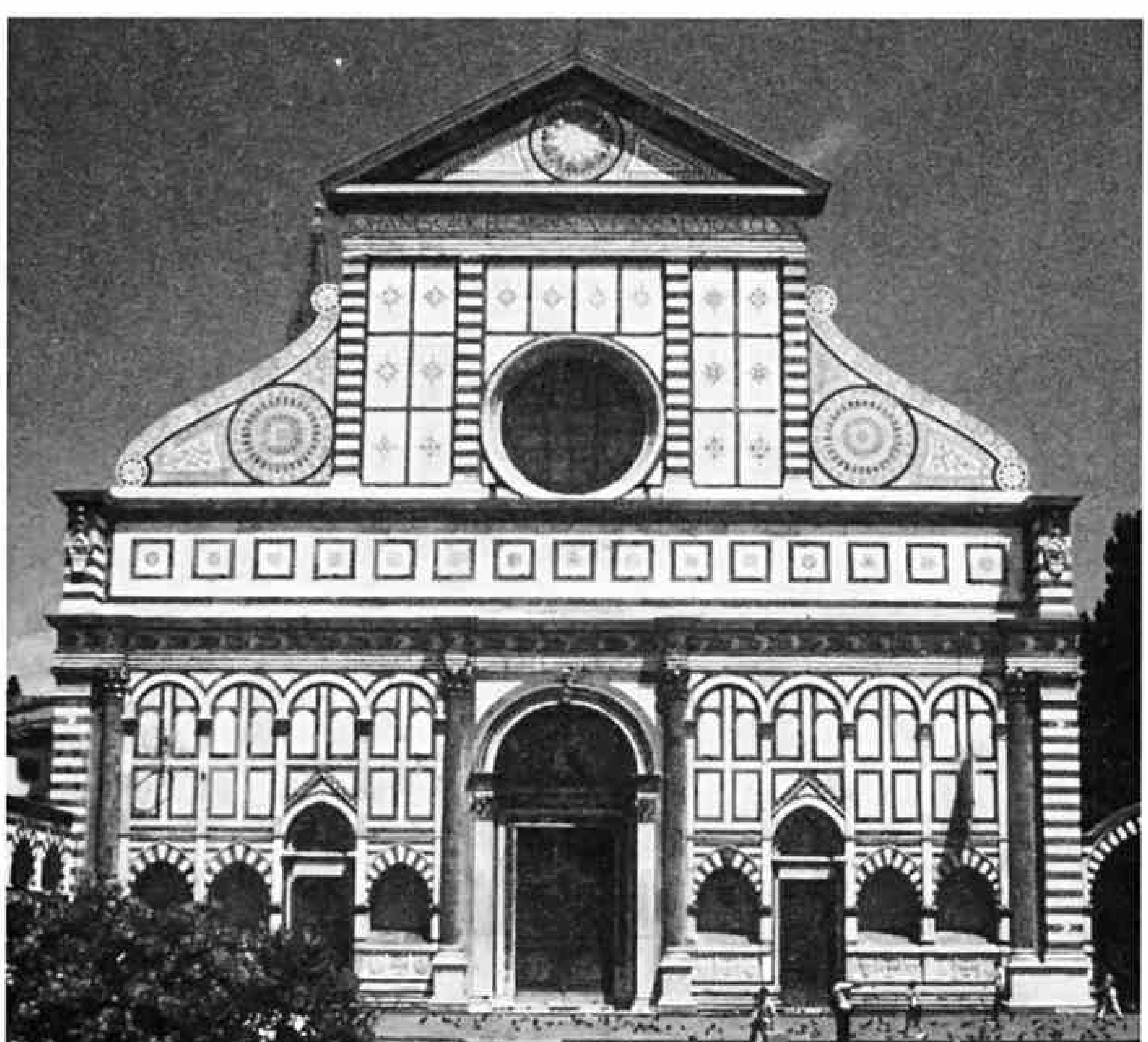
Гладильная доска имеет свои функции и особенности. Но для нашего математического анализа мы рассмотрим лишь одно ее свойство: гладильная доска может складываться. У нее имеются раздвижные ножки, которые позволяют расположить ее на разной высоте. Кто бы подумал, что и тут появляется теорема Пифагора! Но мы видим, что скрещенные ножки гладильной доски образуют треугольники. В соответствии с рисунком ниже и теоремой Пифагора, соотношение $(D/2)^2 - (H/2)^2 = L^2$ позволяет вычислить длину любого отрезка на основе двух других.



Судя по сохранившимся архитектурным сооружениям, последняя мусульманская династия Насридов, правившая Гранадским эмиратом в южной Испании, особенно ценила геометрию. Именно тогда был построен дворец Альгамбра, жемчужина мусульманской архитектуры, в котором различные геометрические формы используются не только в оформлении, но и в конструкции самого здания, в восьмиугольной основе купола. Насридская мозаика основана на квадратах, содержащих $\sqrt{2}$, а в рисунках с пяти- и десятиугольниками появляется число $\sqrt{5}$, другими словами, золотое сечение.

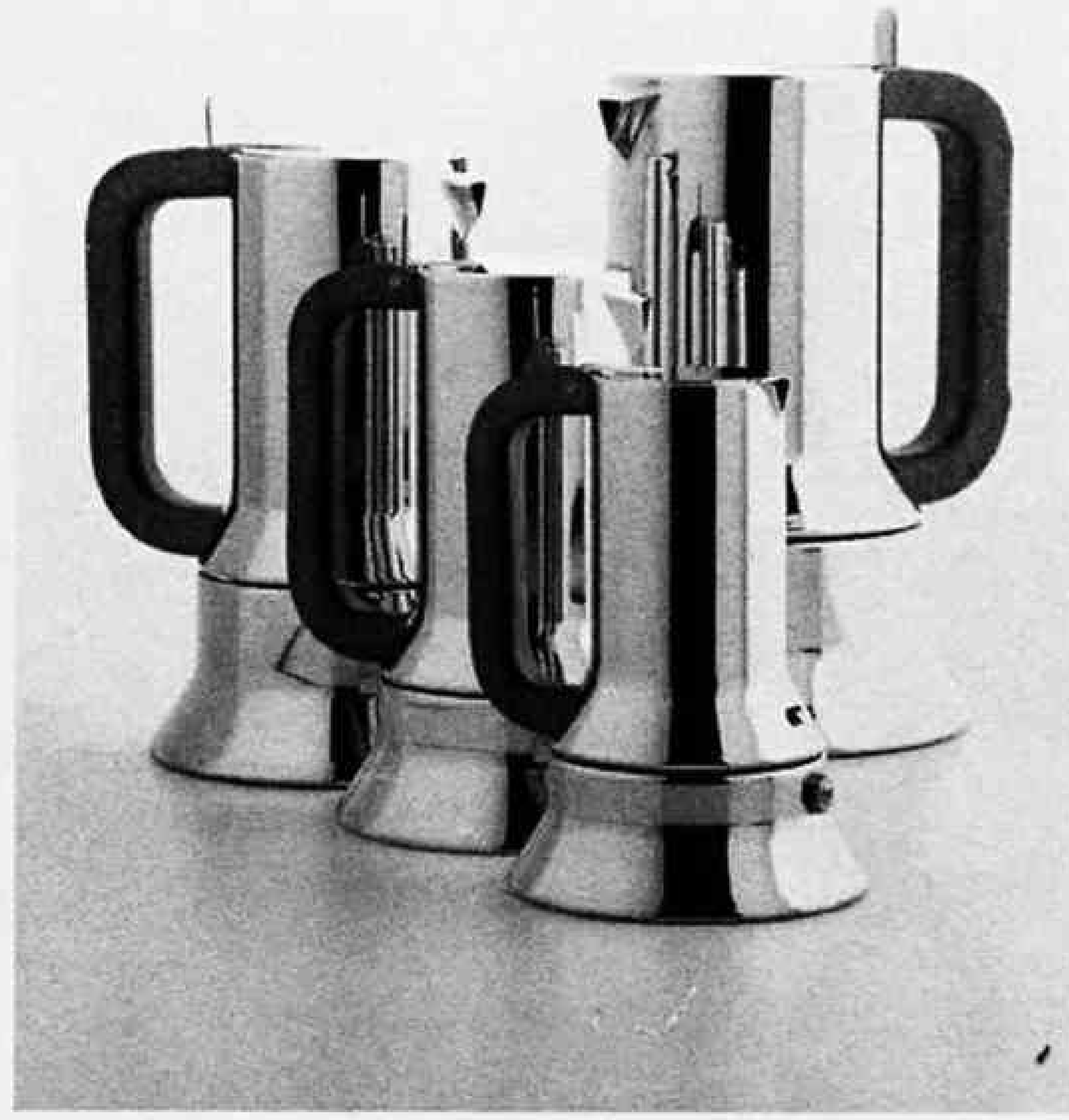


Насридские геометрические орнаменты из Альгамбры.



Санта-Мария-Новелла во Флоренции. Фасад церкви содержит прямоугольники с золотой пропорцией.

$\sqrt{3}$ И КОФЕВАРКА ALESSI

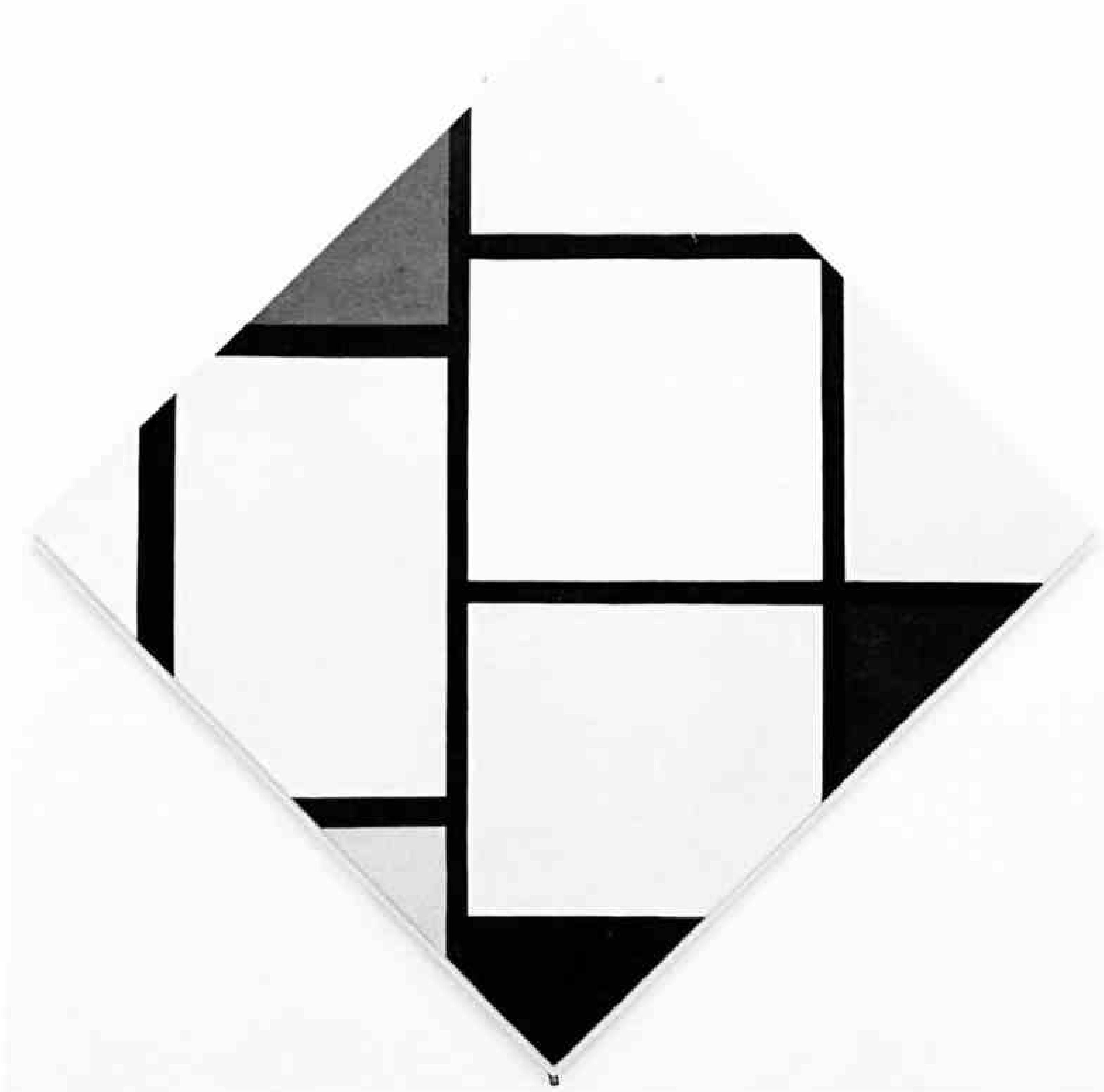


Дизайн этой знаменитой кофеварки итальянского дизайнерского дома Alessi основан на умной комбинации конусов и цилиндров. К тому же ее металлическая ручка является также и защелкой, что позволяет не использовать пластиковые зажимы, которые могут пострадать от высокой температуры. Помимо всего прочего, эта кофеварка имеет существенное нововведение: кофе наливается через отверстие, которое имеет форму идеального равностороннего треугольника. Если как следует подумать, то станет ясно, что круглая форма, такая как горлышко бутылки, несмотря на ее широкое распространение, — не самый подходящий вариант для наливания жидкости в стакан. Равносторонний треугольник, связанный с числом $\sqrt{3}$, позволяет контролировать поток наливаемого кофе, направляя его непосредственно в чашку.

«Витрувианский человек», знаменитый рисунок Леонардо да Винчи, изображает пропорции человеческой фигуры, вписанной в квадрат и в пятиугольник. По аналогии с ним французский архитектор Ле Корбюзье придумал «Модулор» — человеческую фигуру, связанную с новыми единицами измерения. Посредством этой системы Ле Корбюзье возвращается к классической идее связи между пропорциями зданий и их обитателей. Пропорции «Модулора» основаны на золотом сечении и его степенях, что позволило создать образ сверхчеловека.

Несмотря на связь с эпохой Возрождения, золотое сечение по-прежнему играет важную роль в современной архитектуре. Более того, когда, казалось бы, отказ от реализма должен был привести к отрицанию всех пропорций, именно свойства абстрактных геометрических фигур и связанные с ними пропорции выходят на первый план.

В качестве примера можно взять любую из работ Пита Мондриана (1872–1944), нидерландского художника-авангардиста, члена художественной группы «Стиль», или не поддающегося классификации Пауля Клее (1879–1940).



Картина Мондриана, которая содержит число $\sqrt{2}$.

Удивительный треугольник Рёло состоит из трех равных дуг окружностей, проведенных из углов равностороннего треугольника через два противоположных угла. Эта фигура содержит число $\sqrt{3}$ и ранее использовалась в готической кладке. Ее открыл немецкий инженер Франц Рёло (1829–1905). Это кривая постоянной ширины, ограниченная двумя касательными к ней параллельными линиями. Она используется во многих механизмах, таких как двигатель Ванкеля во многих бензиновых автомобилях, или в особых сверлах, с помощью которых, к удивлению наблюдателя, получаются почти квадратные отверстия. Некоторые конфеты также имеют такую форму, чтобы их удобнее было держать во рту. Очень часто эти формы используются при сервировке стола. Современный дизайн отказался от тирании круглой посуды (хотя самое важное для посуды, чтобы из нее не выливалось содержимое).

Эти новые и удобные формы используются при чеканке монет, только не круглых, а состоящих из пяти или семи дуг окружностей, связанных с правильными многоугольниками. Такие кривые имеют постоянную ширину, а это означает, что монеты не застревают в торговых автоматах. Такой дизайн основан на числе $\sqrt{5}$ и других квадратных корнях.

Глава 5

Удивительные применения теоремы Пифагора

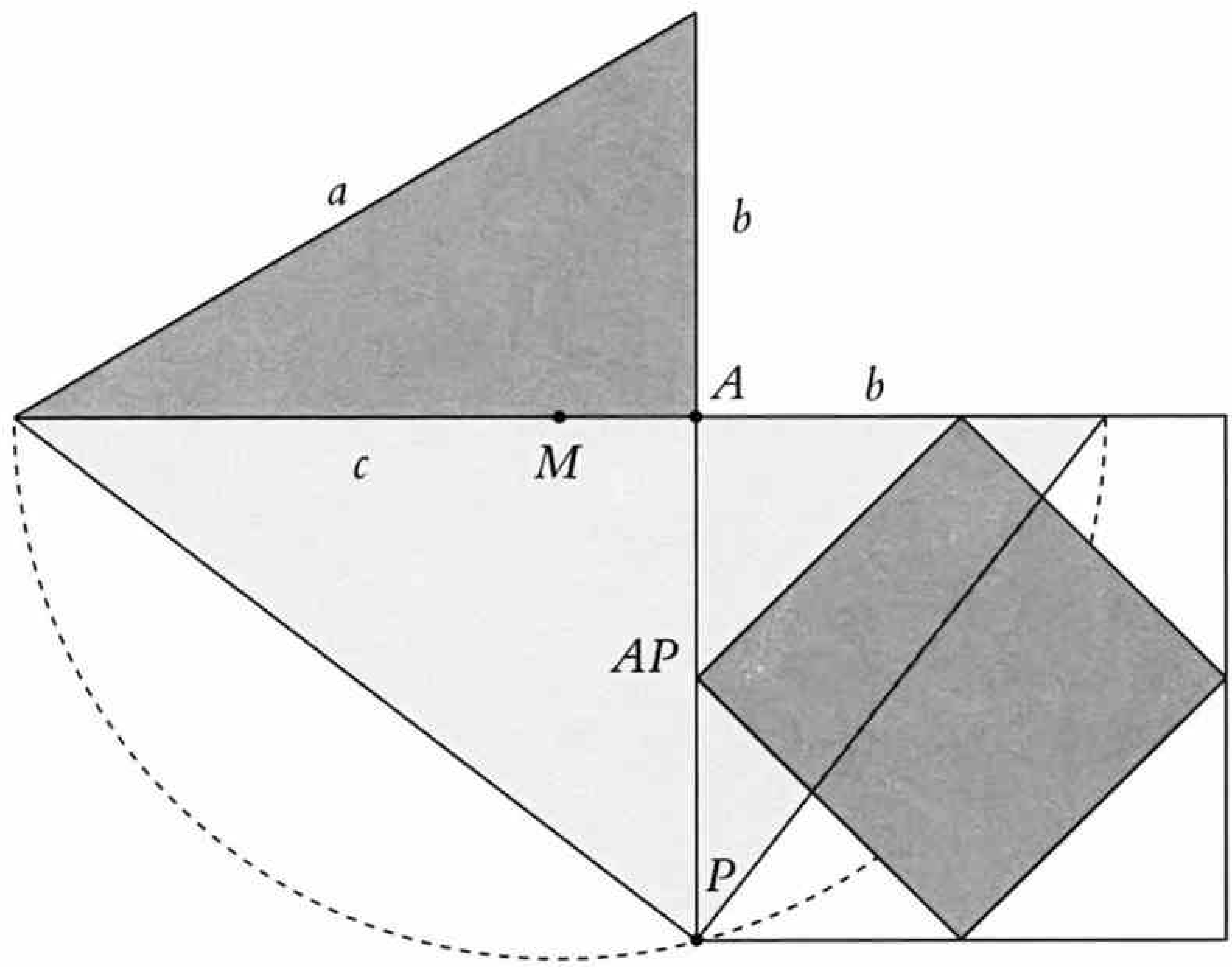
Геометрия является знанием того,
что существует вечно.
Пифагор

Чувство изумления, которое вызывает теорема Пифагора, объясняется прежде всего количеством самых разнообразных ее применений. Еще в эпоху древних греков она была окутана мистическим ореолом, который не развеялся и до сих пор. Если внимательно проследить историю ее развития, можно заметить, что теорема Пифагора появляется не только в привычных областях, таких как геометрия, где она элегантно решает повседневные задачи, но и в самых неожиданных сферах, таких как искусство. Однако, хотя все вроде бы свидетельствует о противном, без знания этой теоремы наша жизнь вовсе не изменилась бы. Тем не менее присутствие теоремы Пифагора в природе и почти во всех сферах человеческой деятельности не может оставаться незамеченным.

Квадратура фигур

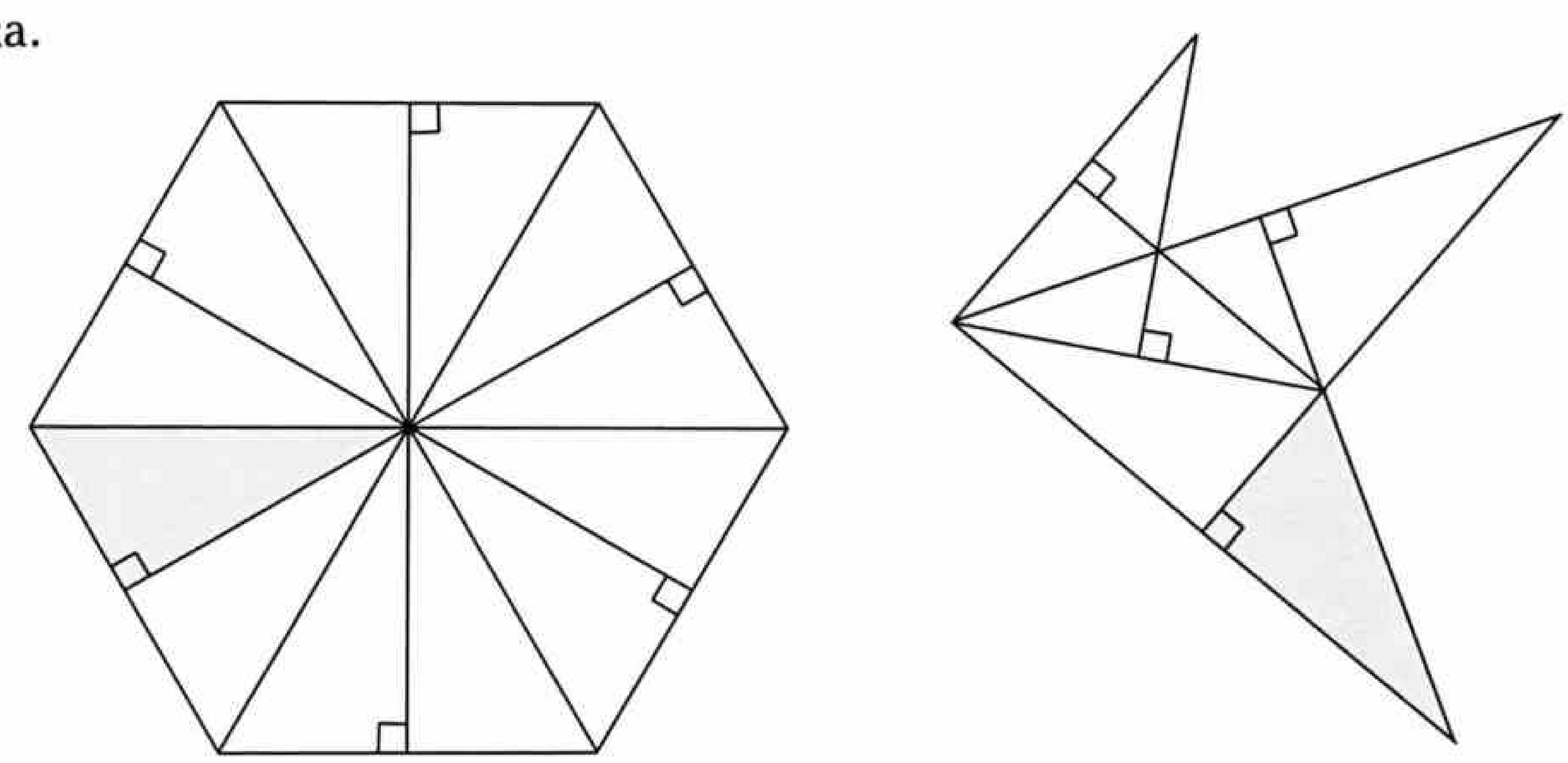
Относительная простота вычисления площади квадрата приводила к попыткам решить общую задачу о квадратуре других фигур. Квадратура фигуры — это построение квадрата с той же площадью, что и у данной фигуры, с помощью только циркуля и линейки. Если бы можно было построить такие квадраты, то это дало бы нам ценный графический инструмент, позволяющий решить важную задачу вычисления площадей. При данном линейном размере L (не важно, в каких единицах длины: футах, дюймах или метрах) было бы сразу возможно вычислить площадь поверхности L^2, потому что эта площадь была бы равна площади квадрата со стороной L (в квадратных футах, в квадратных дюймах или в квадратных метрах). Теорема Пифагора помогает при решении задач о квадратуре фигур.

Сначала мы рассмотрим, как решить задачу о квадратуре треугольника. Возьмем прямоугольный треугольник с катетами b, c и гипотенузой a. Как показано на рисунке, продолжим отрезок c на расстояние b и обозначим точкой M середину отрезка $c + b$.



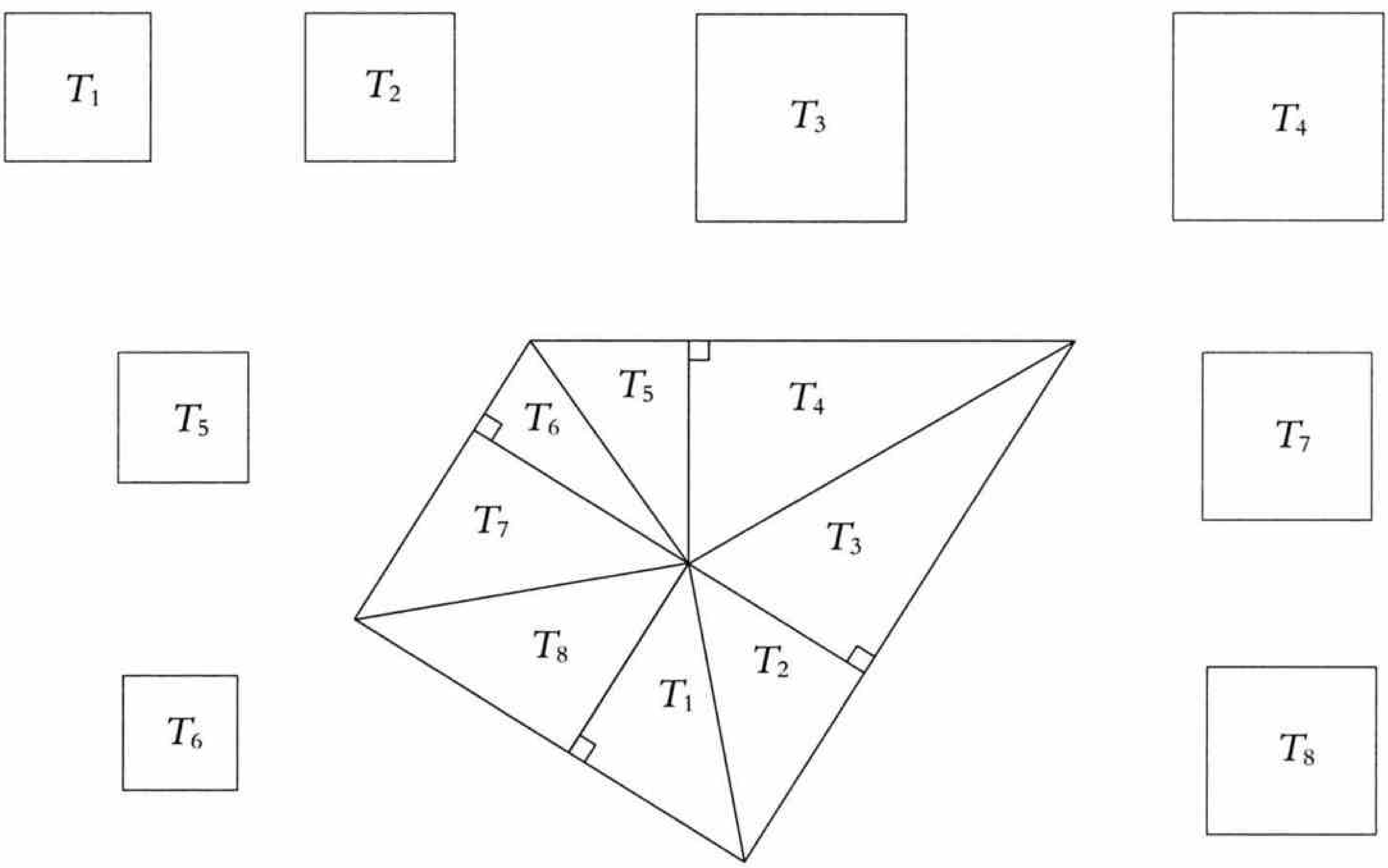
Затем проведем окружность с центром в точке M и радиусом $(b + c)/2$. Теперь продолжим катет b от точки A до точки P на окружности. Отрезок AP будет высотой прямоугольного треугольника с гипотенузой $b + c$, и по теореме о высоте $AP = \sqrt{bc}$. Таким образом, квадрат со стороной $\sqrt{bc}$ будет иметь площадь bc, а другой квадрат, с вершинами в серединах его сторон (темно-серый на рисунке), будет иметь площадь в два раза меньше, $bc/2$, то есть площадь, равную площади исходного треугольника. Таким образом можно решить задачу о квадратуре любого прямоугольного треугольника.

Рассмотрим теперь эту задачу для любого многоугольника, например шестиугольника.



Как показано на рисунке выше, любой многоугольник всегда можно разбить на треугольники, и затем каждый из этих треугольников всегда можно разделить на два прямоугольных треугольника. Таким образом, всегда можно вычислить площадь любого многоугольника, сведя задачу к квадратуре входящих в его состав прямоугольных треугольников.

Разделив шестиугольник на прямоугольные треугольники, мы получим в результате ряд квадратов, сумма площадей которых равна площади исходной фигуры (см. рисунок ниже). Теперь можно использовать их, чтобы решить задачу о квадратуре многоугольника. Из маленьких квадратов мы построим один большой квадрат, площадь которого равна сумме их площадей. И снова на сцене появляется теорема Пифагора. Она — ключевой элемент при решении задачи о квадратуре различных фигур.

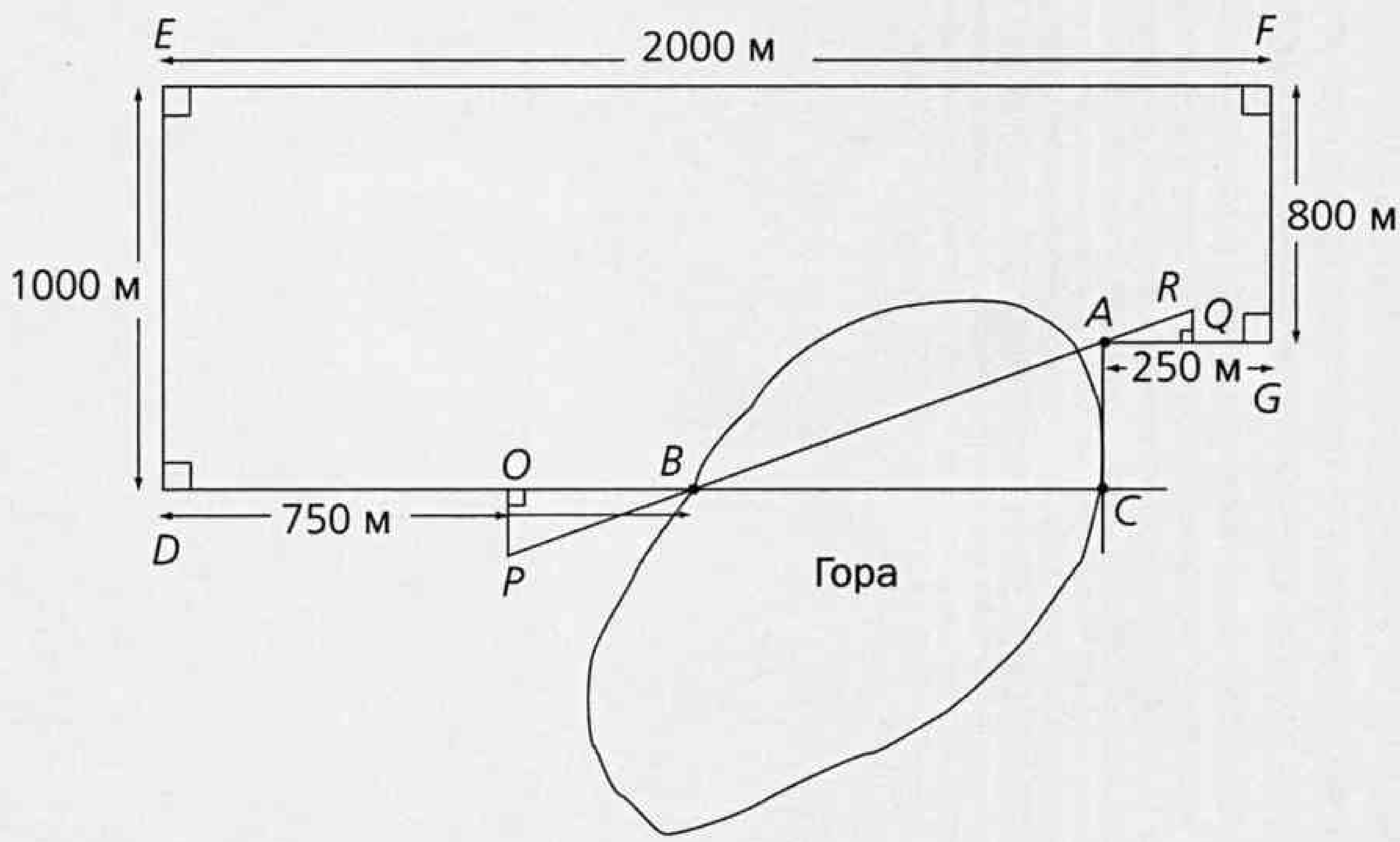


Однако для одной фигуры этот метод не работает. Это выяснилось, когда встал следующий логичный вопрос: как найти квадратуру круга? Лучше всего даже и не пытаться. Многие ученые потратили на достижение этой химерной цели всю жизнь, что в сумме составляет нескольких столетий. В алхимии такой несбыточной мечтой было превращение неблагородных металлов в золото, а в математике подобной задачей является квадратура круга. Невозможность решения связана с тем, что круг нельзя разделить на треугольники. Можно попытаться превратить круг в многоугольник с большим количеством крошечных сторон, а затем посчитать сумму их площадей,

САМОССКИЙ ТУННЕЛЬ

В 1882 г. группа археологов обнаружила на греческом острове Самос туннель, которому было 3500 лет. Он был построен для доставки воды в столицу Самос сквозь гору Кастро. Древнегреческий историк Геродот называл этот туннель невероятным технологическим чудом той эпохи. Туннель имеет 1 км в длину, 2 м в ширину и 2 м в высоту.

Его открытие вызвало удивление среди инженеров и математиков, поскольку здесь решалась особая задача. Совсем не трудно начать копать туннель в одном месте, пока случайно не выйдешь на поверхность где-то в другом месте. Однако в этом случае задача состояла в том, чтобы собирать воду в конкретной точке и провести ее в другую определенную точку. Туннель должен был пройти через гору от начальной точки *A* до конечной точки *B*. Как могло случиться, чтобы две команды рабочих, копая в противоположных направлениях, смогли встретиться в середине горы без лазерного оборудования и GPS? Математическое сообщество попыталось объяснить эту тайну. Решение оказалось чисто геометрическим.

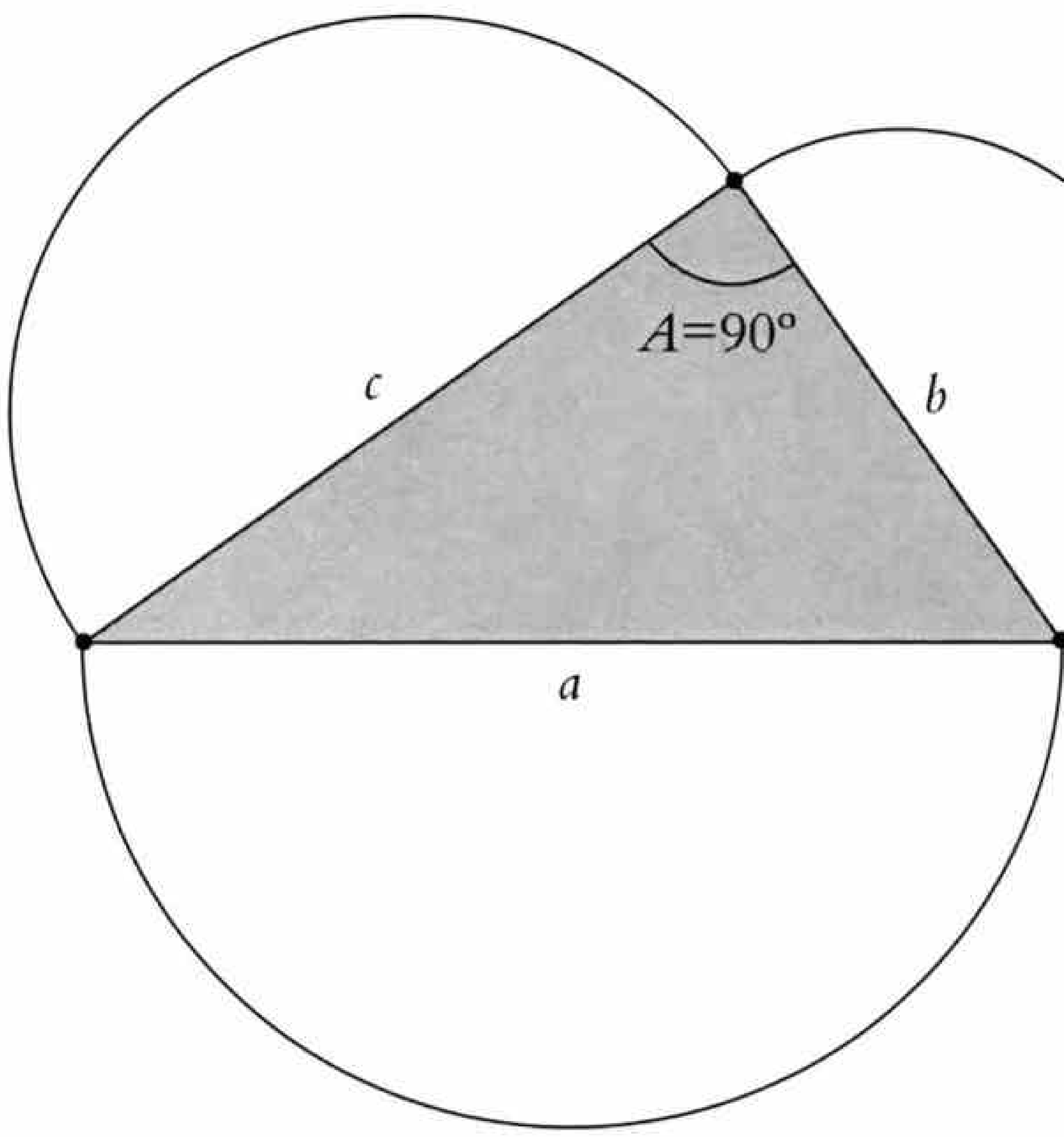


Из точки *B* надо пройти расстояние *BD* (750 м на рисунке), повернуть на 90°, пройти расстояние *DE* (1 000 м), повернуть на 90°, пройти расстояние *EF* (2 000 м), снова повернуть, и мы получим *FG* (800 м), так что отрезок *AG* (250 м на рисунке) перпендикулярен *FG*. (Идея состояла в том, чтобы двигаться по перпендикулярным отрезкам, проходя расстояния, которые можно пройти по внешней стороне горы). Здесь *BC* = 1 000 м и *AC* = 200 м. По теореме Пифагора, туннель *AB* будет равен 1 019,8 м. Более того, если построить треугольник *BOP*, подобный треугольнику *BAC* (например, *BO* = 50 м, *OP* = 10 м), и треугольник *ARQ* с теми же пропорциями, мы получим, что туннель надо копать по линии, продолжающей *PB* и *RA*.

но это дает лишь приближенное значение. Эту задачу невозможно решить с помощью циркуля и линейки. Сегодня выражение «квадратура круга» используется, когда упоминают различные невыполнимые задачи, решать которые не имеет смысла.

Сумма подобных фигур

Мы уже видели, что теорема Пифагора позволяет графически найти сумму квадратов. Три квадрата на сторонах треугольника являются тремя пропорциональными фигурами. Но что произойдет, если эти квадраты заменить на другие фигуры, например полукруги?



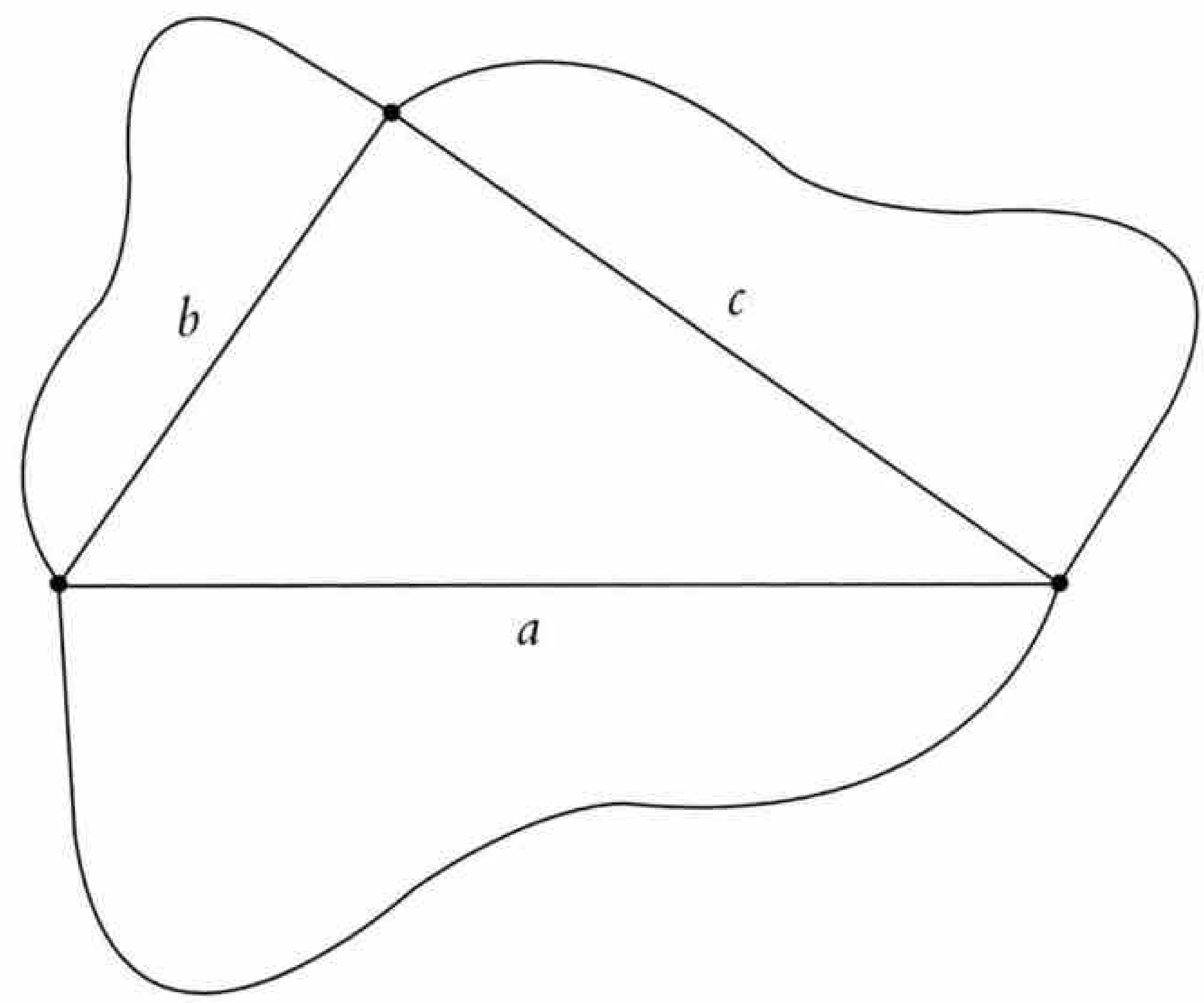
По теореме Пифагора ($a^2 = b^2 + c^2$), мы имеем:

$$S_b + S_c = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}\pi\frac{c^2}{4} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b^2+c^2}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

где S_b — площадь полукруга b, а S_c — площадь полукруга c. Таким образом, сумма площадей полукругов на катетах равна площади полукруга на гипотенузе.

А что произойдет, если полукруг заменить более сложной криволинейной фигурой?



Эту задачу можно решить следующим образом. Три изображенные фигуры на самом деле имеют одинаковую форму. Это означает, что их площади, которые мы обозначим S_a (фигуры на стороне a), S_b (фигуры на стороне b) и S_c (фигуры на стороне c), связаны между собой как квадраты отношений соответствующих длин отрезков. Например, если число b/a обозначает отношение длины b к a, а c/a — длины c к a, то

$$S_b + S_c = \left(\frac{b}{a}\right)^2 S_a + \left(\frac{c}{a}\right)^2 S_a = \frac{b^2}{a^2}\,S_a + \frac{c^2}{a^2}\,S_a = \left(\frac{b^2+c^2}{a^2}\right) S_a = \frac{a^2}{a^2}\,S_a = S_a.$$

Таким образом, обобщенная теорема Пифагора позволяет графически складывать площади любых подобных фигур, какими бы странными они ни были. Хотя расчеты опираются на классическое доказательство в случае квадратов, теорема работает для множества других фигур.

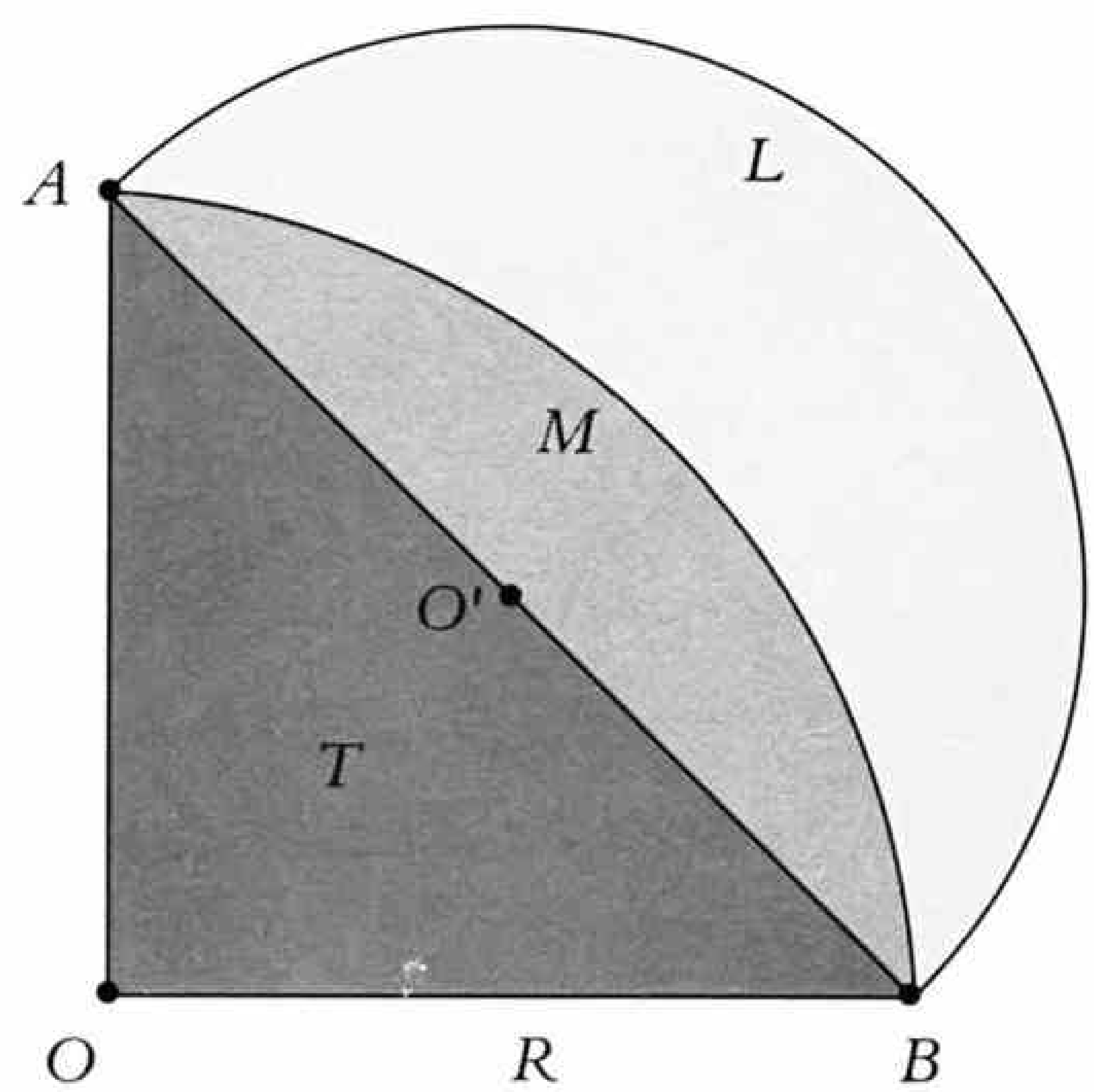
Гиппократовы луночки

С учетом указанных выше доказательств математики смогли с помощью циркуля и линейки решить задачу о квадратуре любых многоугольников. Однако, как бы нелепо это ни звучало сегодня, возникало естественное предположение, что с помощью простейших инструментов можно решить задачу о квадратуре круга, используя либо вписанные в него, либо описанные вокруг него фигуры. Лишь спустя 2 000 лет было доказано, что эту задачу решить невозможно. В то же время на протяжении веков профессионалы и любители тщетно бились над этой проблемой.

ГИППОКРАТ ХИОССКИЙ

Гиппократ Хиосский был одним из первых древнегреческих ученых, написавших подробный трактат по геометрии (примерно в 440 г. до н. э.). Его не следует путать, как это часто бывает, с известным древнегреческим врачом Гиппократом с острова Кос (460–357 гг. до н. э.), имя которого носит врачебная клятва. Гиппократ Хиосский использовал геометрию, чтобы решить задачу об удвоении куба без помощи циркуля и линейки, и наряду со многими другими результатами нашел квадратуру многих фигур.

Однако математическое сообщество ожидал большой сюрприз: гиппократовы луночки. Гениальный Гиппократ Хиосский доказал, что можно решить задачу о квадратуре серповидных фигур, ограниченных дугами двух окружностей. Его доказательство вызвало новую волну отчаянных попыток найти квадратуру круга.



На рисунке выше показана серповидная фигура, ограниченная:

1) четвертью окружности с центром в точке O и радиусом R;
2) полуокружностью радиуса $R\sqrt{2}/2$ с центром в точке O', середине гипотенузы AB.

Если T обозначает площадь прямоугольного треугольника AOB (равную $R^2/2$), L — площадь луночки, а M — площадь области между гипотенузой и луночкой, то

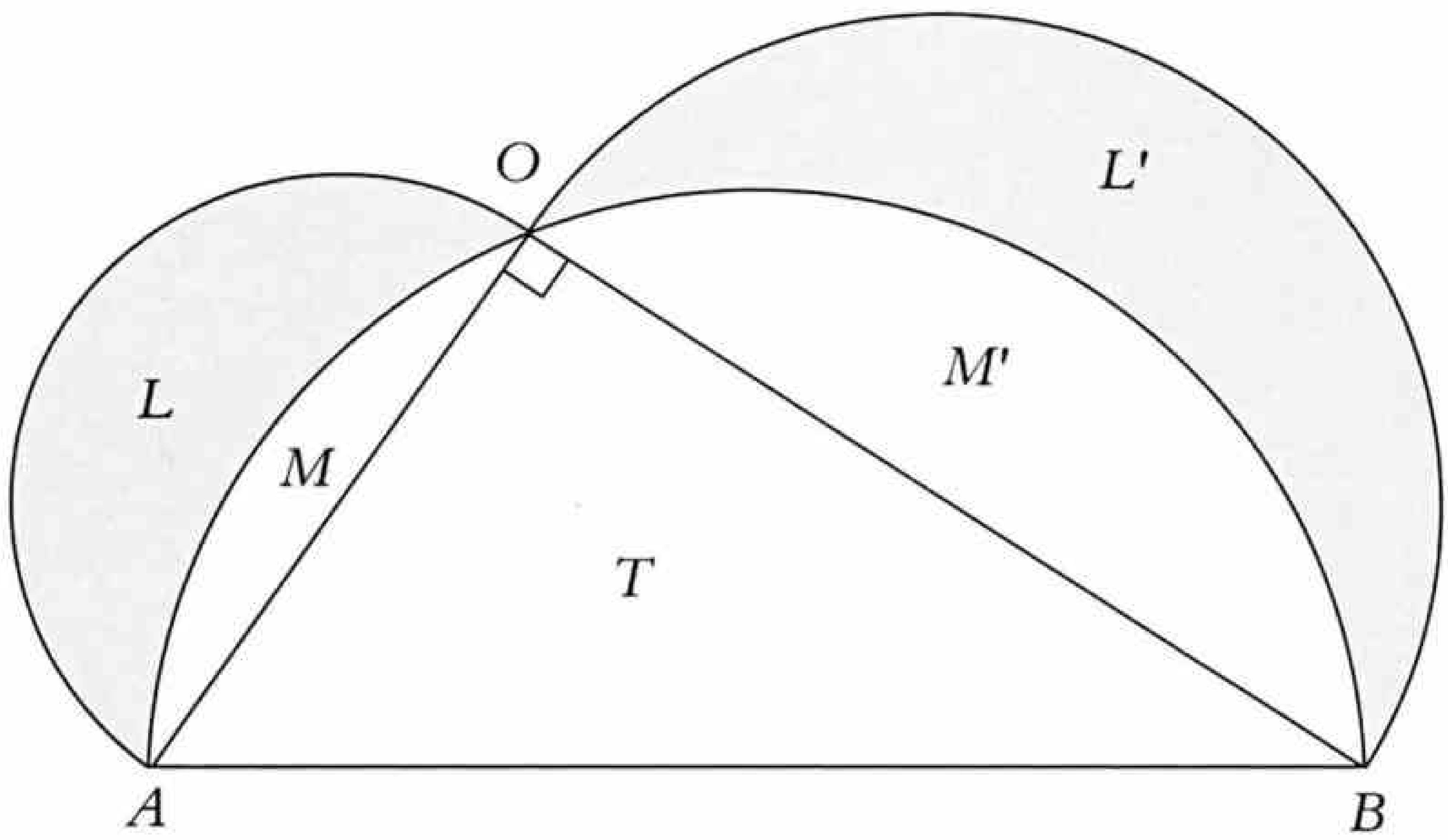
$$L+M=\frac{1}{2}\pi\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}R^2,$$

откуда следует:

$$L = \frac{\pi}{4} R^2 - M = T.$$

Таким образом, площадь луночки равна T, а это значит, что можно найти квадратуру любой луночки.

Но это справедливо не только для гиппократовых луночек. Самое интересное в его доказательстве можно видеть на следующем рисунке:



Площади полукругов на катетах AO и OB равны $L + M$ и $L' + M'$. В предыдущем параграфе мы видели, что сумма площадей полукругов на катетах равна площади полукруга на гипотенузе, площадь которого равна суммарной площади $T + M + M'$, то есть

$$L + M + L' + M' = T + M + M',$$

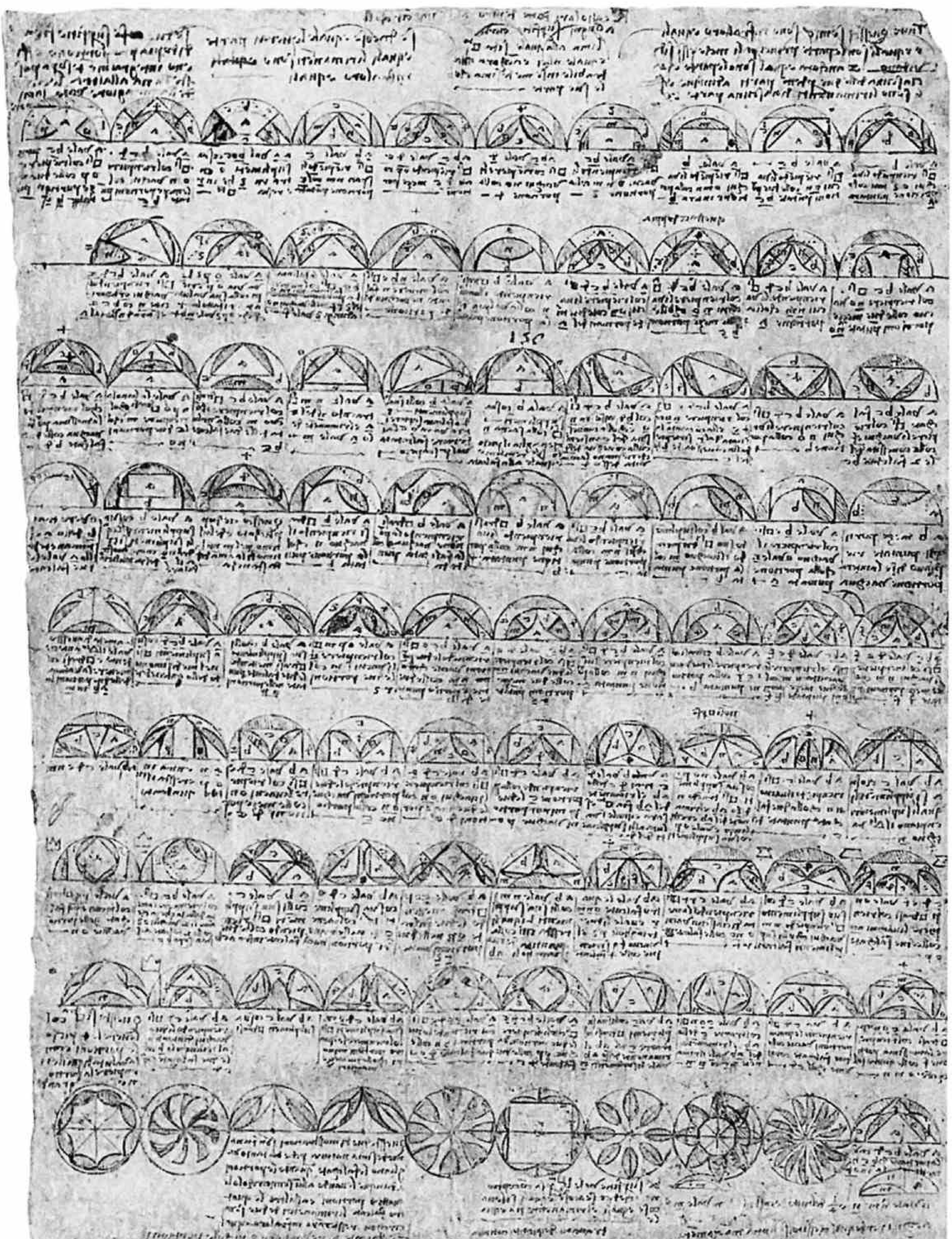
откуда следует, что

$$L + L' = T.$$

Таким образом, две луночки в сумме имеют ту же площадь, что и прямоугольный треугольник, т. е. можно найти их квадратуру.

Леонардо да Винчи и луночки

10 ноября 1494 г. Лука Пачоли опубликовал свой великий труд «Сумма арифметики, геометрии, дробей, пропорций и пропорциональности». Его современники с энтузиазмом раскупали копии, хотя неизвестно, многие ли прочитали этот трактат, не говоря уже о том, поняли ли они его. Один из покупателей был земляком Пачоли. Он



Страница f 455r из «Атлантического кодекса» Леонардо да Винчи с рисунками и записями о гиппократовых луночках.

приобрел копию трактата, заплатив 129 своих зарплат, и с жадностью прочитал книгу. Этот покупатель был не кто иной, как Леонардо да Винчи, который оставил запись о приобретении книги и заплаченной цене в своем манускрипте «Атлантический кодекс» (Codex Atlanticus) на странице f 104r.

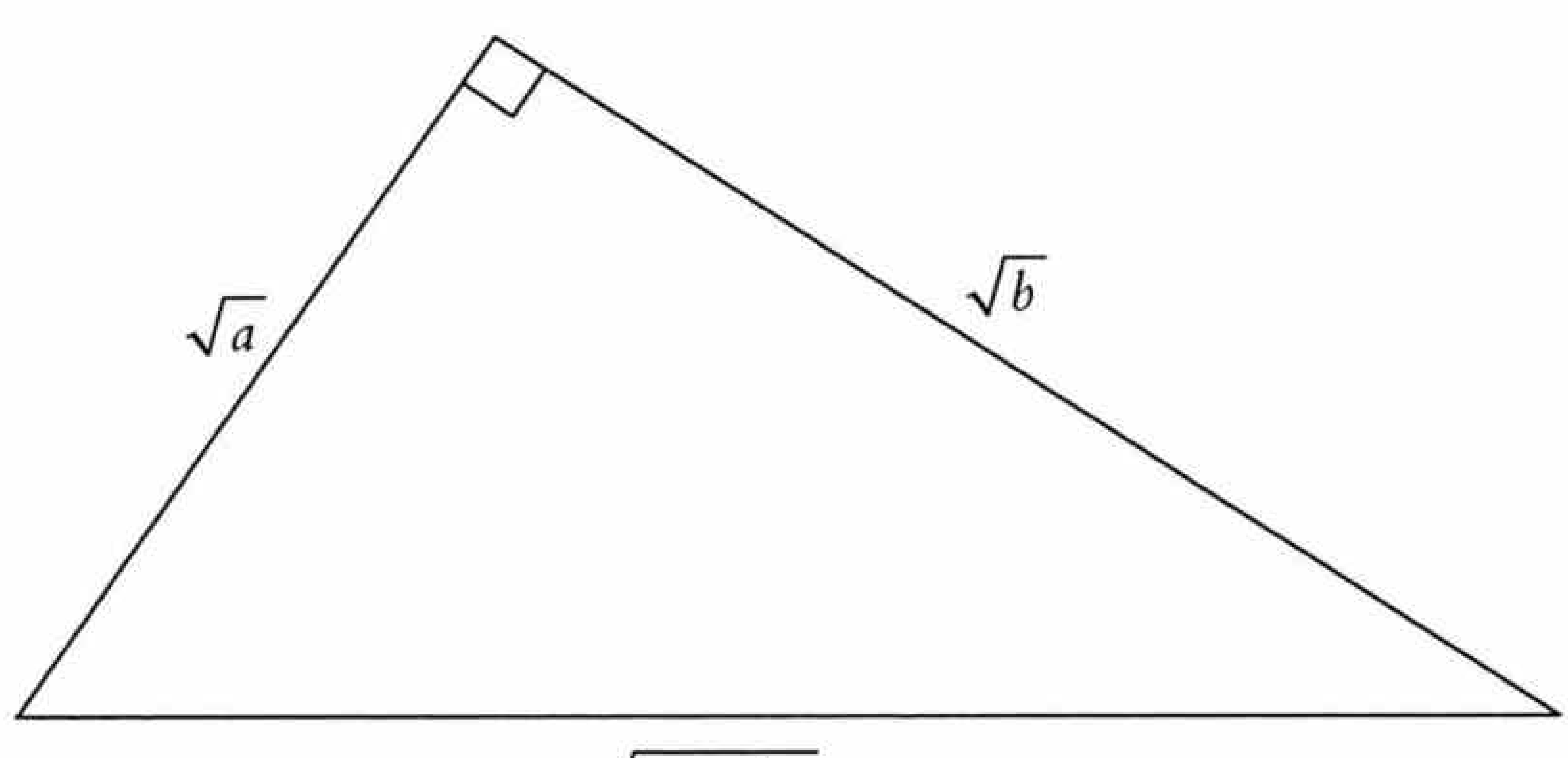
Леонардо да Винчи очень высоко оценил книгу и сделал много рисунков и пометок под впечатлением от трактата Пачоли. Его особенно очаровали гиппократовы луночки, описанные в книге.

Да Винчи сам нашел целый ряд квадратур для луночек и других многоугольников. Это поразило даже самого Пачоли, с которым художник познакомился в Милане в 1496 г. Рисунки вдохновили да Винчи на изучение математики и золотого сечения. Эти математические работы не только сделали да Винчи выдающимся геометром, но также оказали влияние на его произведения живописи. На примере Леонардо да Винчи как нельзя лучше видно, что не существует глубокой пропасти между искусством и наукой.

Неравенства Пифагора

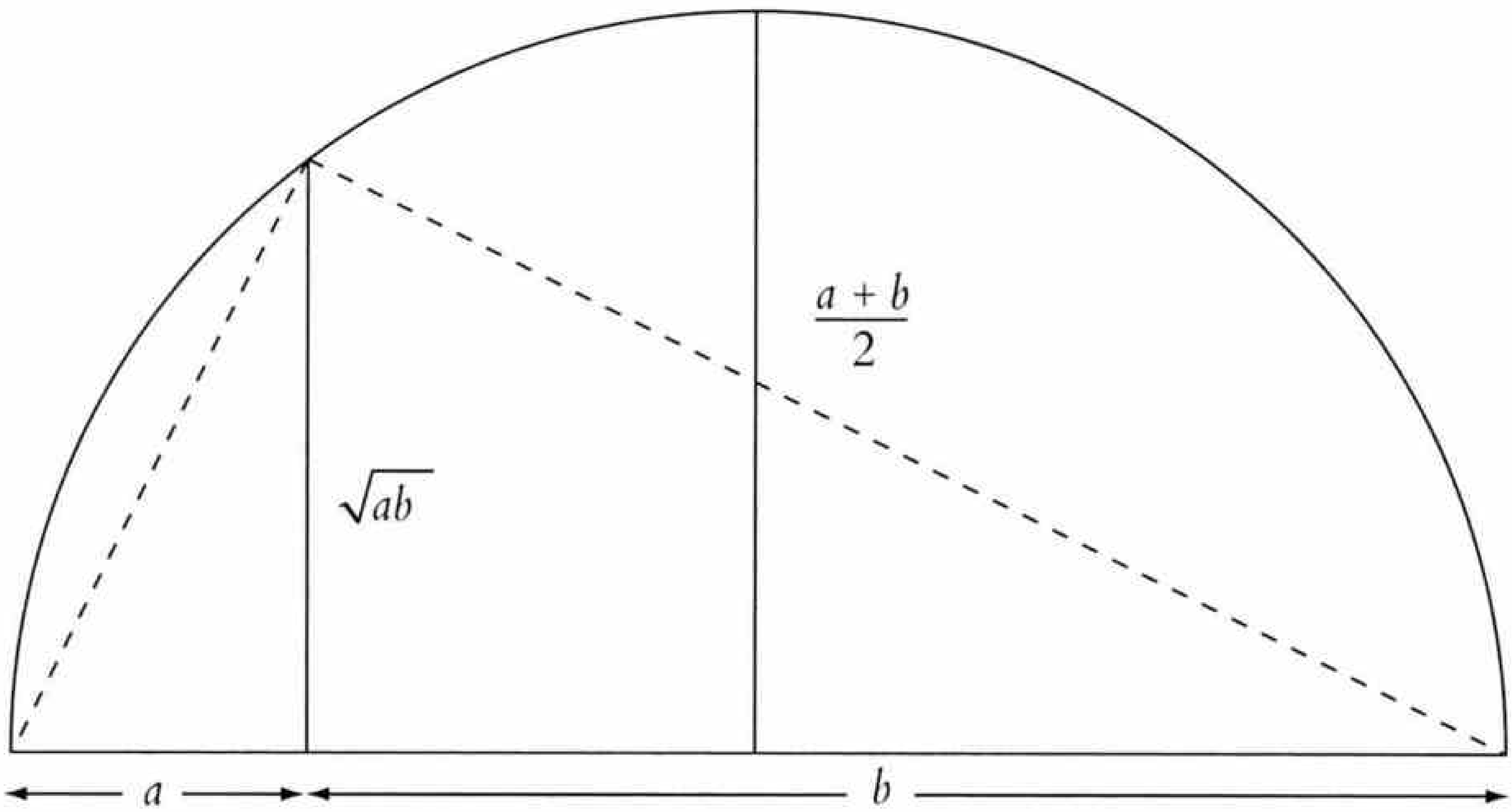
Очевидно, что в любом прямоугольном треугольнике любой катет всегда меньше гипотенузы, а гипотенуза всегда меньше, чем сумма катетов. Используя этот факт, можно на простых рисунках, следующих из теоремы Пифагора, вывести интересные математические неравенства.

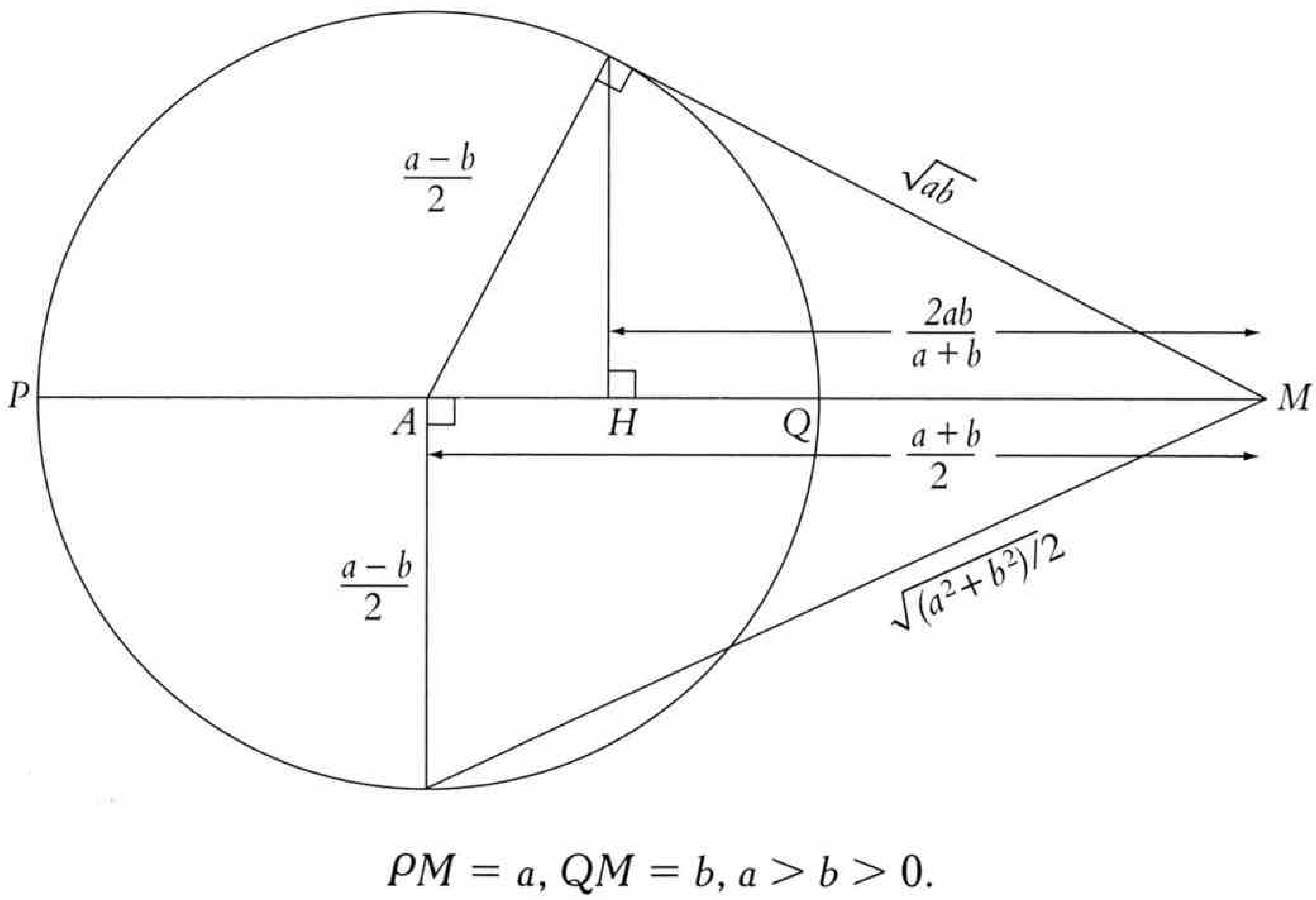
Неравенство, связывающее $\sqrt{a+b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$



Таким образом: $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое





$$PM = a,\ QM = b,\ a > b > 0.$$

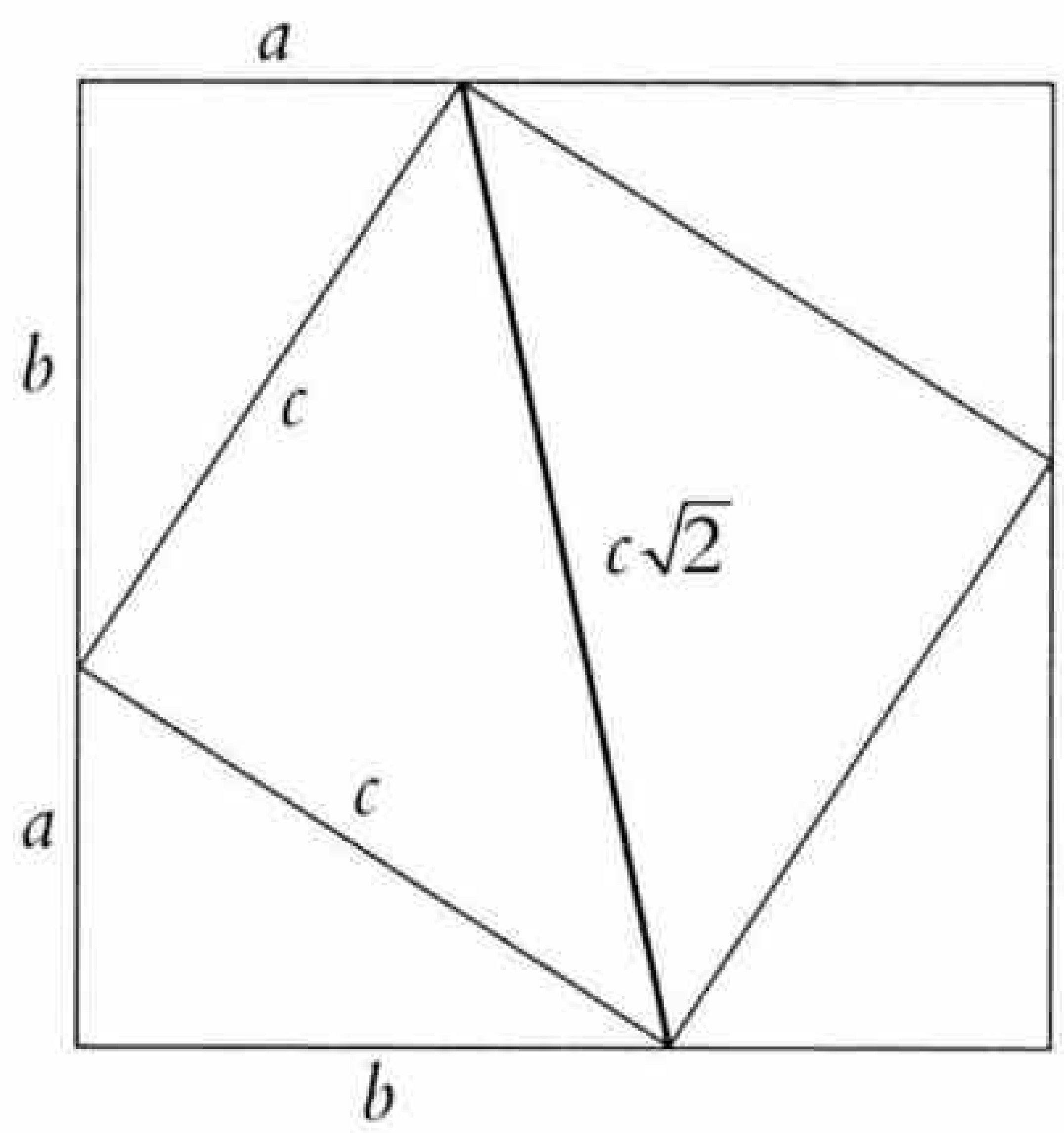
Эти рисунки показывают, что справедливы следующие неравенства о средних:

$$M_{\text{гармоническое}} \leqslant M_{\text{геометрическое}} \leqslant M_{\text{арифметическое}} \leqslant M_{\text{квадратическое}};$$

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Итак, среднее гармоническое меньше, чем среднее геометрическое, которое, в свою очередь, меньше, чем среднее арифметическое, которое, в свою очередь, меньше, чем среднее квадратическое.

Неравенства, связывающие гипотенузу и катеты



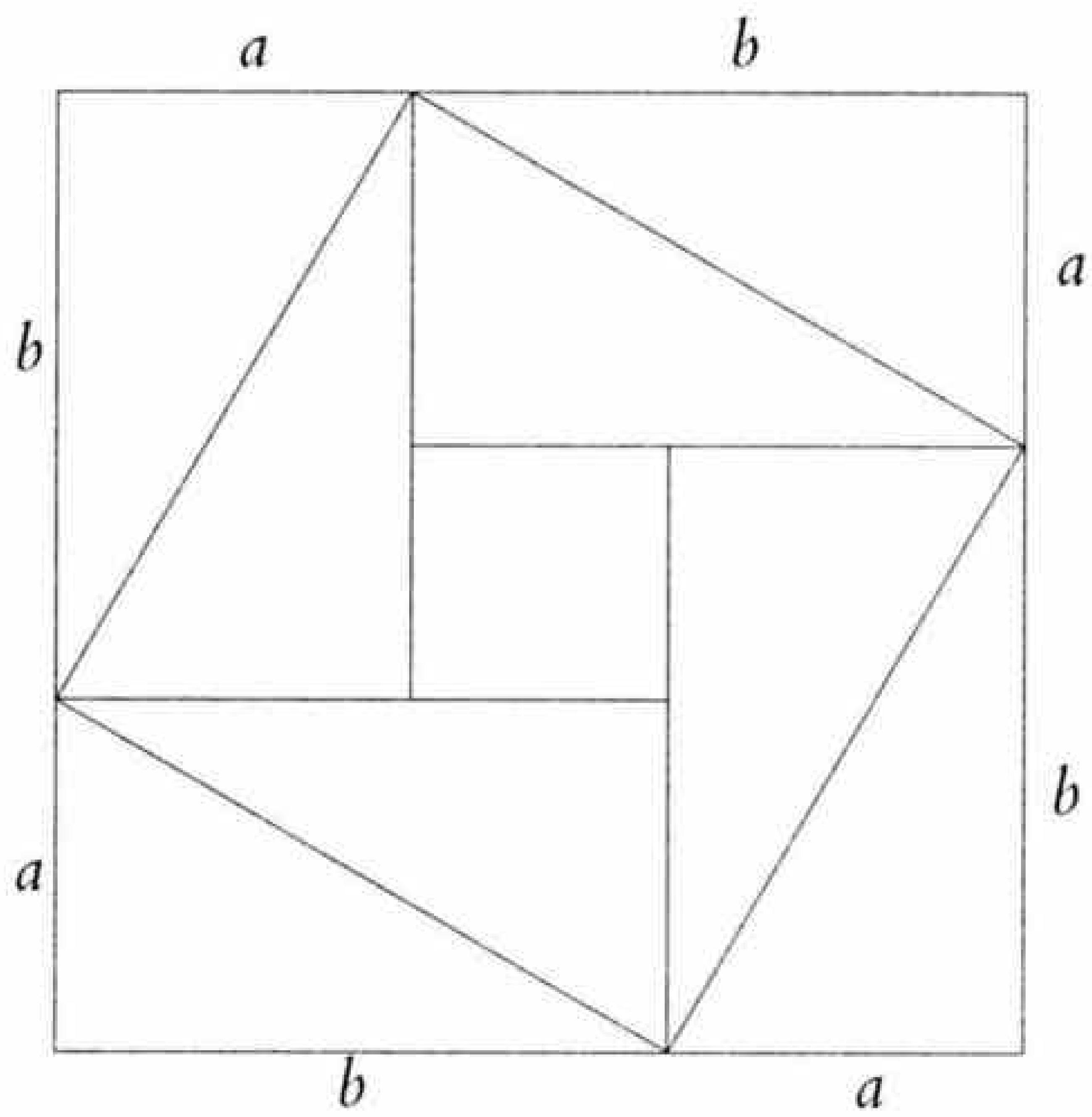
Этот факт имеет ряд приложений, например определение маршрутов для прогулок по улицам города. Рисунок выше позволяет проверить, что

$$\text{если} \quad c = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$\text{то} \sqrt{a^2+b^2} \le a+b \le \sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2};\ c \le a+b \le \sqrt{2}\cdot c.$$

Это означает, что расстояние, пройденное не по гипотенузе, а по двум катетам, будет, конечно, больше прямого пути, но не больше, чем в 1,41 раза (или, вернее, в $\sqrt{2}$ раз).

Еще одна интересная связь между катетами и гипотенузой: $\sqrt{a^2+b^2}\,(a+b) \ge 2\sqrt{2}ab$.

На следующем рисунке можно видеть, что $(a + b)^2 \geqslant 4ab$.



Это потому, что квадрат со стороной $a + b$ содержит четыре прямоугольника со сторонами a и b. Кроме того, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, потому что внутри квадрата, построенного на гипотенузе, есть четыре прямоугольных треугольника с катетами a и b.

Таким образом, умножая эти два неравенства,

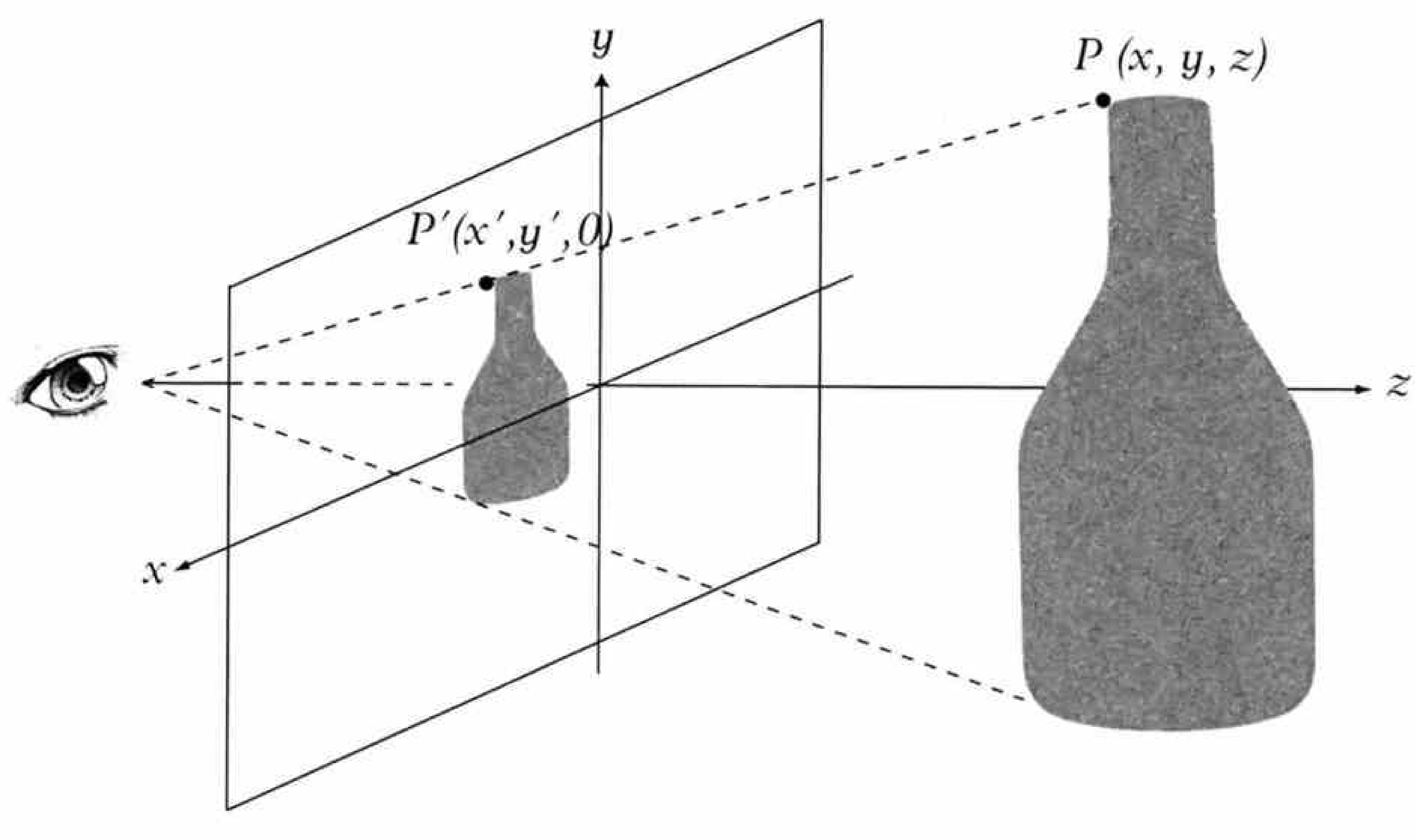
$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ и } \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{2}\sqrt{ab},$$

мы получим искомое соотношение между катетами и гипотенузой $\sqrt{a^2+b^2}\,(a+b) \geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{2}\,ab$.

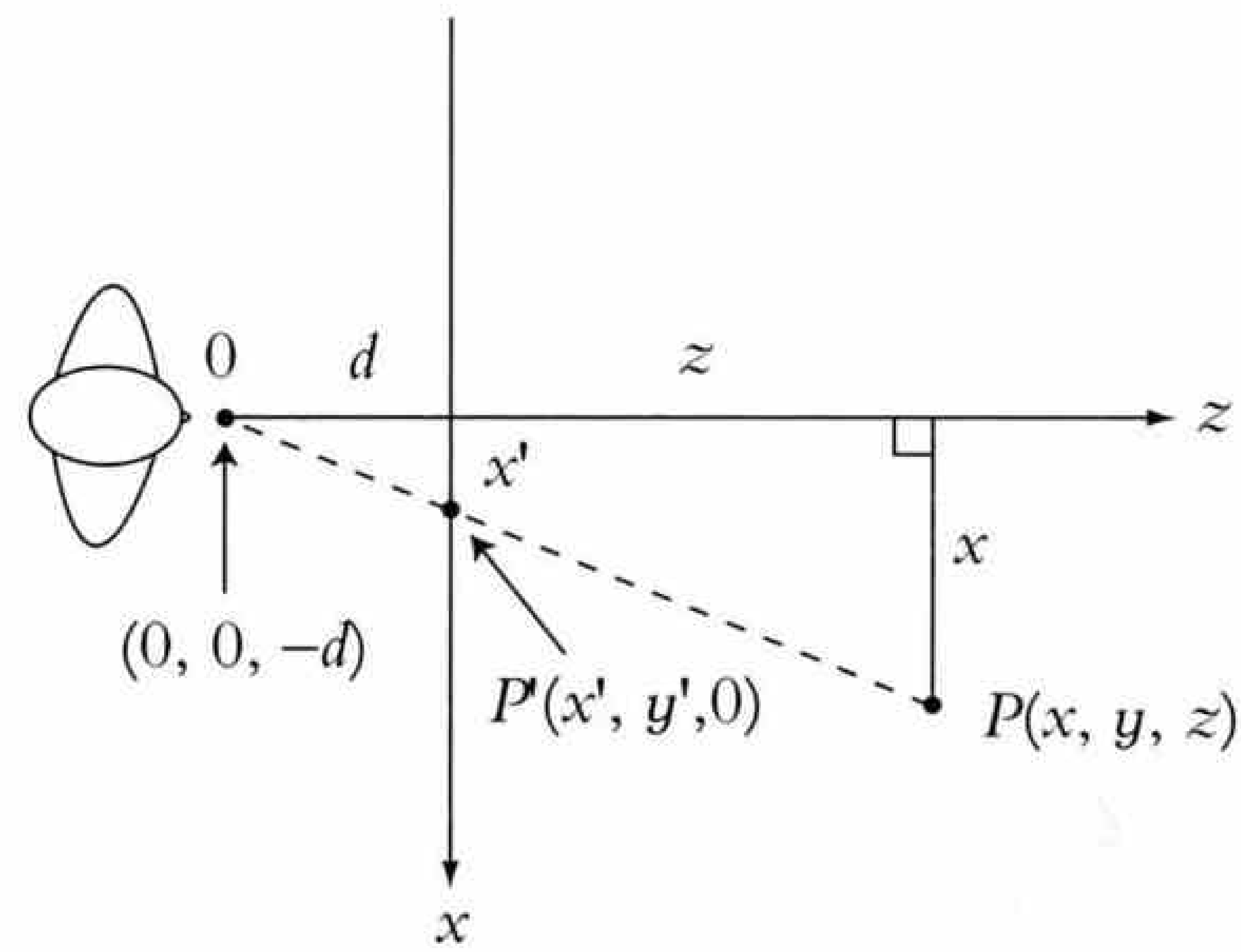
Теорема Пифагора и перспектива

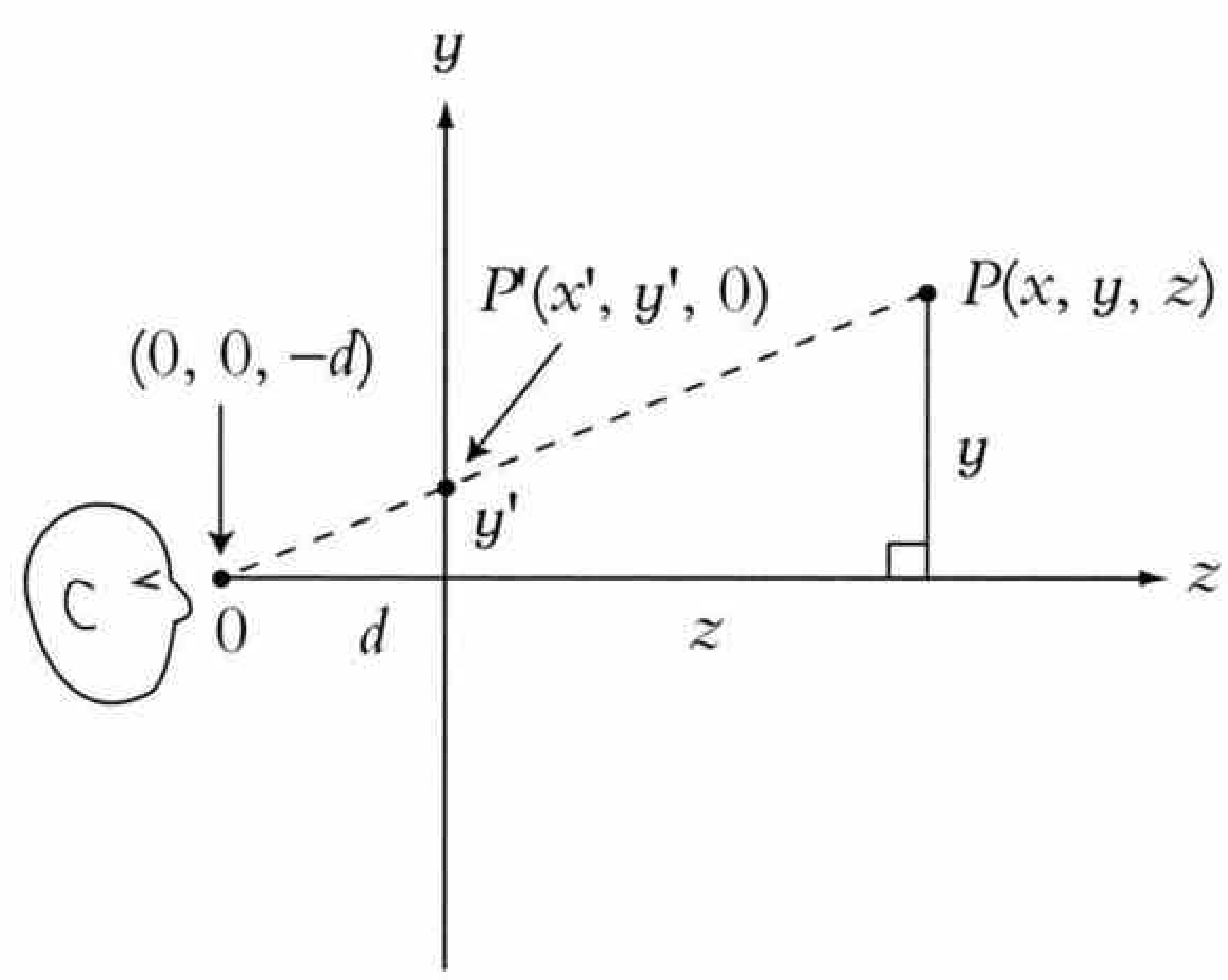
Древнегреческая геометрия не решила задачу изображения трехмерных объектов — таких как лица или пейзажи — на плоской поверхности. Вплоть до эпохи Возрождения (с XIV по XVI вв.) художники и архитекторы не имели базовых знаний и технических навыков, необходимых для построения перспективы. Первые попытки изображения перспективы были сделаны разносторонне одаренным художником и архитектором Филиппо Брунеллески (1377–1446), а первая книга о перспективе под названием Della Pittura («Трактат о живописи») была написана Леоном Баттистой Альберти (1404–1472). При таком подходе картина рассматривалась как окно во внешний мир, который мог быть воспроизведен так точно, что выглядел словно настоящий, — по крайней мере так утверждалось.

Эпоха Возрождения началась в Италии и в основном была развитием искусства, хотя многие из ее достижений обусловлены научной революцией, которая ей предшествовала. Художники эпохи Возрождения показали, что границы между наукой и эстетикой весьма условны. Как мы увидим, метод, разработанный для изображения перспективы, был основан исключительно на геометрии и поэтому называется линейной перспективой. Далее мы представим его основные математические элементы.



Как видно на предыдущем рисунке, метод перспективы содержит четыре ключевых элемента: объект, картину, глаз художника и виртуальную *пирамиду лучей*, идущих от глаза наблюдателя к реальному объекту. Изображение объекта в перспективе — картина — это сечение виртуальной пирамиды лучей — проекция.



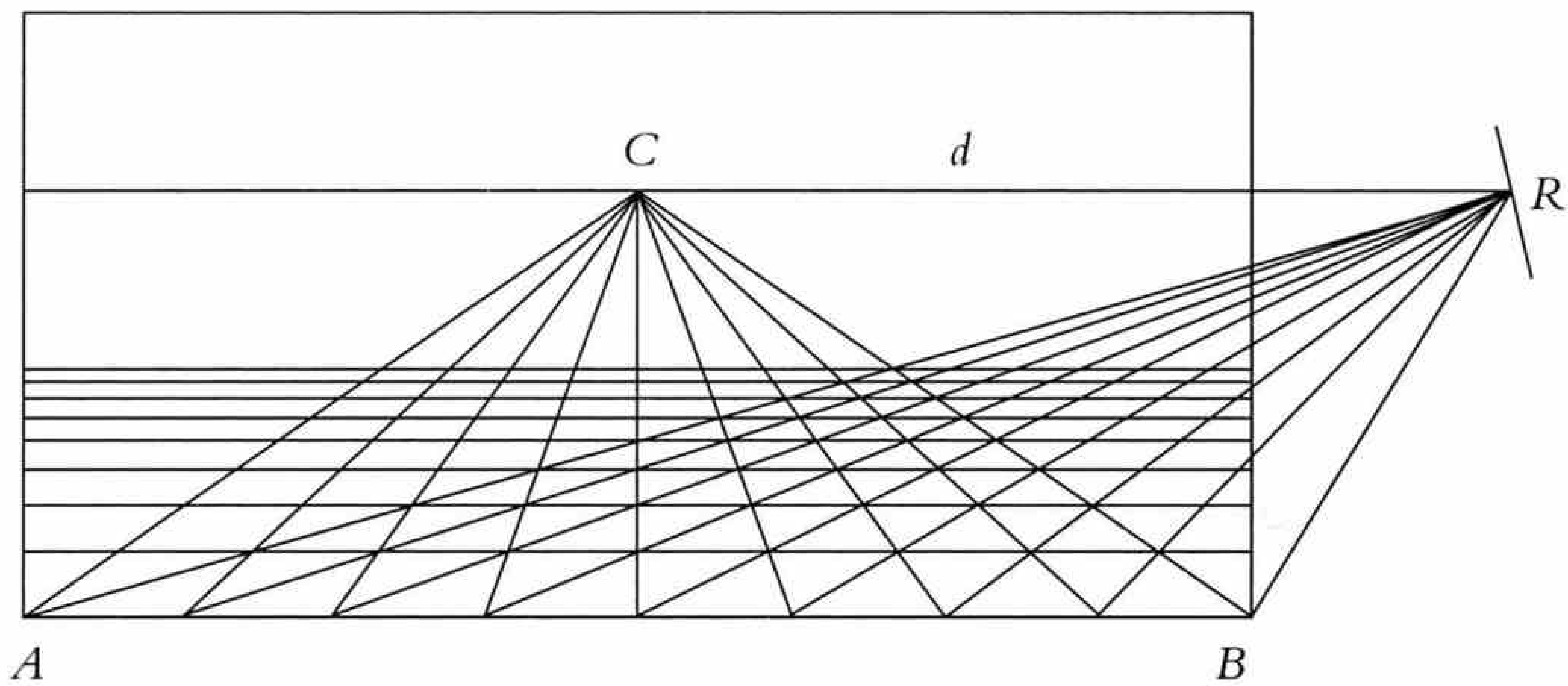


На рисунке выше изображены два прямоугольных треугольника, стороны которых имеют одинаковые пропорции и к которым можно применить теорему Пифагора:

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{d+z},\ \frac{x'}{x} = \frac{d}{d+z},\ \overline{OP} = \sqrt{y^2 + (d+z)^2}\ ,$$

что дает нам $y' = \dfrac{dy}{d+z}$, $x' = \dfrac{dx}{d+z}$, $\overline{OP'} = \sqrt{y'^2 + d^2} = \sqrt{\dfrac{d^2y^2}{(d+z)^2} + d^2}$.

Конечно, художник, как правило, не работает с прозрачным стеклом, он использует непрозрачный холст, поэтому художники должны были стать геометрами. Рассмотрим, например, Costruzione Legitima (способ «правильного построения») Альберти.



Альберти изображает плитки тротуара в виде сетки. Для этого он выбирает центральную точку схода C, делит отрезок AB на равные части и соединяет их с точкой C. Затем он выбирает точку R на расстоянии d от точки С. Это расстояние d равно расстоянию от художника до картины. Он соединяет точку R с частями отрезка AB. Это дает диагонали плиток, которые теперь можно использовать для их изображения.

Человек, рассматривающий картину, может выбрать идеальное расстояние до нее. Нужно лишь встать на расстоянии d от картины. Для этого надо продолжить диагонали плиток за границы картины и найти точку их пересечения R. Это позволит вычислить искомое расстояние $d = CR$ в соответствующем масштабе.

Однако, несмотря на теоретические ухищрения и научный подход, перспектива на картинах эпохи Ренессанса не похожа на реальную. Это всего лишь оптическая иллюзия, обманывающая человеческое восприятие, хотя она и ознаменовала собой фундаментальный поворот в графическом представлении реальности. До этого все изображения выглядели явно неестественно. Но если этот геометрический метод строго применить к ряду объектов, размеры которых известны наблюдателю, умеющему быстро производить вычисления, то в пропорциях этих объектов обнаружились бы удивительные и забавные несоответствия. Человеческое зрение не использует математические трюки для восприятия реальности, поэтому не существует математического метода, способного воспроизвести то, что видит глаз.

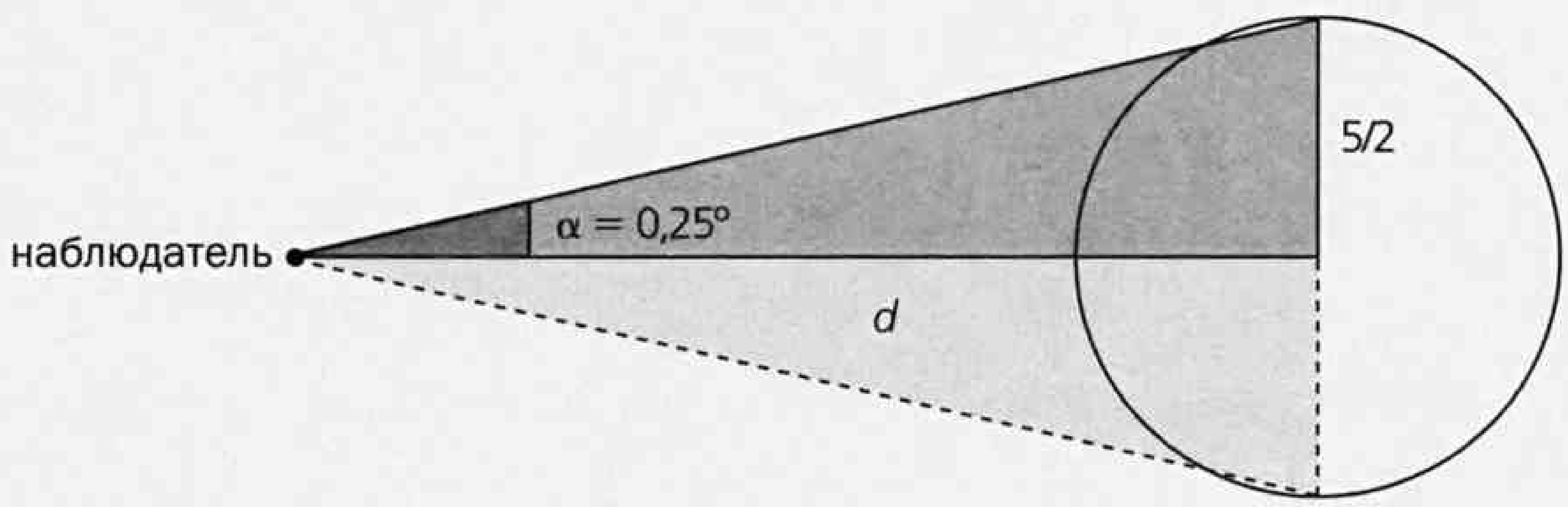
ИЗОБРАЖЕНИЕ ЛУНЫ

В живописи, в театре и даже в кино часто в ночных сценах изображается Луна, размер и расположение которой представлены ошибочно. Как правило, чем ниже Луна находится к горизонту, тем больше она кажется.

Правильные размеры можно получить с помощью простых расчетов с использованием прямоугольных треугольников. Вычисления действительно просты, так как при известном расстоянии от Земли до Луны она видна под крошечным углом всего лишь в 0,5°.

Если окно на картине имеет 20 см в ширину и Луна занимает четверть этого пространства, то ее диаметр 5 см. Если художник находится от картины на расстоянии *d*, то мы имеем:

$$\operatorname{tg}(0{,}5°/2)=\frac{5/2}{d},$$



или $d = 2{,}5/\operatorname{tg} 0{,}25° \approx 581{,}4$ см. Это означает, что картина написана художником-гигантом, который может кистью дотянуться на расстояние в 5,81 м.

С какого расстояния следует смотреть на картины

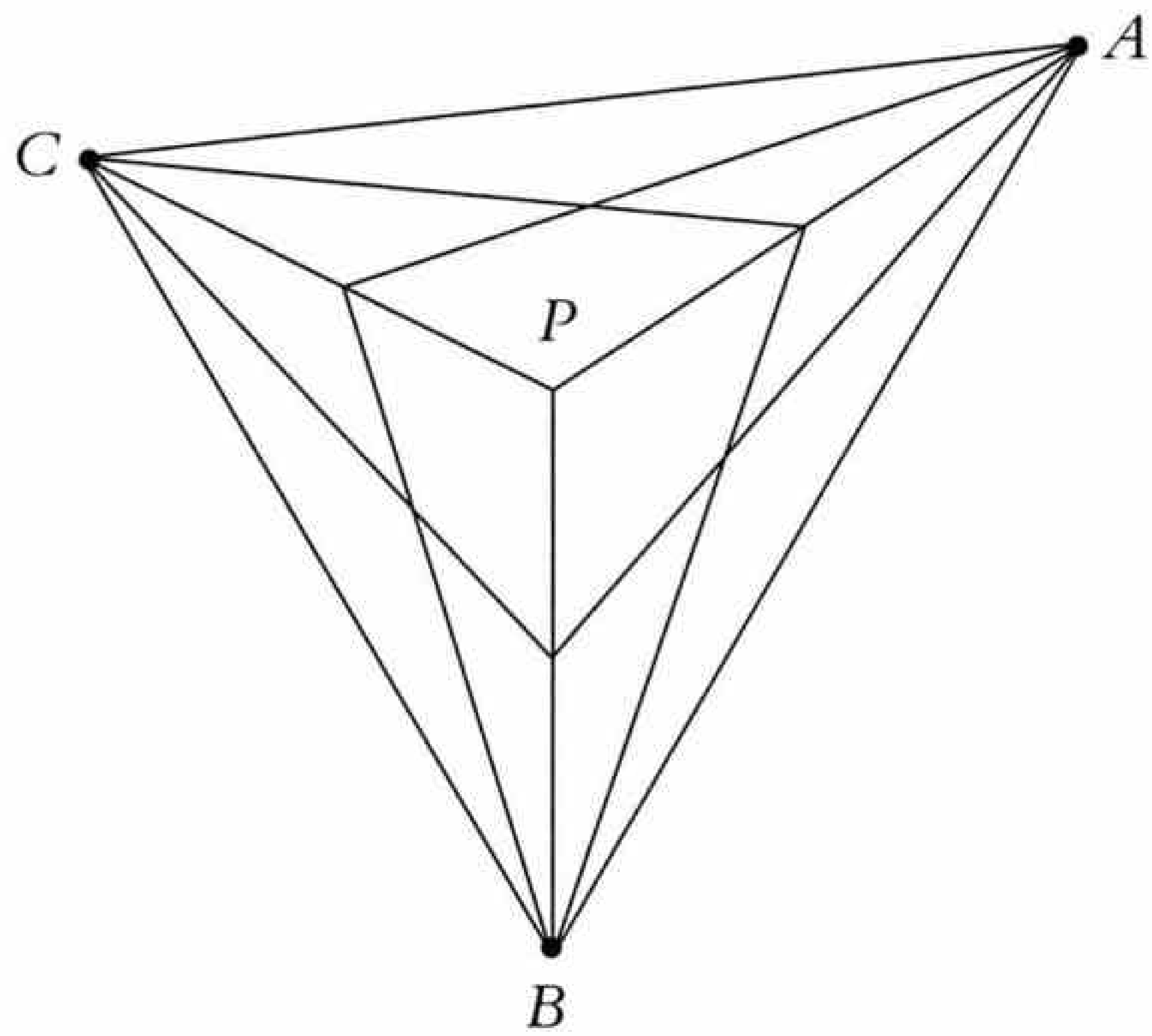
На каком расстоянии от картины следует встать, чтобы любоваться работами Пьеро делла Франческа и Леонардо да Винчи?

Согласно строгим принципам линейной перспективы, описанным флорентийским архитектором, художником и теоретиком Филиппо Брунеллески, картины, как представление о реальности, должны предлагать глазу зрителя то же самое видение, которое задумывал художник при создании своей работы. Любые параллельные линии реального мира представлены на картине пересекающимися в точке схода или в бесконечно удаленной точке.

Эта точка схода на картине должна лежать на воображаемой линии, проходящей через глаз художника и параллельной всем другим прямым линиям. Таким образом, лучше всего зритель видит картину, когда находится в некой точке прямо перед картиной, там, где стоял художник, когда ее создавал. Но можно ли найти эту точку? Математик Кристофер Зиман показал, как это можно сделать.

На рисунке ниже изображен куб с помощью трех точек схода A, B и C, соответствующих трем наборам параллельных линий, образующих ребра куба.

Рассматривая рисунок с близкого расстояния и с различных точек, мы не всегда видим кубическую форму. Где мы должны стоять, чтобы увидеть на рисунке куб?



По определению, каждое множество параллельных прямых в трехмерной реальности проходит через соответствующую точку схода на картине. Чтобы увидеть, что отрезки AP и PB образуют прямой угол (и, следовательно, являются частью куба), необходимо использовать маленькую хитрость. Представьте себе, что перед картиной находится сфера диаметра AB. Глаз наблюдателя находится в некоторой точке на поверхности этой гипотетической сферы. Это именно так, потому что все точки, из которых отрезок виден под углом в 90°, лежат на сферической поверхности. Однако, чтобы увидеть куб, необходимо увидеть, что отрезки AP и PC, а также BP и PC перпендикулярны. Таким образом, глаз наблюдателя должен находиться на пересечении трех гипотетических полусферических поверхностей, имеющих диаметр AB, BC и AC соответственно. Пересечением первых двух полусферических поверхностей перед картиной является полукруг, который пересечет третью полусферическую поверхность в одной-единственной точке.

Простые расчеты позволяют определить расстояние d, на котором должен находиться наблюдатель, чтобы увидеть куб должным образом, во всей его красе. Пусть $AB = x$, $BC = y$, $CA = z$ и расстояния до точек A, B, C от точки P равны q, r и ρ соответственно.

Трижды применив теорему Пифагора, имеем:

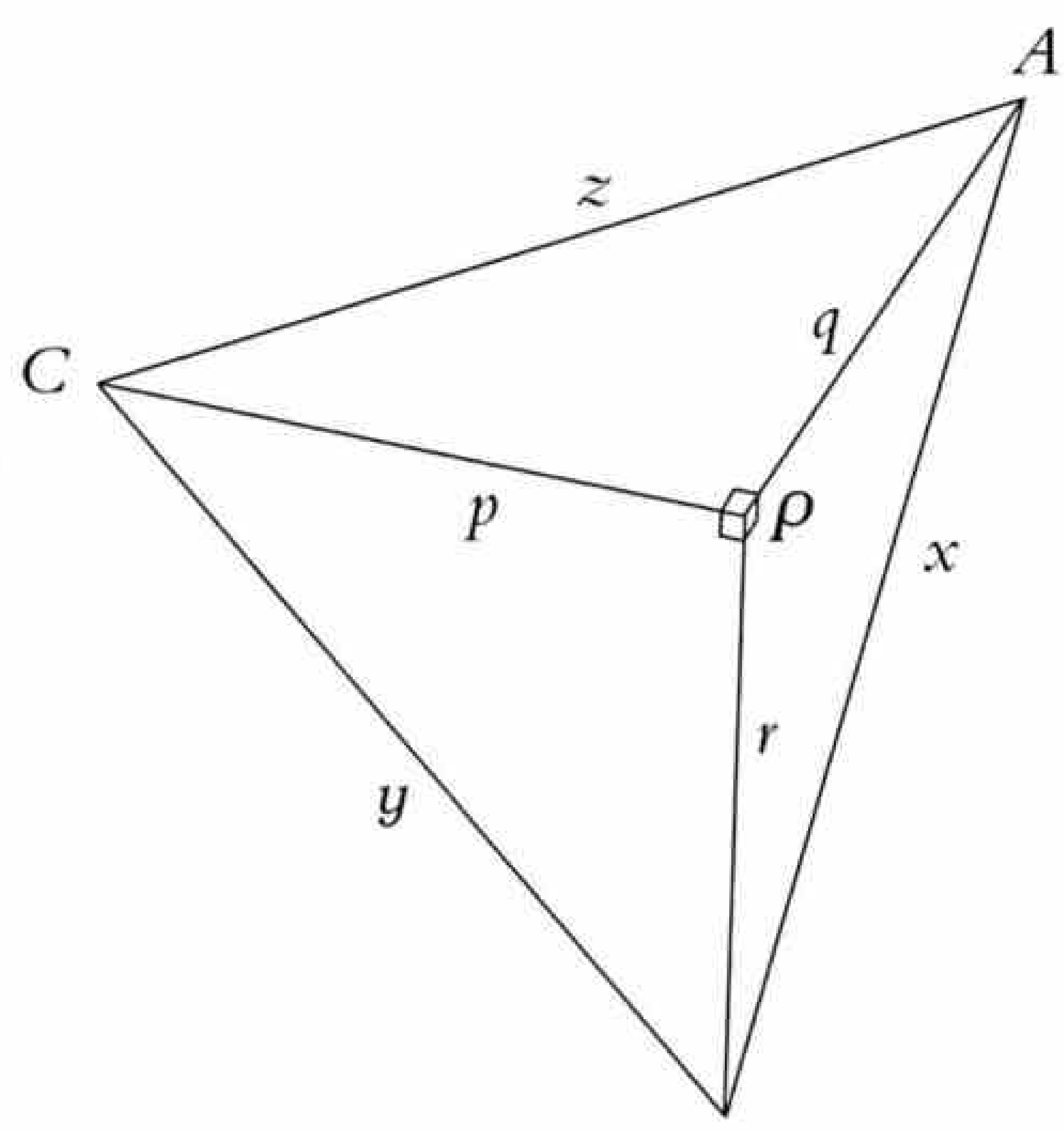
$$x^2 = q^2 + r^2, y^2 = \rho^2 + r^2, z^2 = \rho^2 + q^2.$$

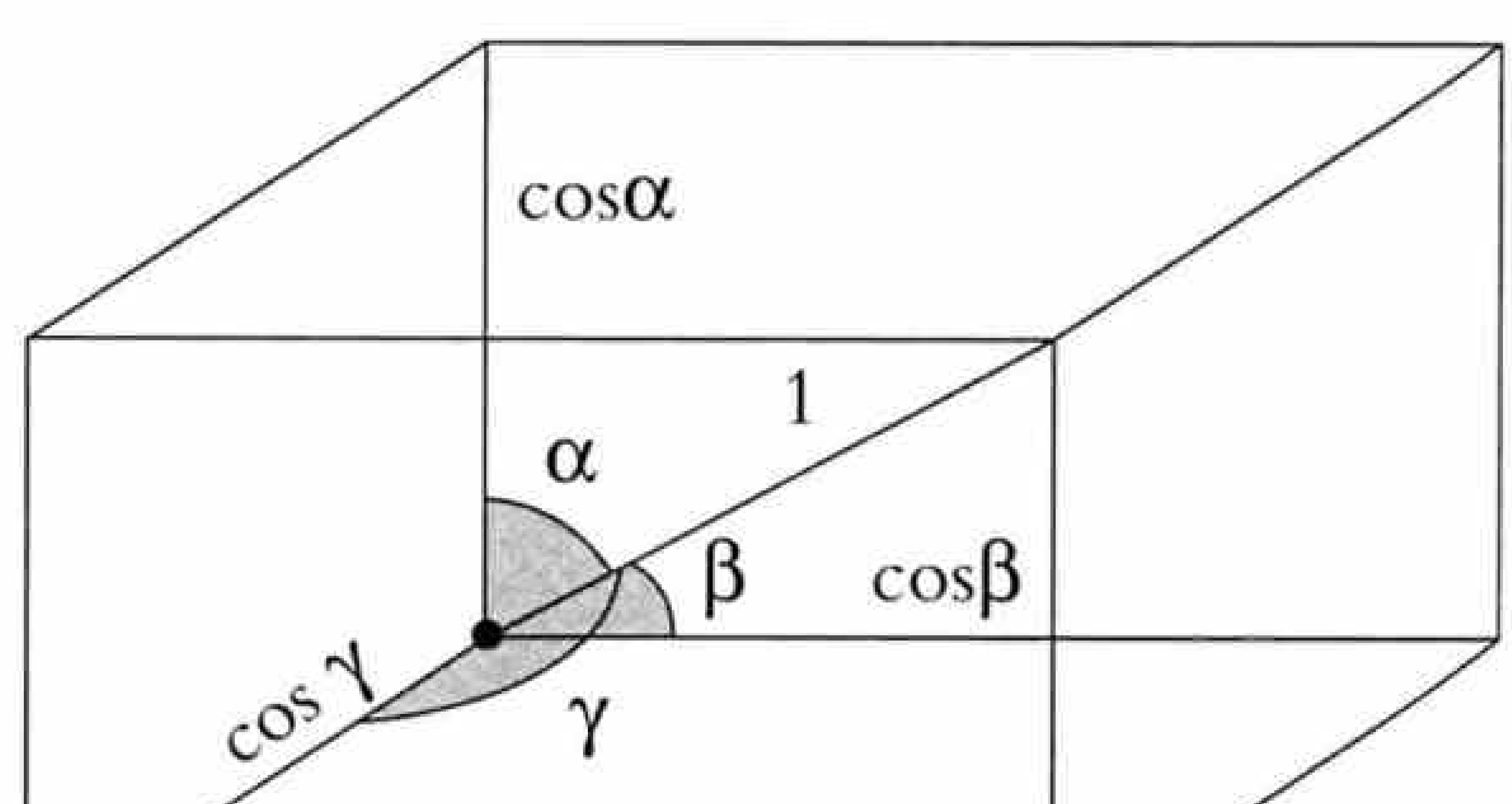
Решая эту систему уравнений (x, y, z можно измерить на картине), мы получим значения ρ, q и r:

$$\rho = \sqrt{\frac{(-x^2 + y^2 + z^2)}{2}},$$

$$q = \sqrt{\frac{(x^2 - y^2 + z^2)}{2}},$$

$$r = \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 - z^2)}{2}}.$$





Из рисунка справа следует, что если диагональ имеет длину 1, а α, β, γ обозначают углы, прилежащие к диагонали, то по теореме Пифагора

$$\cos\alpha = \frac{\textit{прилежащий катет}}{\textit{гипотенуза}} = \frac{\textit{прилежащий катет}}{1}.$$

Таким образом, $\cos \alpha$ равен длине прилежащего катета, расположенного вдоль оси координат. Гипотенуза выражается следующим образом:

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma,$$

так что

$$1=\left(\frac{d}{p}\right)^2+\left(\frac{d}{q}\right)^2+\left(\frac{d}{r}\right)^2,$$

$$1=\frac{d^2}{p^2}+\frac{d^2}{q^2}+\frac{d^2}{r^2}=\frac{d^2q^2r^2+d^2p^2r^2+d^2p^2q^2}{p^2q^2r^2}=d^2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}\right)=1,$$

откуда расстояние d выражается как

$$d=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}}.$$

Подставляя значения p, q и r, выраженные через длины x, y, z, измеренные на картине, мы получим:

$$d=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{-x^2+y^2+z^2}+\frac{2}{x^2-y^2+z^2}+\frac{2}{x^2+y^2-z^2}}}.$$

Так теорема Пифагора может быть применена во всех картинных галереях мира.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА, ВЕРЕВКИ И КОЛЫШКИ

Согласно основам архитектуры, первым шагом в строительстве любого здания является разметка земельного участка. Это означает, что задача точного определения размеров земельного участка и разметка его на прямоугольники возникла много тысячелетий назад. На первый взгляд это кажется тривиальным. Требуются лишь четыре вбитых в землю колышка, веревка и рулетка. Но вопрос точности все еще остается открытым. Как можно убедиться, что мы разметили настоящий прямоугольник, а не просто произвольный четырехугольник? Как и в медицине, точность в архитектуре очень важна.

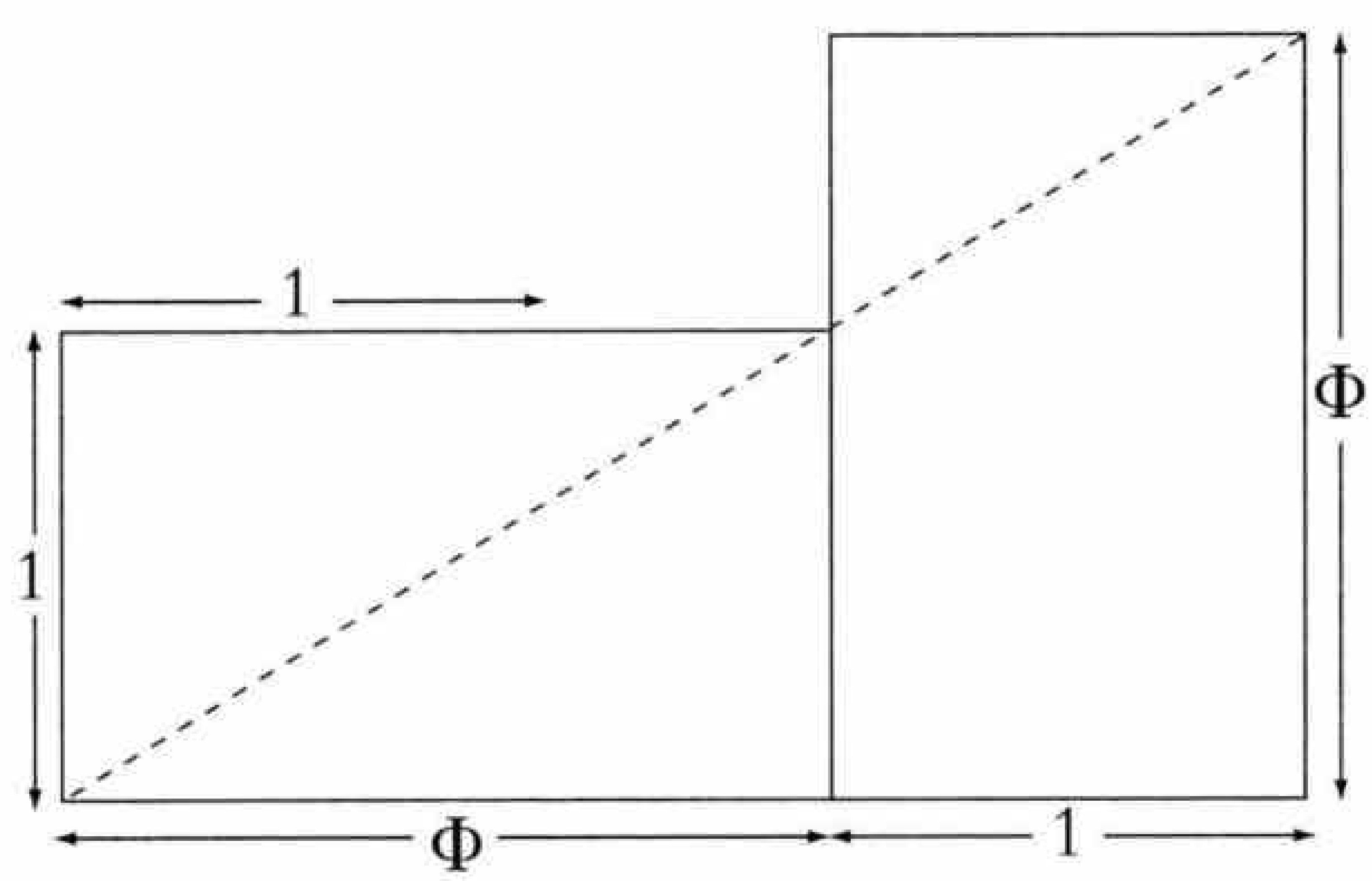
Если измерить стороны прямоугольника и его диагонали, то теорема Пифагора позволяет проверить перпендикулярность смежных сторон. Но можно поступить еще проще: если пары параллельных сторон имеют равную длину, то достаточно измерить диагонали и убедиться в их равенстве, тем самым доказав, что мы получили прямоугольник, а не просто параллелограмм.

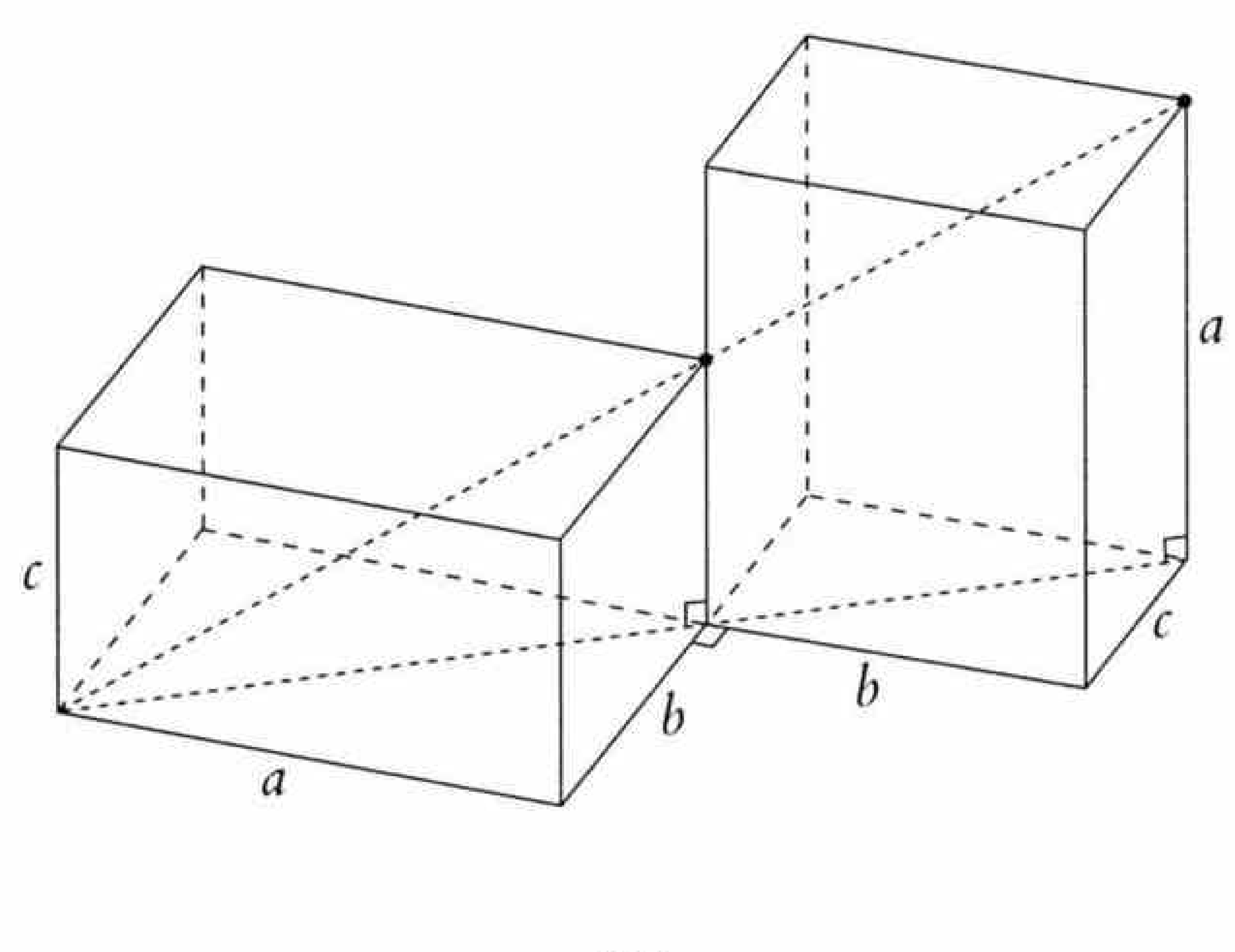
Пластическое число ван дер Лаана

В XX в. нидерландский архитектор и монах-бенедиктинец Ганс ван дер Лаан (1904–1991) открыл еще одно число, пополнившее список чисел с удивительными свойствами, которые всегда завораживали любителей математики. Это число было названо мистической (или пластической) константой, но не потому, что было открыто в эпоху пластика, а в благородном смысле эстетической пластичности. Число ρ является особенно интересным кубическим корнем. Оно — единственный вещественный корень кубического уравнения $x^3 = x + 1$, или, вернее,

$$\rho^3 = 1 + \rho,$$

где $\rho = 1{,}32\ldots$ Аналогично золотому сечению Φ, удовлетворяющему соотношению $\Phi^2 = \Phi + 1$, пластическая константа ρ, являясь корнем уравнения $\rho^3 = 1 + \rho$, играет роль золотого сечения в трехмерном пространстве. Например, на рисунке ниже параллелепипед с ребрами $c < b < a$ клонируется и помещается аналогично «золотым» прямоугольникам:





Это свойство «золотых» прямоугольников является характерным для золотого сечения Ф. Как показано на предыдущем рисунке, если мы продолжим главную диагональ горизонтального параллелепипеда так, чтобы она прошла через верхний угол вертикального параллелепипеда, то ребра параллелепипеда должны быть связаны соотношениями $b = \rho c$, $a = \rho^2 c$, где c — произвольное значение длины, а ρ — пластическая константа. Чтобы это доказать, нужно применить теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам, связанным с диагоналями.

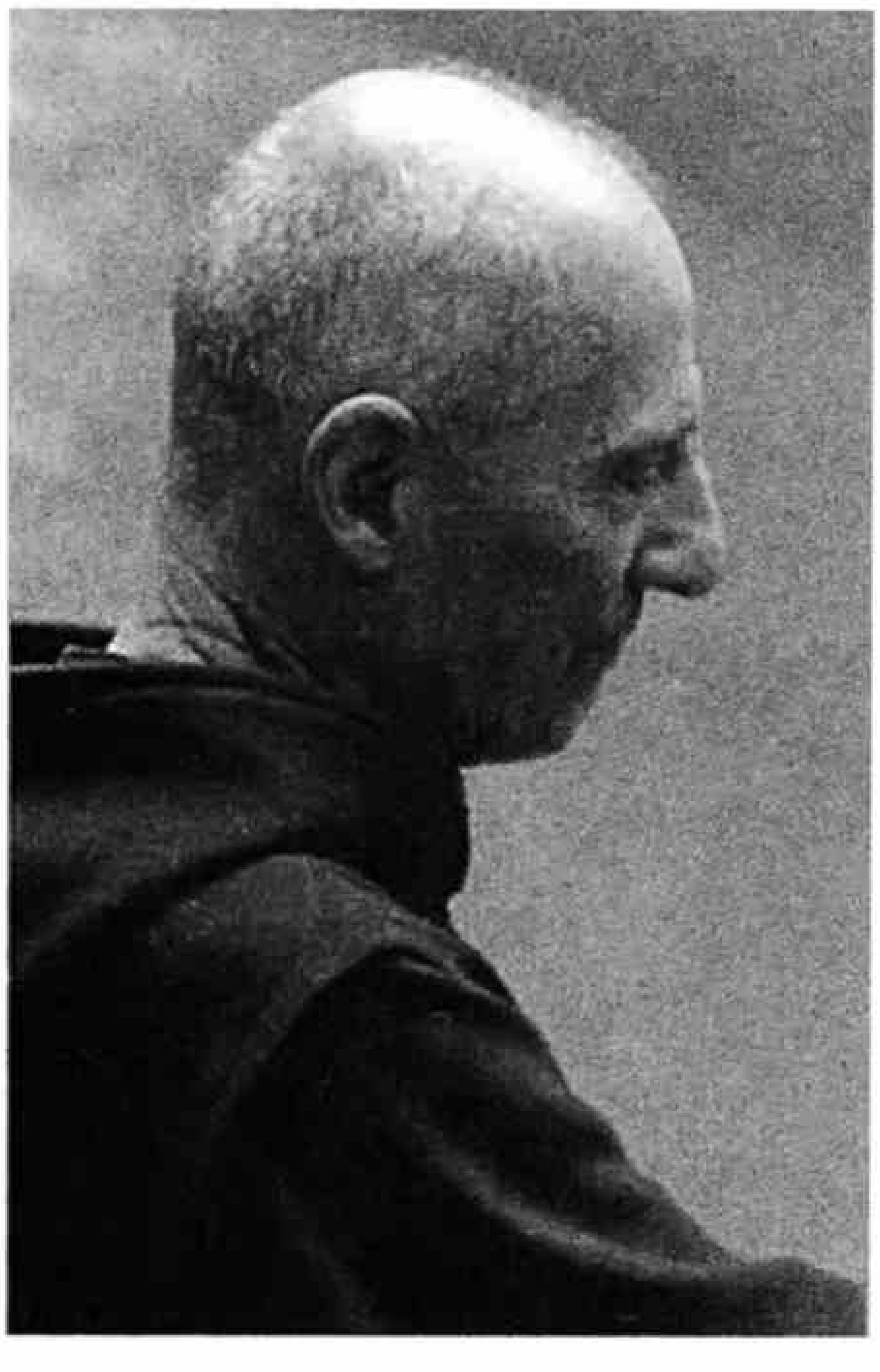
Отец ван дер Лаан изучал пропорции римских храмов и обнаружил, что многие из этих пропорций содержатся в следующем ряду чисел:

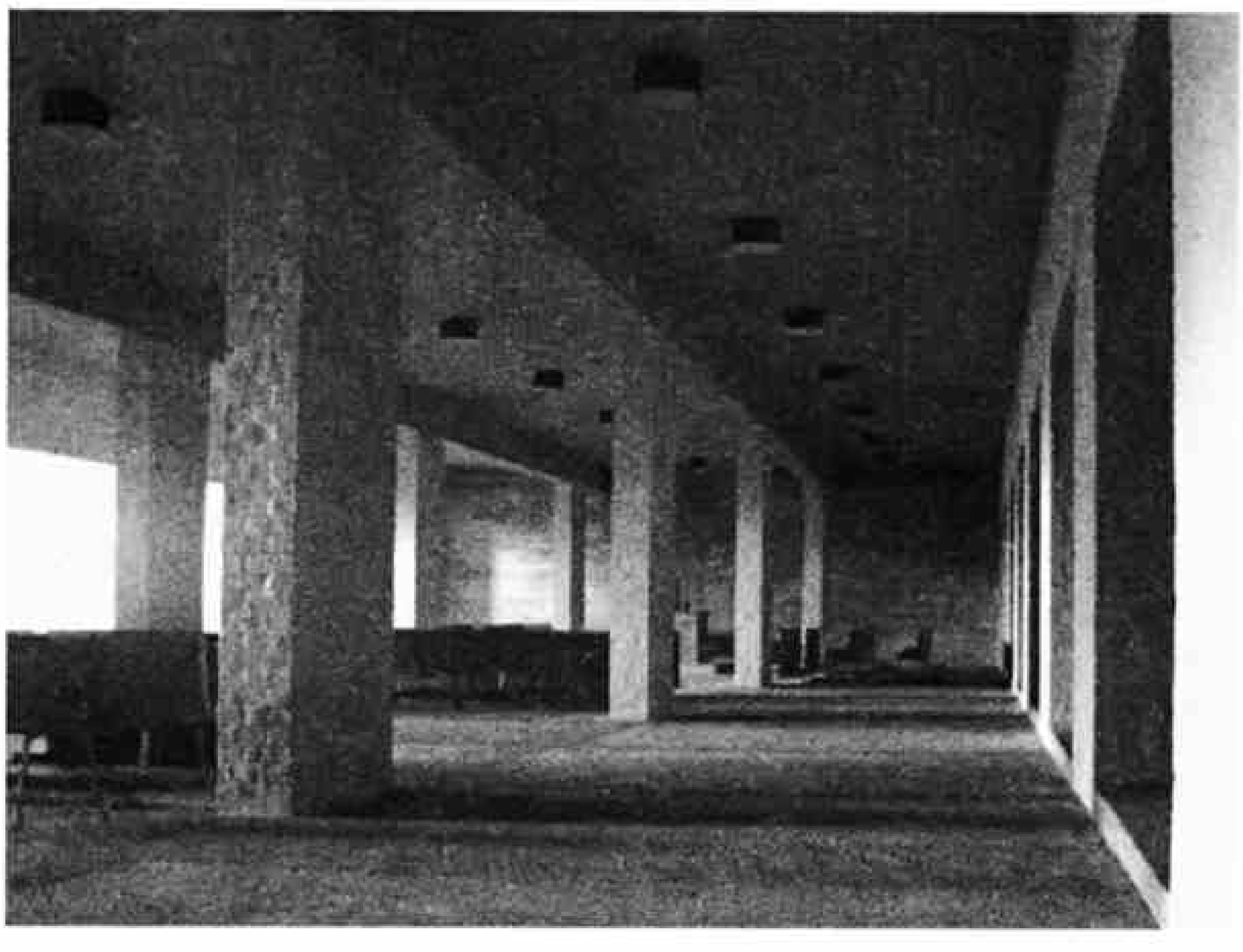
$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, \ldots$$

Ряд начинается с трех единиц, и каждый следующий член равен сумме двух предыдущих, отстоящих на две и три позиции от данного числа $(2 + 3 = 5, 4 + 5 = 9)$. В результате получаются следующие отношения:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \ldots$$

Эти отношения сходятся к пластической константе ρ.





Работы отца Ганса ван дер Лаана изучаются во многих университетах мира. Одними из первых сооружений, спроектированных на основе его теоретических предложений, были верхний храм, атриум и склеп в аббатстве в Ваальсе на юге Нидерландов.

Глава 6

За пределами теоремы Пифагора

Время — душа этого мира.
Пифагорейский принцип

Наше пифагорейское путешествие подходит к концу, но мы затронули еще не все сложные проблемы. До сих пор мы рассматривали теорему Пифагора с различных точек зрения, но всегда в традиционной форме — как отношение площадей квадратов, связанных с прямоугольным треугольником. Однако мы лишь коснулись вершины айсберга. Перед нами открывается обширная территория неизвестных и захватывающих задач. Мы сделаем лишь несколько маленьких шагов вперед, но этого будет достаточно, чтобы оказаться в новом измерении. Мы увидим результаты обобщения теоремы, узнаем новые условия, при которых справедливо пифагорейское соотношение, и откроем для себя совершенно неожиданные области применения этой теоремы. Для этого нам придется использовать воображение, чтобы представить те понятия, которые находятся вне границ пространства и времени. Все это нужно для того, чтобы еще раз убедиться: одна из старейших теорем математики по-прежнему решает новые и непредвиденные задачи.

От Пифагора к Ферма и Уайлсу

Треугольник Пифагора, известный с древних времен, является прямоугольным треугольником с катетами 3 и 4 и гипотенузой 5 ($5^2 = 3^2 + 4^2$). После открытия этого треугольника естественным образом возник вопрос: существуют ли другие прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами? Согласно теореме Пифагора нужно было найти положительные целые числа x, y, z, связанные уравнением

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (1)$$

Пифагоровыми тройками называются комбинации из трех чисел, которые удовлетворяют уравнению (1). Пифагорейцы потратили много сил и труда на поиски таких чисел. Встречаются ли такие тройки все реже и реже с увеличением чисел? Пифагорейцы нашли метод построения таких троек. По сути, они доказали, что существует бесконечное число пифагоровых троек.

Уже в десятой книге «Начал» Евклида приведена формула, которая позволяет найти все целочисленные решения уравнения (1). Надо только взять любые два натуральных числа m и n, где $m > n$, одно четное, а другое нечетное, и вычислить по ним значения:

$$\begin{aligned} x &= 2mn, \\ y &= m^2 - n^2, \\ z &= m^2 + n^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Так мы получим все пифагоровы тройки, или, по крайней мере, столько, сколько сможем посчитать, так как их бесконечное количество. Первые несколько значений можно увидеть в следующей таблице:

m	n	x	y	z
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61

Заметим, что если x, y, z являются пифагоровой тройкой, то числа ax, ay, az, где a целое, тоже образуют пифагорову тройку. Можно сказать, что из любой пифагоровой тройки можно вывести бесконечное число других пифагоровых троек. Пожалуй, самой красивой тройкой является первая — 3, 4, 5, числа которой образуют арифметическую прогрессию (3, 3 + 1, 3 + 2). Эта тройка соответствует треугольнику с целыми сторонами, периметр которого равен 12, то есть в два раза больше его площади, равной 6.

Греческий математик Диофант Александрийский написал три большие работы, одна из которых даже дала название целой области математики. Это книга под названием «Наука о числах», которое по-гречески звучит как одно слово: «Арифметика»

ЗАГАДОЧНАЯ ТРОЙКА

Число зверя — 666 — всегда завораживало любителей нумерологии. Его странные свойства проявляются в римской системе счисления, где 666 записывается как DCLXVI. Как видно, в этой записи все символы, меньшие M (1 000), используются по одному разу, в порядке убывания. В математическом смысле интересны также другие его свойства. Например, 666 является суммой квадратов первых семи простых чисел (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17). Также число 666 связано с интересной пифагоровой тройкой: $x = 693$, $y = 1\,924$ и $z = 2\,045$. Площадь треугольника с такими сторонами равна 666 666.

(arithmetike от arithmos — «число», и techne — «наука»). «Арифметика» Диофанта на протяжении многих веков благотворно влияла на развитие теории чисел. В своей работе Диофант решил 130 задач и вывел выражение для нахождения пифагоровых троек (2), известное по «Началам» Евклида, но с использованием других аргументов. При решении задач он часто применял теорему Пифагора. Например, первая задача из шестой книги содержит пифагорову тройку 40, 96 и 104, где длина гипотенузы за вычетом длины любой из других сторон дает куб числа:

$$104 - 96 = 8 = 2^3,$$
$$104 - 40 = 64 = 4^3.$$

Значение «Арифметики» Диофанта заключается не только в ее содержании, но даже в пометках на полях ее страниц. Именно на полях этой книги гениальный Пьер де Ферма (1601–1665) примерно в 1637 г. сделал следующую интригующую запись:

> «Невозможно представить куб в виде суммы двух кубов, или четвертую степень в виде суммы двух четвертых степеней, или вообще любую степень кроме квадрата в виде суммы двух степеней того же порядка. Этому я нашел замечательное доказательство. Но поля книги слишком узки, чтобы вместить его».

Смелое заявление, но на полях не хватило места для доказательства! Эта проблема, известная как Великая теорема Ферма, более чем 300 лет будоражила умы любителей математики. Сотни ученых пытались найти это загадочное доказательство. Задача оказалась настолько трудной, что было решено: Ферма, скорее всего, ошибся. Однако в 1995 г. британец Эндрю Уайлс нашел гениальное решение.

Невозможно передать доказательство Уайлса в нескольких словах, потому что оно требует знания сложнейших областей высшей математики. Но он доказал, что для всех ненулевых целых положительных чисел x, y, z и степени $n \geqslant 3$ равенство $x^n + y^n = z^n$ не выполняется. Можно найти огромное количество пифагоровых троек для $n = 2$, но нет ни одной тройки для n, большего, чем 2.

Для случая $n = 3$ это утверждение уже было доказано Леонардом Эйлером. С тех пор самые блестящие умы в области алгебры и теории чисел обращались к этой проблеме. Уайлс представил свое первое доказательство в 1993 г., но в него закралась ошибка. Два года спустя с помощью Ричарда Тейлора ему удалось исправить ее и окончательно решить эту проблему.

ВОЗРАСТ ДИОФАНТА

Как и в случае с Пифагором, о жизни Диофанта известно мало. Существует предположение о датах его рождения и смерти, но на самом деле мы даже не знаем достоверно, в каком веке он жил. Однако мы можем вычислить, в каком возрасте он умер. Эпитафия на его могиле, сформулированная в виде задачи, сохранилась в греческой литературе в качестве головоломки:

> «Прохожий! Это могила Диофанта, где с удивительной точностью показано, сколько лет он прожил. Детство Диофанта длилось одну шестую часть его жизни. Затем после одной двенадцатой своей жизни он отрастил бороду. Затем после одной седьмой он женился. Пять лет спустя у него родился сын, который, достигнув половины возраста отца, скоропостижно умер. Отец прожил еще четыре года, оплакивая сына. Этих сведений достаточно, чтобы узнать возраст Диофанта».

Давайте поясним условие задачи: детство Диофанта заняло одну шестую часть его жизни, отрочество — одну двенадцатую, юность — одну седьмую. Через пять лет после свадьбы родился сын, который умер за четыре года до смерти Диофанта, прожив вдвое меньше своего отца. В каком возрасте умер Диофант?

Найти решение вовсе не трудно.

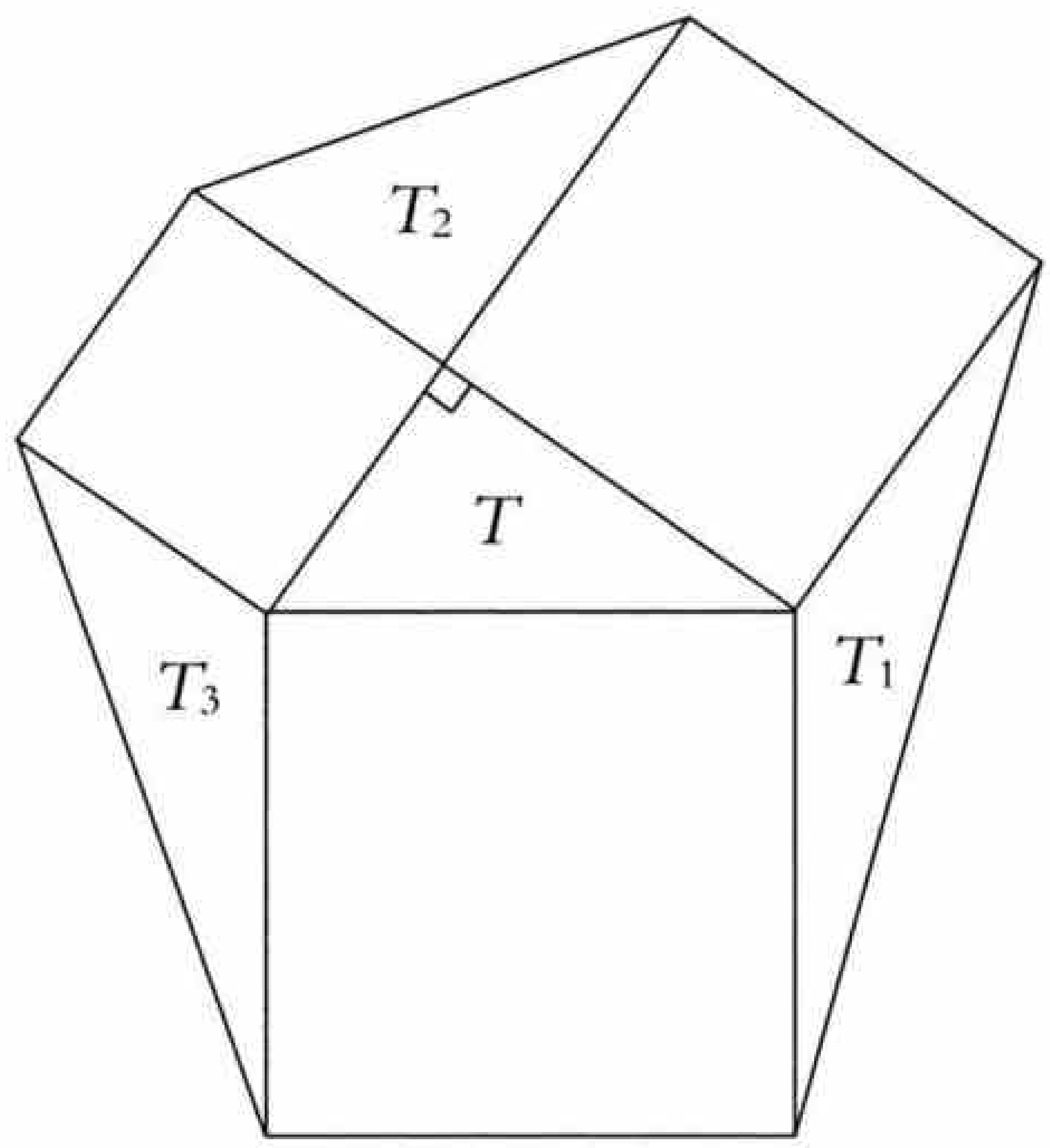
Достаточно выполнить вычисления по следующей формуле:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

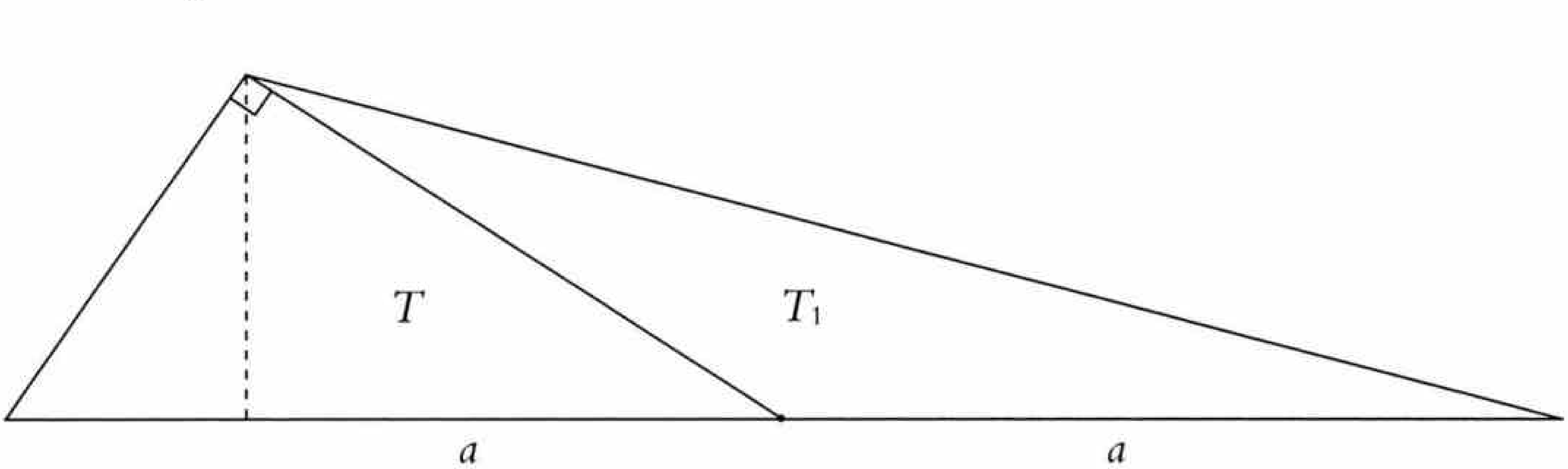
Пифагорейское отношение в других многоугольниках

Древнегреческое пифагорейское отношение связано с очень специфической фигурой — прямоугольным треугольником. А как связаны квадраты, построенные на сторонах произвольного треугольника? Или на сторонах параллелограмма?

Завершение построения фигуры Пифагора

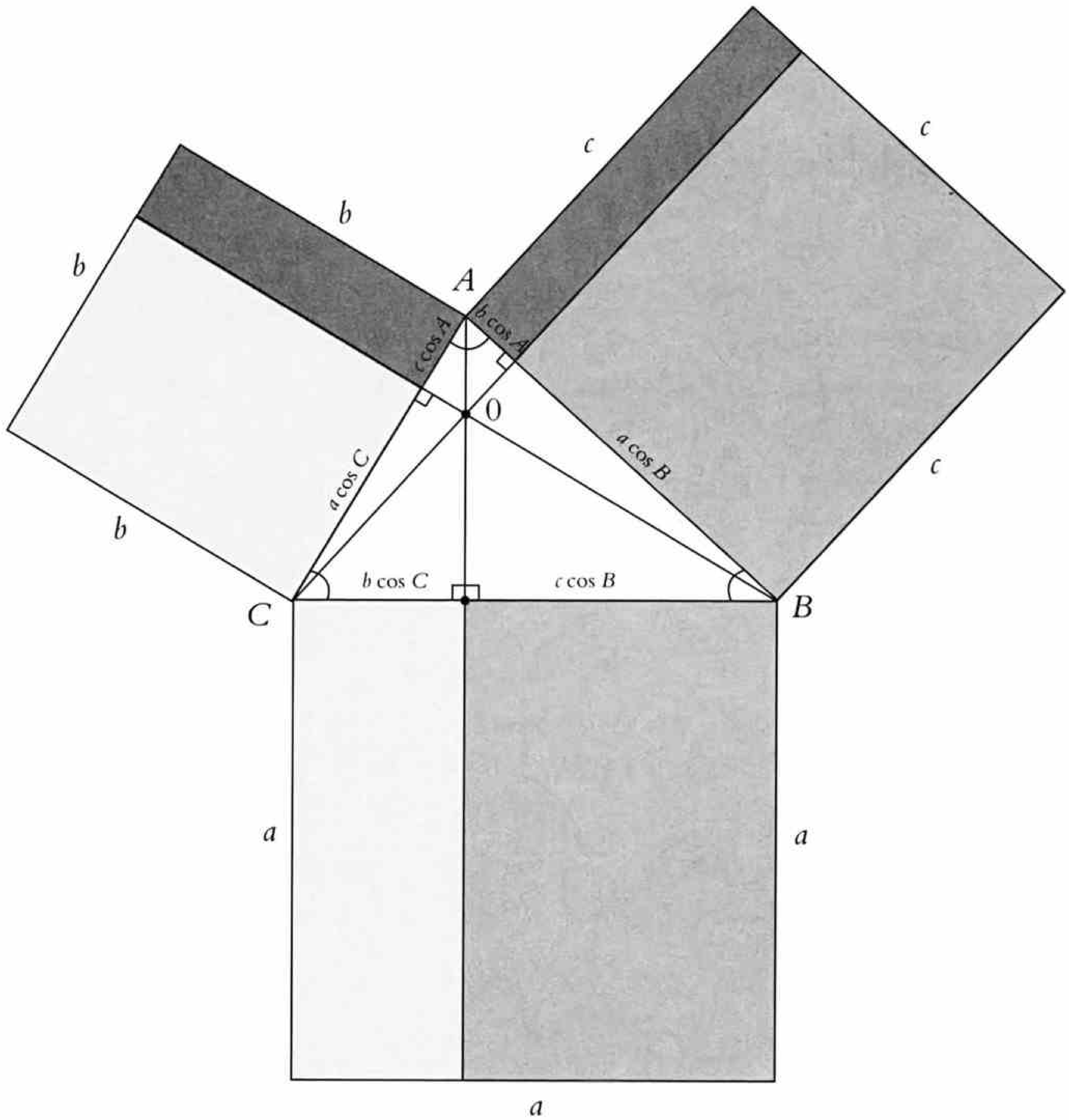


Если добавить три отрезка к квадратам, построенным на сторонах прямоугольного треугольника, то получится шестиугольник, который содержит три новых треугольника с площадями T_1, T_2 и T_3. Чему равны площади новых треугольников? Все три треугольника имеют точно такую же площадь T, как у исходного пифагорейского треугольника: $T_1 = T_2 = T_3 = T$. Например, на следующем рисунке видно, что $T_1 = T$, так как эти треугольники имеют одинаковое основание и высоту. Этот рисунок получен поворотом треугольника с площадью T_1 на 90°. С двумя другими треугольниками можно поступить аналогично.



Теорема косинусов

Если ABC — произвольный треугольник (не обязательно прямоугольный), то по-прежнему имеет смысл рассмотреть три квадрата длин сторон и найти отношение между ними. Рассмотрим, например, остроугольный треугольник ($A < 90°$). Решение вытекает из следующего рисунка:



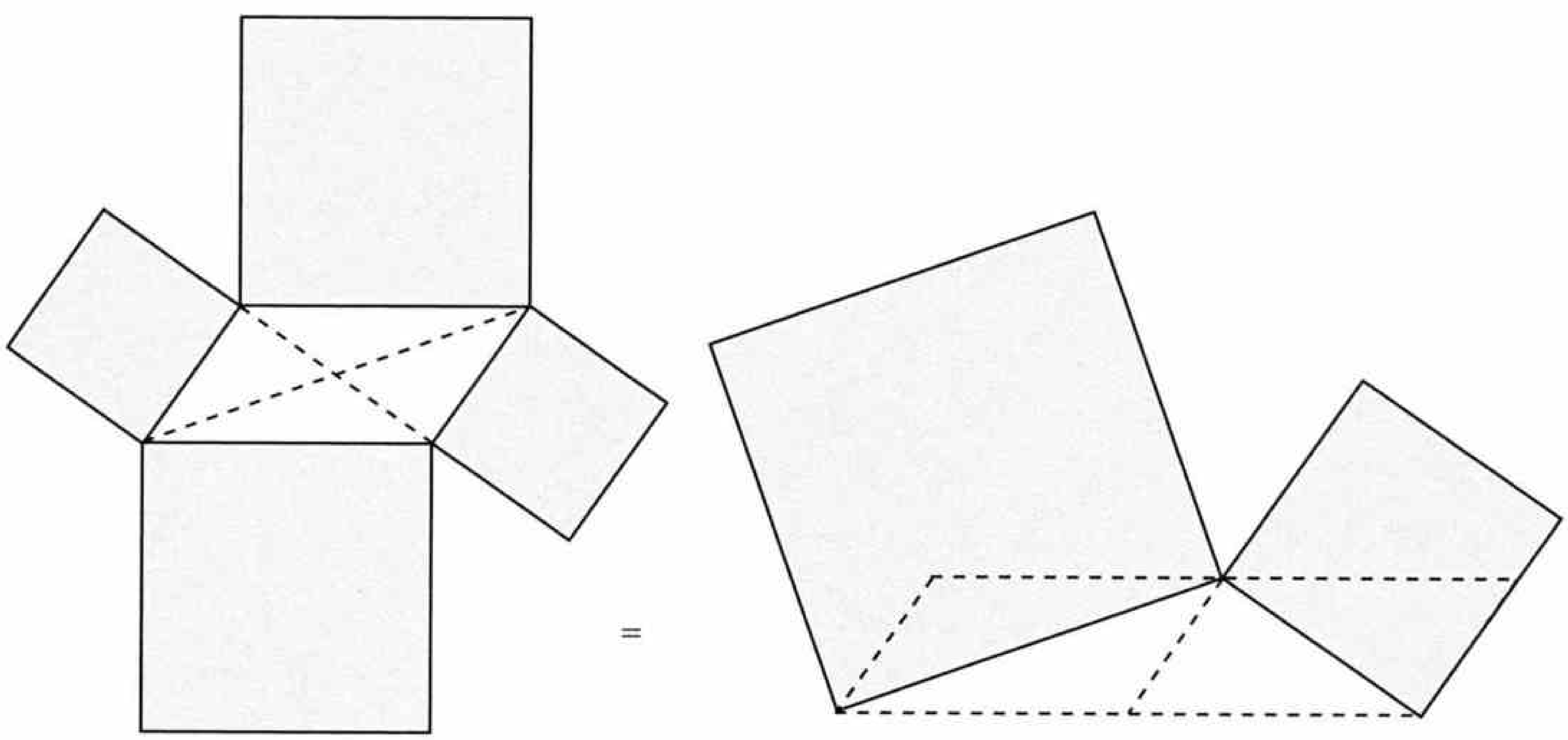
Проведя в треугольнике три высоты и продолжив их, мы разделим каждый квадрат, построенный на стороне треугольника, на два прямоугольника. Тогда правый верхний прямоугольник имеет площадь $c \cdot (a \cos B)$. Удивительно, но она равна площади правого нижнего прямоугольника. Левые части имеют площадь $b \cdot (a \cos C)$. Два маленьких кусочка также равны $b \cdot (c \cos A)$, поэтому имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A.$$

Это соотношение называется теоремой косинусов. Если $A = 90^\circ$, то $\cos 90^\circ = 0$, и мы получаем $b^2 + c^2 = a^2$, другими словами — теорему Пифагора, которая, таким образом, является частным случаем теоремы косинусов.

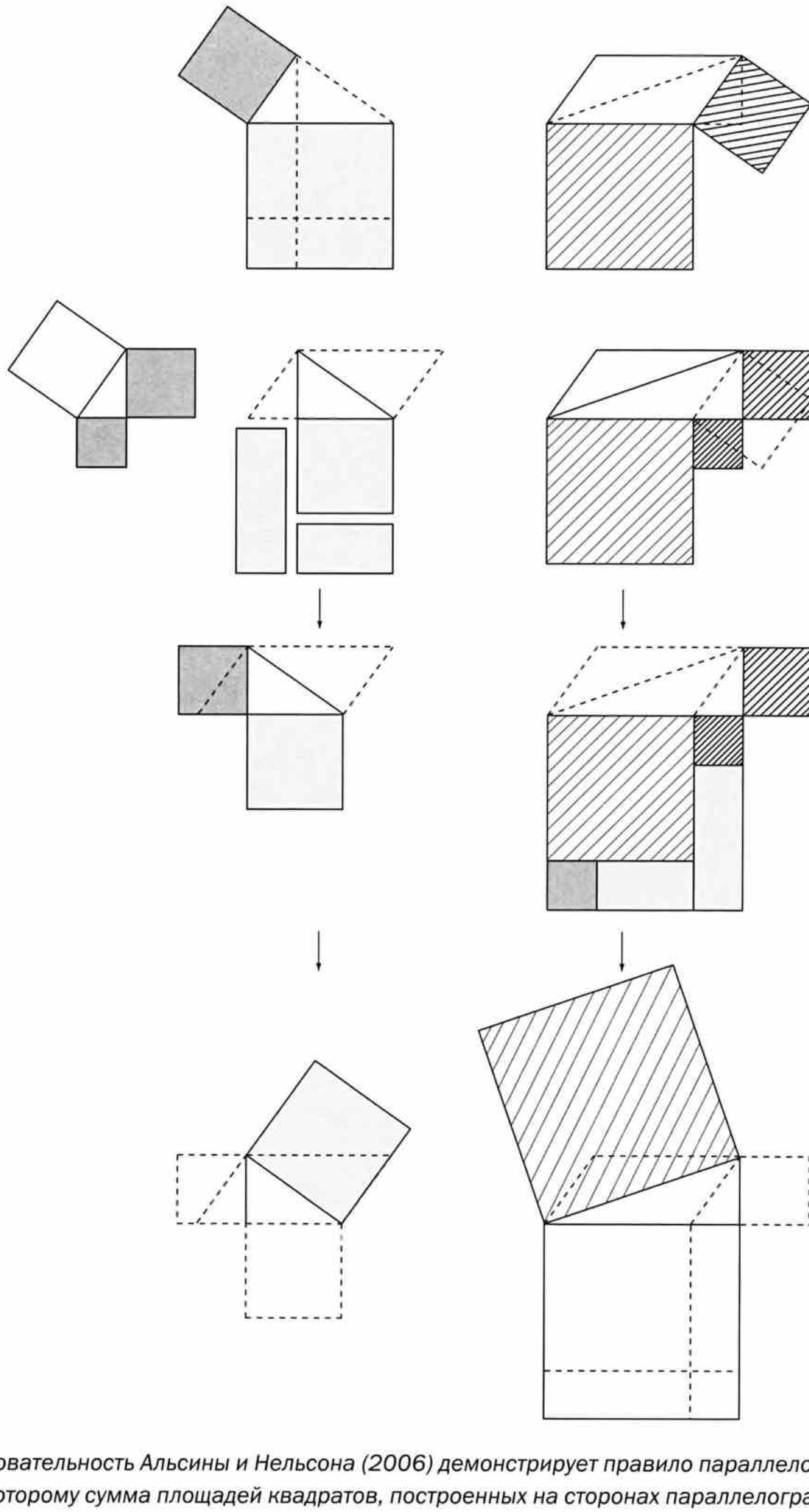
Правило параллелограмма

Теперь мы сформулируем интересное свойство не для трех, а для четырех квадратов, построенных на сторонах параллелограмма, как показано ниже.



Как видно на рисунке, сумма площадей четырех квадратов равна сумме площадей двух квадратов, построенных на диагоналях. Ниже приводится последовательность шагов, в которой теорема Пифагора применяется не менее четырех раз.

В результате доказывается правило параллелограмма. Самое интересное (и красивое с точки зрения геометрии) заключается в том, что если вместо параллелограмма взять прямоугольник, то правило параллелограмма оказывается не чем иным, как теоремой Пифагора. Таким образом, обе теоремы равносильны.



Последовательность Альсины и Нельсона (2006) демонстрирует правило параллелограмма, по которому сумма площадей квадратов, построенных на сторонах параллелограмма, равна сумме площадей квадратов на его диагоналях.

Теорема Пифагора в трехмерном пространстве

В первой главе мы видели непосредственное обобщение теоремы Пифагора для трехмерного пространства. Длина большой диагонали параллелепипеда с ребрами a, b, c вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{3}$$

Но это простое свойство лишь вершина айсберга пифагорейских соотношений в трехмерном пространстве.

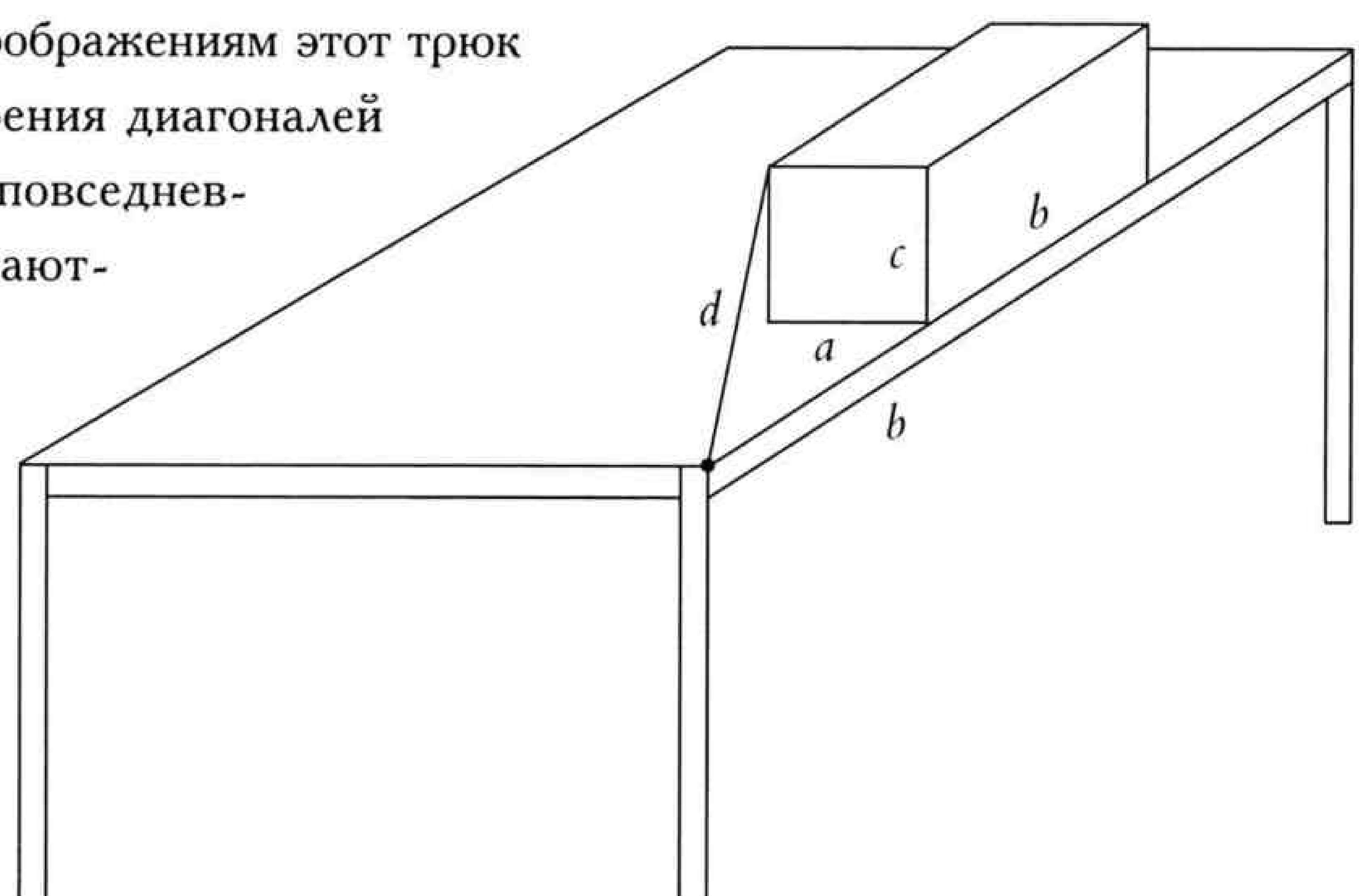
Измерения без теоремы Пифагора

Представьте себе, что вы хотите узнать длину диагонали прямоугольной коробки, которую нельзя открыть (например, упакованный подарок). Мы можем посчитать длину диагонали d по ребрам a, b, c, потому что мы не можем измерить ее изнутри.

Является ли формула (3) единственным способом вычислить значение диагонали d? Если известны размеры коробки, то можно воспользоваться древним, но гениальным трюком.

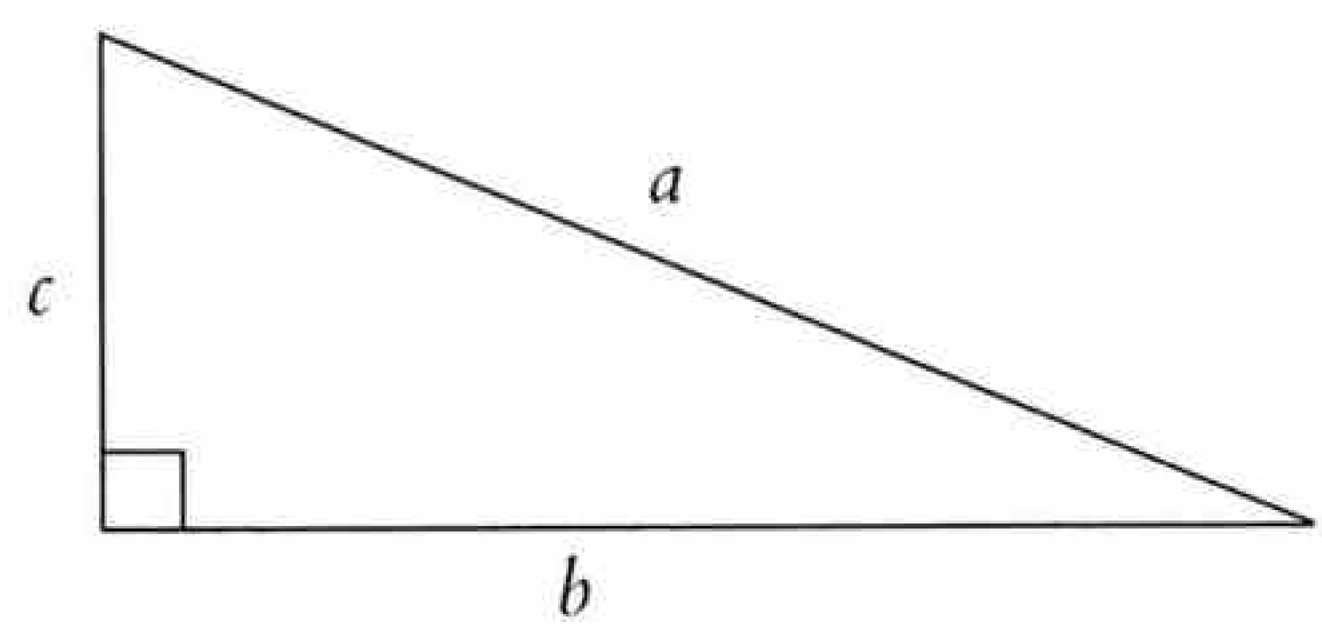
Угол стола используется как точка отсчета, а коробка помещается вдоль края стола, так чтобы расстояние до угла равнялось ее длине. Теперь мы можем легко представить диагональ d от угла стола до верхнего угла коробки. И эту диагональ легко измерить.

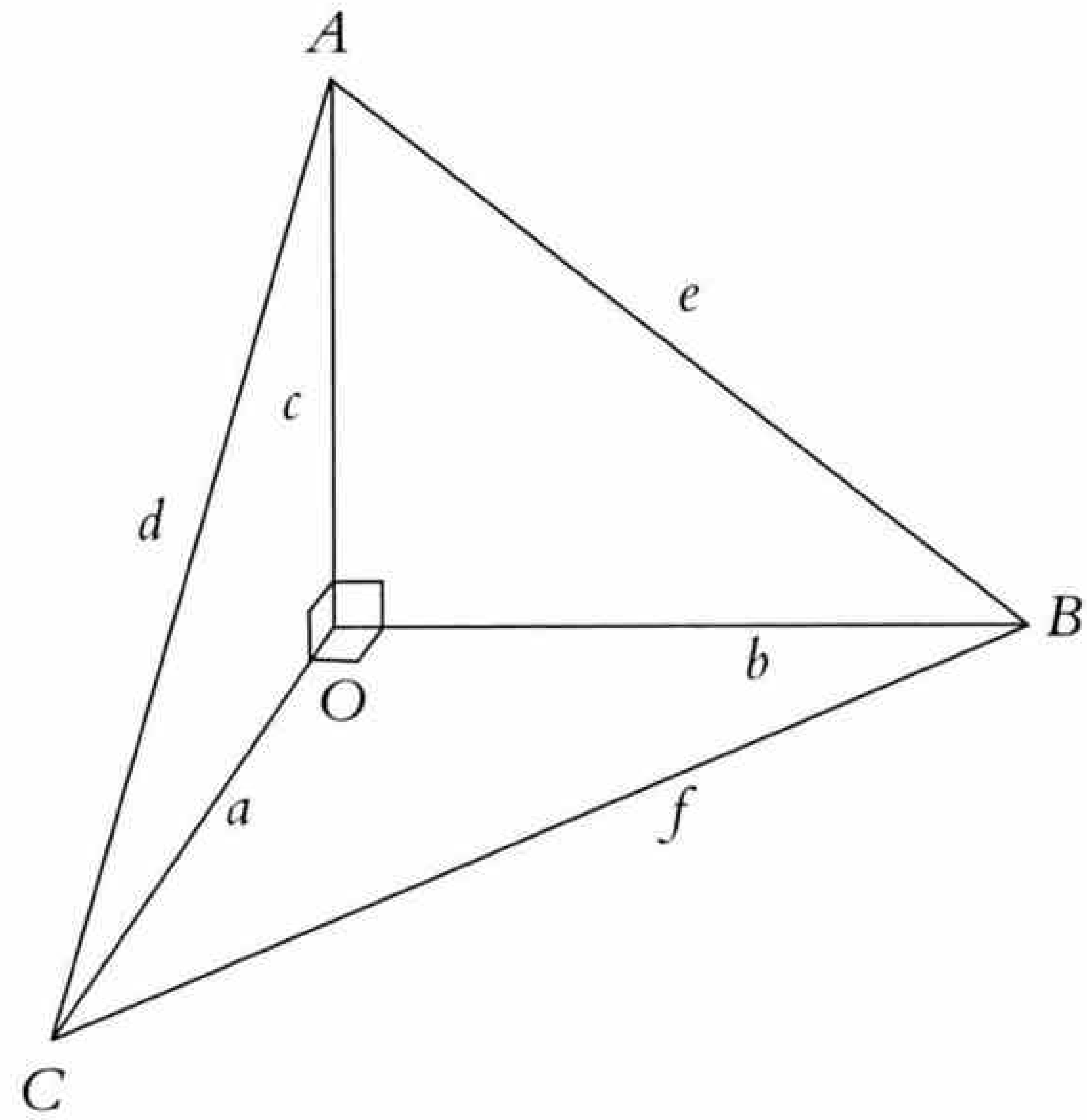
По практическим соображениям этот трюк не подходит для измерения диагоналей больших объектов, но повседневные задачи легко решаются таким способом. Иногда, и даже часто, остроумная изобретательность стоит больше, чем тысяча элегантных формул.

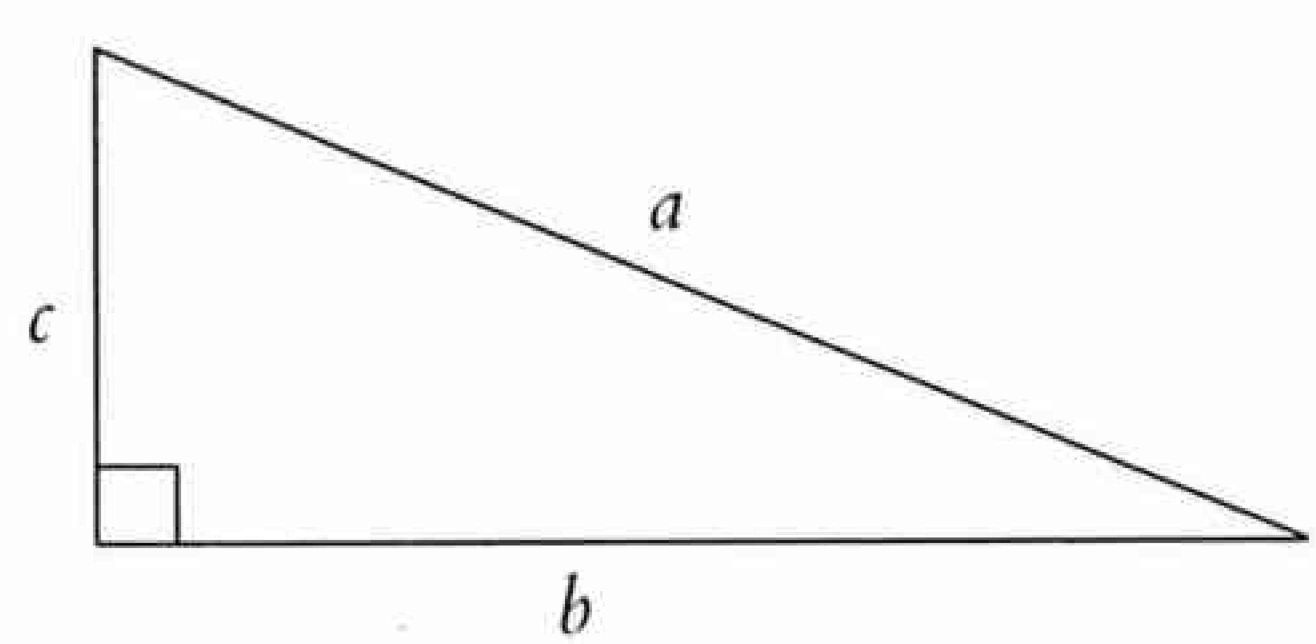


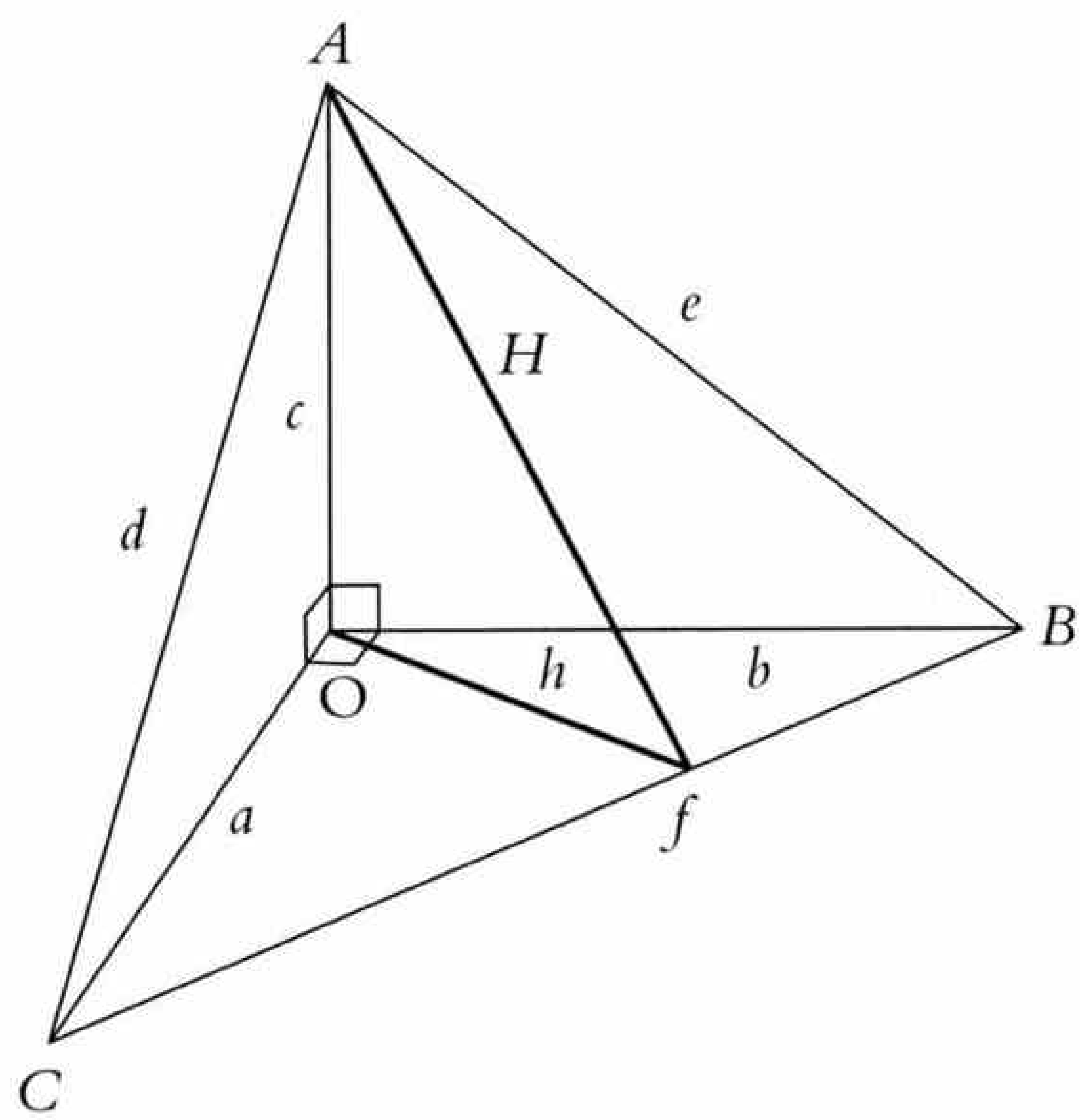
От прямоугольного треугольника к тетраэдру

Различные фигуры легко перенести из двухмерной плоскости в трехмерное пространство, но что произойдет, если попытаться обобщить теорему Пифагора для трехмерного пространства?









При переходе от плоскости к трехмерному пространству мы рассмотрим в качестве аналога плоского треугольника, определенного тремя вершинами, пространственный тетраэдр, определенный четырьмя вершинами. Тогда прямоугольный треугольник будет иметь своим трехмерным аналогом прямоугольный тетраэдр, в котором три ребра, сходящиеся в одной вершине, взаимно перпендикулярны.

Таким образом, если теорема Пифагора на плоскости связывает квадрат на гипотенузе с квадратами на катетах, то возникает вопрос: есть ли в прямоугольном тетраэдре в пространстве какая-то связь между квадратом площади треугольника ABC и квадратами площадей трех других треугольных граней? Удивительно, но такая связь есть! Более того, эта связь представляет собой идеальный эквивалент традиционного соотношения Пифагора:

$$S^2_{ABC} = S^2_{ACO} + S^2_{ABO} + S^2_{BCO}.$$

Это так называемая теорема де Гуа, названная в честь ее первооткрывателя, священника Жан-Поля де Гуа, французского математика эпохи Просвещения.

Для проверки соотношения прежде всего заметим, что число граней, прилежащих к перпендикулярным ребрам прямоугольного тетраэдра, равно трем. Поэтому:

$$S^2_{ACO} + S^2_{ABO} + S^2_{BCO} = \left(\frac{1}{2}ac\right)^2 + \left(\frac{1}{2}bc\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ab\right)^2 =$$

$$= \frac{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2}{4} = \frac{c^2(a^2+b^2) + a^2b^2}{4} = \frac{f^2c^2 + a^2b^2}{4}. \qquad (4)$$

С другой стороны, как видно на рисунке на предыдущей странице, площадь основания COB может быть посчитана двумя различными способами (первое выражение соответствует первому способу, а второе выражение — второму), а именно:

$$\frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}h \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}h \cdot f.$$

Из первого и последнего выражений следует:

$$h = \frac{a\,b}{f}.$$

По теореме Пифагора можно посчитать площадь треугольника ABC с высотой H:

$$H^2 = c^2 + h^2 = c^2 + \frac{a^2b^2}{f^2}.$$

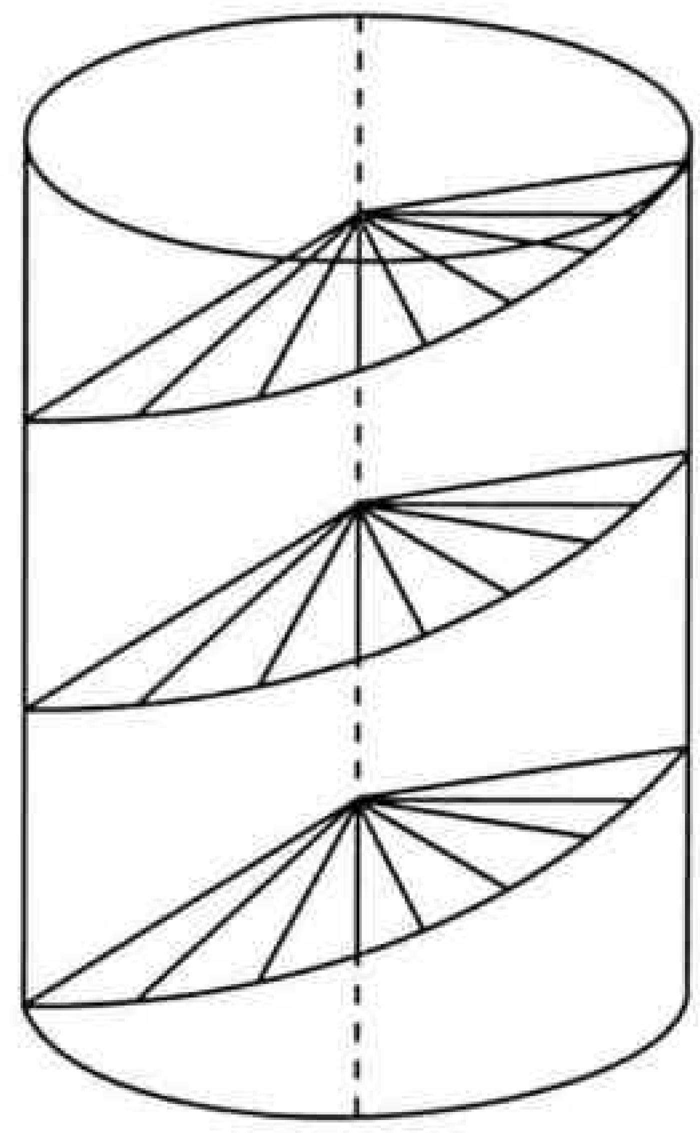
Тогда

$$S^2_{ABC} = \left(\frac{1}{2} f \cdot H\right)^2 = \frac{1}{4} f^2 \left(c^2 + \frac{a^2b^2}{f^2}\right) = \frac{f^2c^2 + a^2b^2}{4},$$

что совпадает с выражением (4).

Теорема Пифагора и винтовая лестница

Давайте представим средневековую башню, на вершине которой злодей заточил принцессу, и добраться туда можно лишь по длинной винтовой лестнице. Теперь представим себе рыцаря в доспехах, который с мечом наперевес поднимается по ступеням. Он не знает, что ждет его за бесконечными поворотами винтовой лестницы. Чтобы не упасть, он касается рукой холодных каменных стен. Он шагает по треугольным ступенькам, соединяющим центральную ось башни с внешней цилиндрической поверхностью.

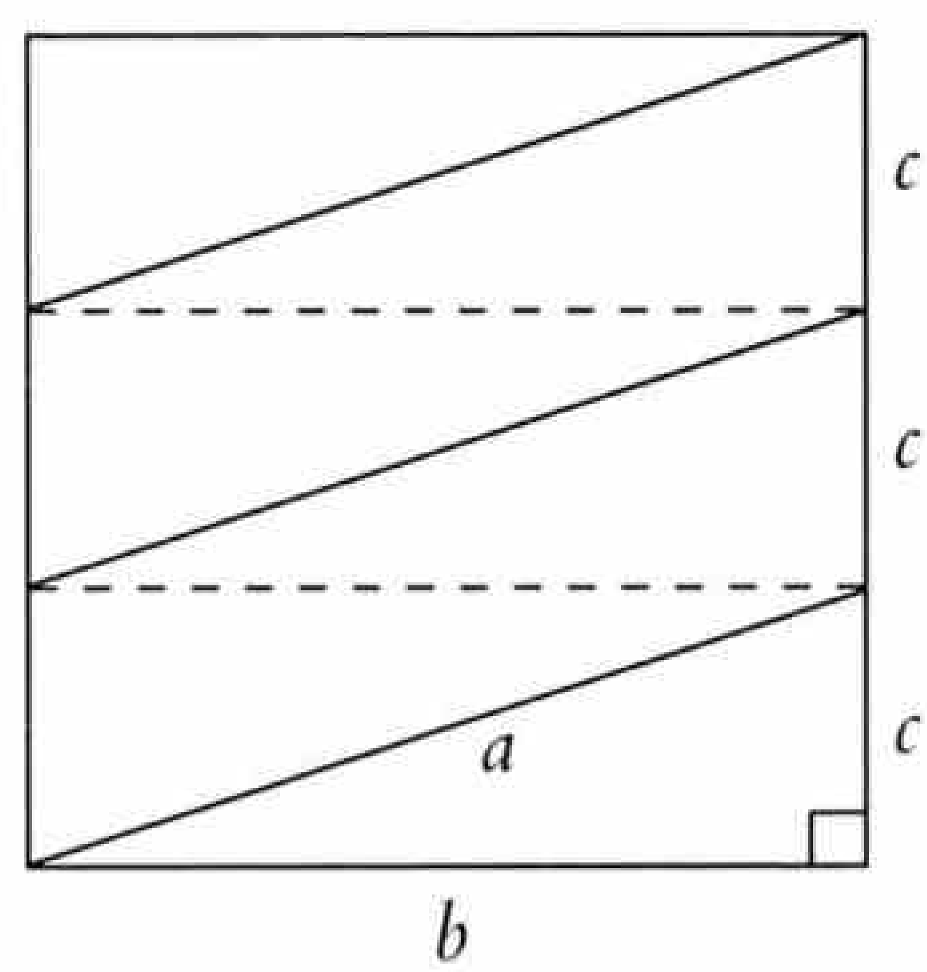


А теперь забудем о рыцаре и посмотрим на башню с точки зрения геометрии. Винтовая лестница башни представляет собой красивую математическую кривую, называемую спиралью.

Винтовая лестница в форме спирали, созданная Антонио Гауди для храма Святого Семейства в Барселоне.

ТАЙНА ПРОСТОЙ КОРОБКИ

Пифагоровы тройки означают, что существует бесконечное количество прямоугольников, стороны и диагонали которых являются целыми числами. Но существует ли параллелепипед (коробка) с ребрами, выраженными целыми числами a, b, c, такими, что длины диагоналей граней $\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{b^2+c^2}, \sqrt{a^2+c^2}$ и большой диагонали $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ также являются целыми числами? Эта тайна до сих пор не разгадана. Найдены многогранники с аналогичным свойством, но ни одной простой коробки.

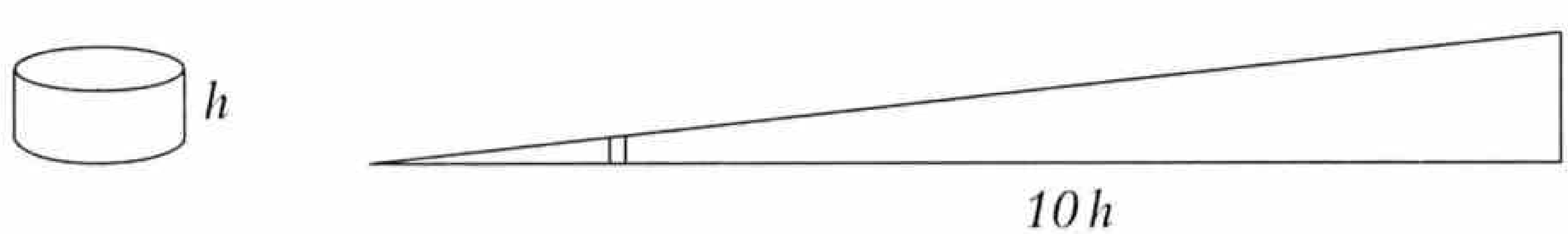


Теперь станем на место злодея, который захватил принцессу и построил башню с винтовой лестницей, чтобы рыцари в сияющих доспехах не вмешивались не в свое дело. Чтобы сделать спираль, достаточно взять прямоугольный лист бумаги и нарисовать три прямоугольных треугольника с равными и параллельными гипотенузами. Тогда спираль получается путем склеивания двух противоположных краев бумаги. Нарисованная кривая имеет постоянный наклон, как у винтовой лестницы.

В этом примере теорема Пифагора позволяет нам вычислить общую длину спирали L:

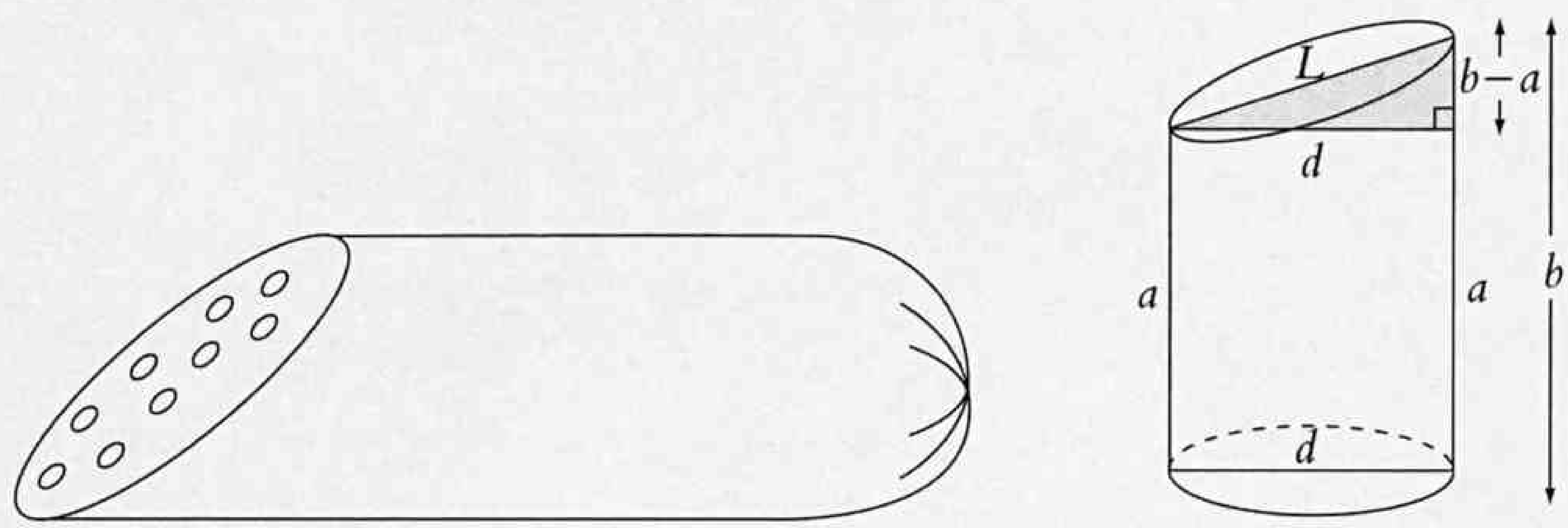
$$L = 3\,a = 3\sqrt{b^2+c^2}.$$

Теперь рассмотрим еще один интересный случай. Возьмем картонную трубку высотой h.



ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ПАЛКА САЛЯМИ

Палка салями имеет цилиндрическую форму. Отрезанные под углом куски представляют собой эллипсы. Как видно на рисунке, если диаметр палки салями равен d, то длина эллипса L зависит от величины угла, определенного длиной отрезка $b - a$. По теореме Пифагора $L = \sqrt{(b-a)^2 + d^2}$. Таким образом, при заданном d можно отрезать сколь угодно большие кусочки (ограниченные только общей длиной палки салями). Размер этих кусочков определяется теоремой Пифагора, но их толщина, конечно, будет зависеть от того, насколько мы голодны!



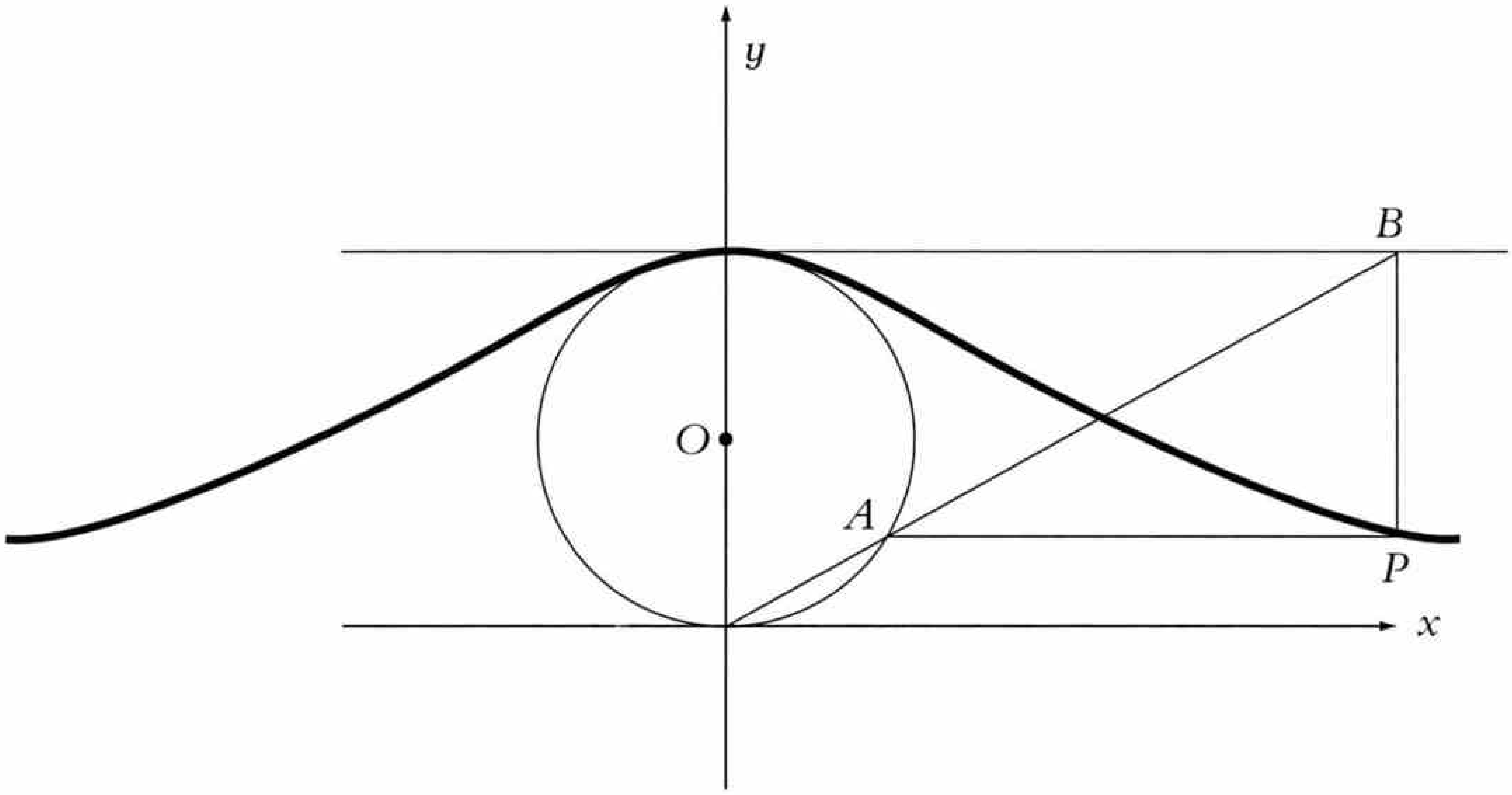
Мы хотим нарисовать спираль с наклоном в 10 % и посчитать ее длину. Для этого построим на бумаге прямоугольный треугольник с катетами h и $10h$. Тогда наклон гипотенузы будет равен отношению длины противолежащего катета к длине прилежащего катета:

$$\frac{h}{10h} = \frac{1}{10} = 0,1,$$

то есть 10 %. Длина гипотенузы составит $\sqrt{h^2 + (10h)^2} = h\sqrt{101}$, и, обмотав треугольник бумаги вокруг цилиндра, мы получим искомую спираль.

Кривая Аньези

Самым серьезным математическим достижением итальянского математика Марии Гаэтаны Аньези (1718–1799) было исследование теоремы Пифагора и кривой, носящей теперь ее имя.



Рассмотрим фиксированную окружность с центром в точке O. Для каждой точки на окружности можно провести прямую AB, которая определяет прямоугольный треугольник ABP. Если точка A будет двигаться по окружности, то какую кривую опишет точка P? На рисунке траектория точки P изображена жирной изогнутой линией, которая называется кривой Аньези.

Кривая задается уравнением $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, и площадь под ней равна π.

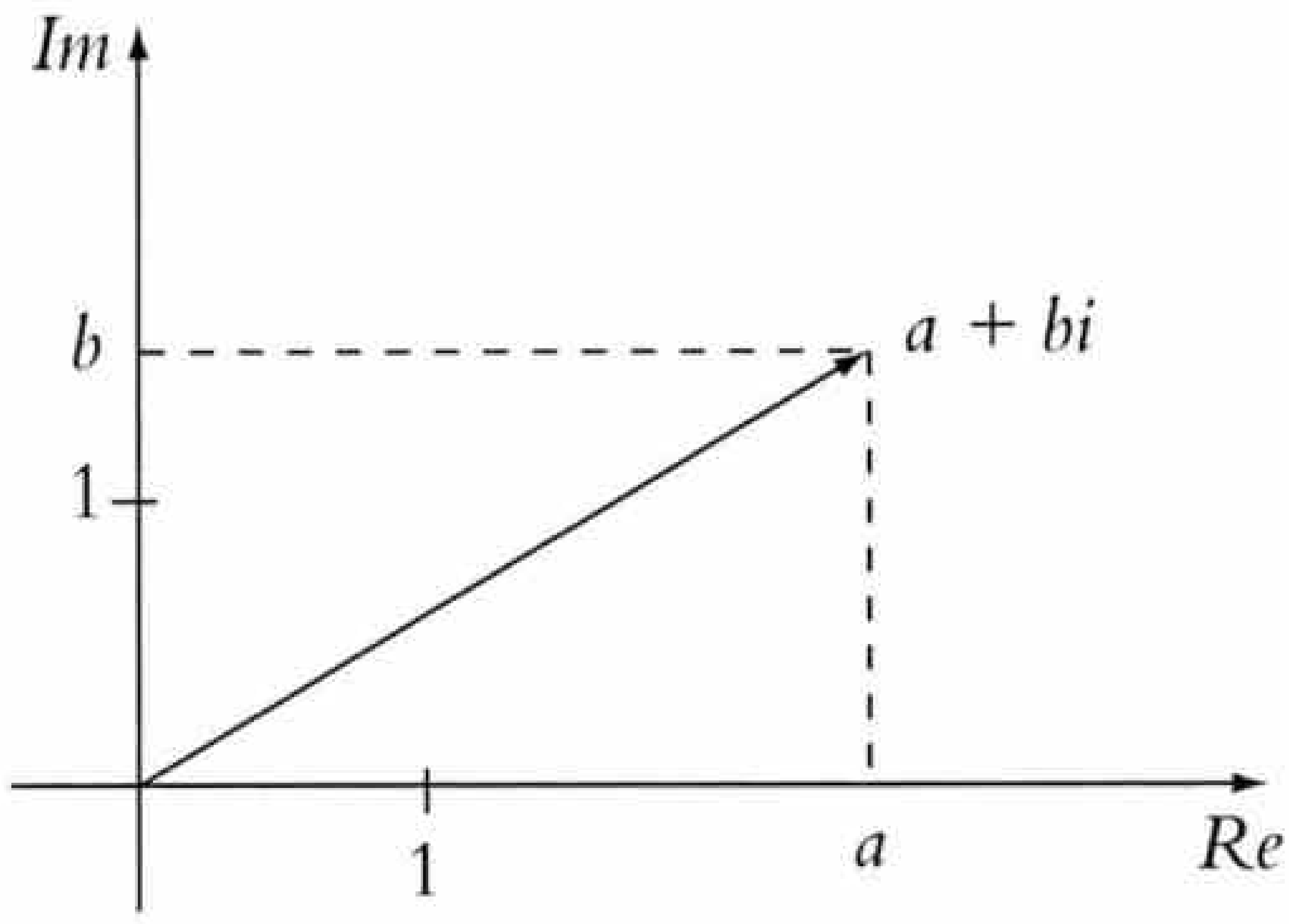
Комплексные числа

Исследование квадратных корней и решений квадратных уравнений привело к странным выражениям, как, например, $\sqrt{81-144}$, не имеющим никакого реального смысла. В то время как уравнение $x^2 = 1$ имеет решения ± 1, уравнение $x^2 = -1$ не имеет вещественных корней.

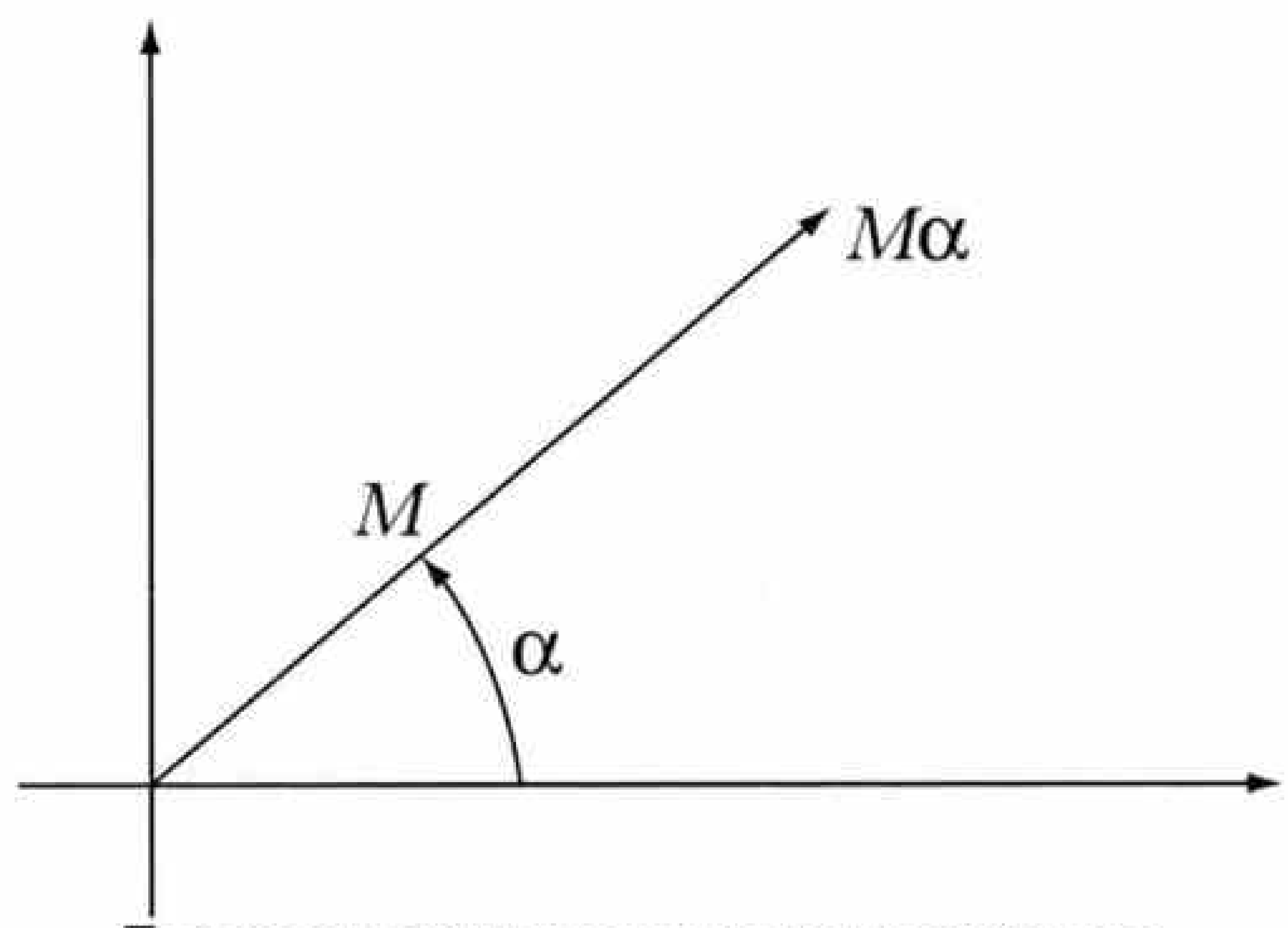
ВЕДЬМА АНЬЕЗИ

В английском языке кривая Аньези иногда называется «ведьмой Аньези» из-за неудачного перевода. Название кривой по-итальянски звучит как la versiera и происходит от морского термина, означающего «канат, который поворачивает парус», форма которого похожа на эту кривую. Переводчик перепутал этот термин с тосканским словом versiera, что значит «ведьма».

Однажды математик и философ эпохи Возрождения Джероламо Кардано сформулировал задачу о разложении числа 10 на два слагаемых x и y так, чтобы их произведение равнялось 40: $xy = 40$. В качестве ответа к этой задаче он получил числа $x=5+\sqrt{-15}$ и $y=5-\sqrt{-15}$. Прошло много лет, прежде чем другие великие математики XVIII и XIX вв., Эйлер, Вессель, Арган и Гаусс, завершили создание теории комплексных чисел, определив расширение множества вещественных чисел, в котором все полиномиальные уравнения имеют решение. С символом $i=\sqrt{-1}$ любое комплексное число может быть записано как $a + bi$, где a называется действительной, а b — мнимой частью.



Представление комплексного числа в декартовых координатах.



Представление комплексного числа в полярных координатах.

Работа с такими выражениями намного упрощается, если представить комплексное число $a + bi$ графически, как вектор, имеющий координаты, равные действительной и мнимой части: число a откладывается по горизонтальной оси, а число b — по вертикальной. Именно тогда можно применить теорему Пифагора. Вектор $a + bi$ также можно определить с помощью двух параметров M и α, где $M=\sqrt{a^2+b^2}$ называется модулем, или абсолютным значением числа $a + bi$, а угол α, который вектор образует с горизонтальной действительной осью, называется аргументом числа $a + bi$ и вычисляется как $\operatorname{tg}\alpha = b/a$. Тогда можно легко определить операцию умножения комплексных чисел

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i.$$

Если комплексное число $a + bi$ записано как M_α, а комплексное число $c + di$ — как N_β, то

$$M_\alpha N_\beta = (MN)_{\alpha+\beta}.$$

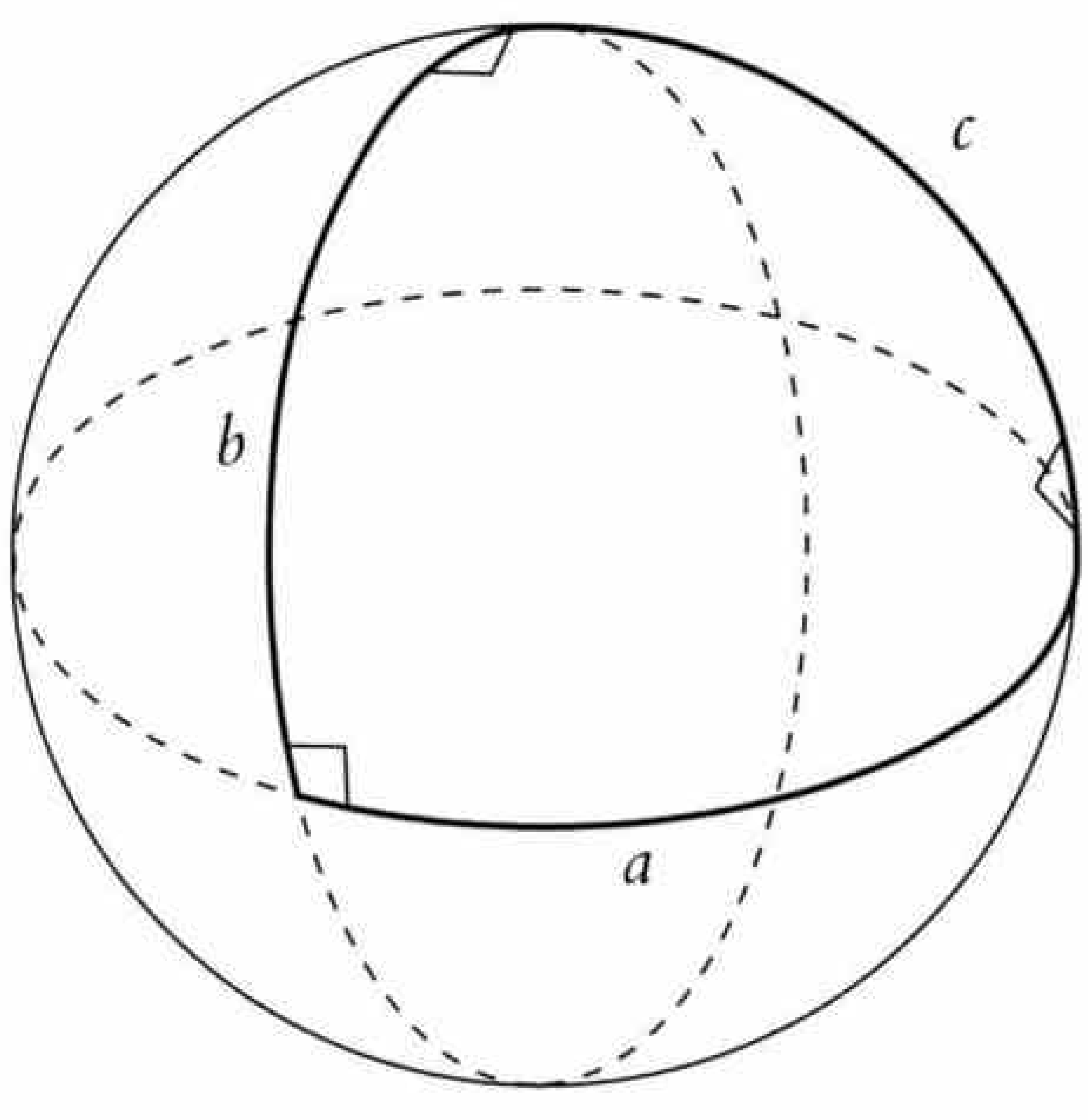
Комплексные числа играют важную роль в алгебре и в комплексном анализе и имеют интересные приложения в электротехнике, электромагнетизме, теории хаоса, квантовой физике, теории фракталов, теории управления, теории сигналов и во многих областях математики, как чистой, так и прикладной.

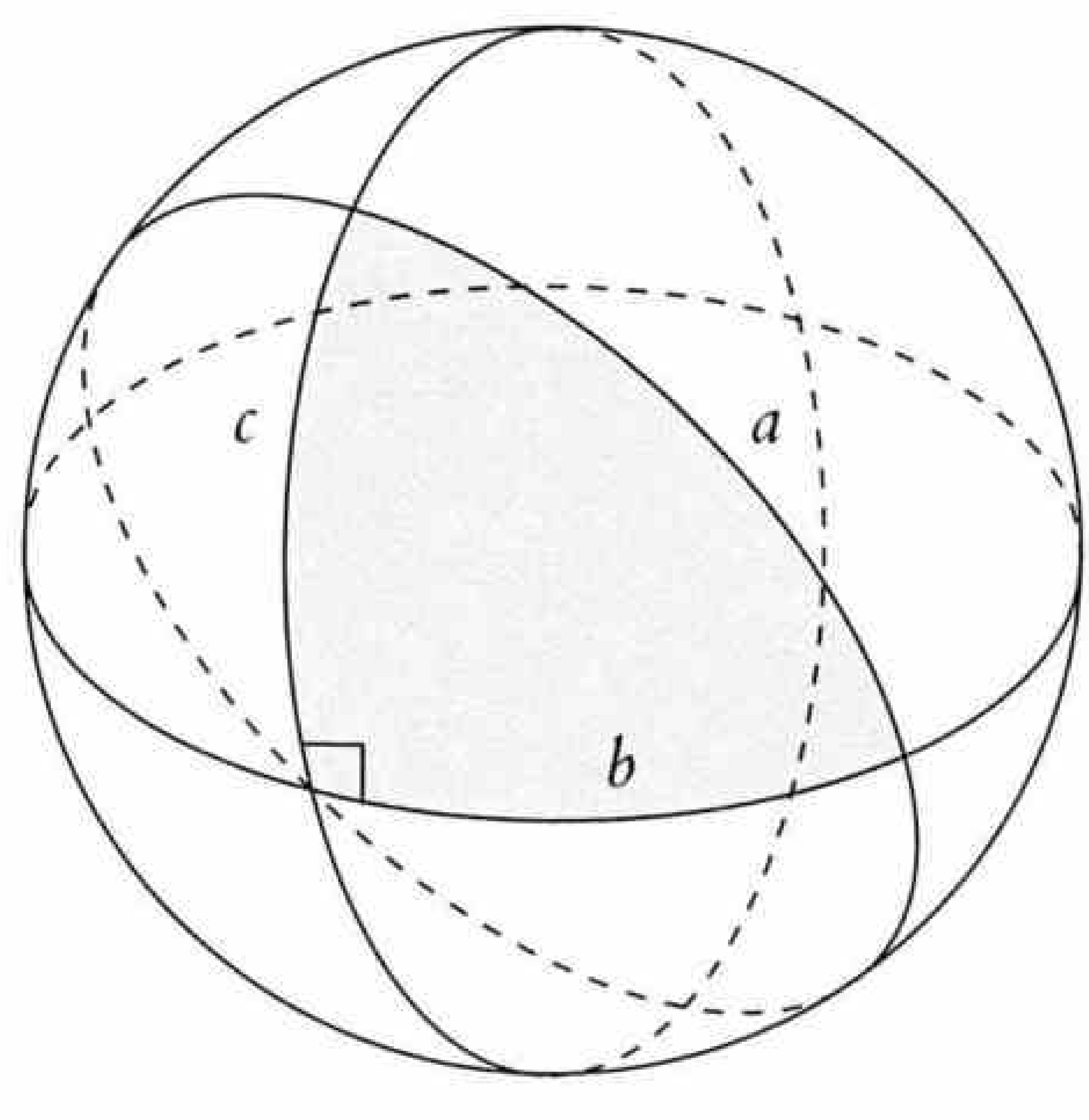
Вездесущая теорема

Мы уже видели, как теорема Пифагора работает на плоскости и обобщается для трехмерного пространства. Но в математике возможны и другие пространства и поверхности.

Теорема Пифагора на других поверхностях

Имеет ли смысл искать соотношение Пифагора на поверхности сферы? Ведь прямые линии на сфере являются окружностями (меридианы, экватор и т. д.). Поэтому на сфере существуют «сферические треугольники». На следующем рисунке показано, что можно построить сферический треугольник с тремя равными дугами окружностей и тремя прямыми углами. На сфере сумма углов сферического треугольника не является фиксированным числом, а это значит, что соотношение $a^2 = b^2 + c^2$ не имеет смысла, так как может быть, что $a = b = c$.





Конечно, можно рассмотреть сферические треугольники и найти соотношения между сторонами a, b, c, выразив их через радиус сферы R и косинусы центральных углов. Однако магия теоремы Пифагора в этом случае не работает.

Эту цель в определенном смысле можно также достигнуть другим остроумным способом: взять лист бумаги с нарисованным прямоугольным треугольником, для которого справедлива теорема Пифагора, и сделать из него изогнутую поверхность. Например, цилиндр. Тогда прямолинейный треугольник станет криволинейным. Это показывает, какую важную роль в математике играет воображение.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УЖАСЫ

Многие писатели часто используют слова, связанные с соотношением Пифагора, например, «гипотенуза». Но если задаться целью поискать упоминания теоремы Пифагора в литературе, можно найти ужасные примеры. Например, в популярном фильме «Волшебник страны Оз» один из героев произносит такую фразу: «Сумма квадратных корней любых двух сторон равнобедренного треугольника равна квадратному корню третьей стороны». В этом предложении перепутали даже равнобедренный треугольник с прямоугольным, а эти два свойства редко совпадают.

В менее литературной, но более веселой истории «Преступление Гипотенузы» из книги «Усадьба богов» про приключения Астерикса и Обеликса одного из архитекторов Юлия Цезаря звали Квадратнагипотенузе.

Теорема Пифагора в других пространствах

Чтобы вычислить расстояние между векторами, Рене Декарт использовал их координаты и формулу Пифагора.

$$d\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

Аналогичная формула работает для векторов с любым количеством координат, в общем случае n. Таким образом, при $n = 4$ мы получим версию теоремы Пифагора для четырехмерного пространства.

Аналитическая, или декартова, геометрия появилась путем отождествления точек на плоскости или в трехмерном пространстве с векторами и координатами. Таким образом Декарт соединил классическую геометрию с арифметикой. Французский философ взял за основу геометрию Евклида, дополнив ее численными измерениями. Сам Декарт так сказал в письме к принцессе Елизавете Богемской:

> «...Я не рассматриваю других теорем, кроме двух: что стороны подобных треугольников пропорциональны и что в прямоугольных треугольниках квадрат основания равен сумме квадратов других сторон. Я осмелюсь предположить, что другие еще неизвестные задачи сводятся только к этим двум теоремам».

В так называемых нормированных векторных пространствах норма, модуль или длина вектора $\vec{x}$ обозначается $\|\vec{x}\|$ и особенно полезна при рассмотрении ортогональных отношений: вектор $\vec{x}$ перпендикулярен вектору $\vec{y}$, если

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2. \tag{5}$$

Здесь теорема Пифагора уже не относится к площадям квадратов, а определяет отношение ортогональности. «Векторами» в этих пространствах могут быть более абстрактные элементы, а не просто направленные отрезки на плоскости: например, непрерывные функции $f(x)$ с вещественными значениями, определенные на отрезке $[0; 1]$.

Норма такой функции может выражаться следующим образом:

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{1/2} \text{ или } \|f\| = \max\left\{|f(x)|, \text{ где } x \text{ в промежутке } [0;1]\right\}.$$

Именно так получаются уравнения вида (5), выражающие ортогональность функций, последовательностей и других элементов векторных пространств.

В так называемом гильбертовом пространстве задается скалярное произведение векторов $\vec{x}\cdot\vec{y}$, например, на плоскости:

$$(x_1, x_2)\cdot(x_1, x_2) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Норма, или длина, вектора вычисляется с помощью выражения $\|\vec{x}\|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$. Поэтому ортогональность векторов следует из свойства $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$, которое эквивалентно теореме Пифагора:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2 \text{ тогда и только тогда, когда } \vec{x}\cdot\vec{y}=0.$$

Таким образом, теорема Пифагора не только является самым интересным и таинственным результатом древней математики, но и до сих пор остается на переднем крае науки.

Эпилог

Теорема Пифагора является не только важным математическим заключением для прямоугольных треугольников с очень полезными приложениями во многих областях. То, что она известна столько веков и до сих пор продолжает оставаться актуальной, объясняется тем, что она лежит в основе пифагорейского философского и математического подхода к пониманию и изучению мира посредством чисел.

Джон Бернал, один из пионеров в области рентгеновской кристаллографии, является также автором нескольких научно-популярных книг. В одной из них, называющейся «Наука в истории общества», о Пифагоре он пишет следующее: «...самое главное заключается в том, что взаимосвязь между математикой, наукой и философией, провозглашенная в его учении, не забыта и по сей день». Это мнение разделял и гораздо более эмоционально выражал известный философ, логик и математик Бертран Рассел в своей работе «История западной философии»: «...Я не знаю другого человека, который был бы столь влиятельным в области мышления, как Пифагор. Я говорю так потому, что кажущееся платонизмом оказывается при ближайшем рассмотрении, в сущности, пифагореизмом». Позже к этому Рассел добавил еще одно проницательное замечание: «Самым странным в современной науке является ее возврат к пифагореизму».

В начале XXI в. цифровая революция вступила в стадию всестороннего преобразования мира. В настоящее время идея о том, что числа лежат в основе всех проявлений науки, техники и, следовательно, повседневной жизни, не подлежит сомнению. Пифагореизм в чистом виде содержится во всех формулах и расчетах, которыми описываются физические и химические явления природы: в генетике и в микрохирургии, в климатологии и в социологии, в экономических исследованиях и в социальных науках, в музыкальных партитурах, в танцах и в каждом стихотворении.

Теорема Пифагора является некоторым образом теоремой нашей жизни, потому что именно сегодня более чем когда-либо наша жизнь является пифагорейской.

Список литературы

Alsina, C. and R. B. Nelsen: Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics, Washington, MAA, 2006.

Davis, P. J.; Hersh, R.: The Mathematical Experience, London, Penguin Books Ltd., 1990.

Flannery, D.: The Square Root of 2. A Dialogue Concerning a Number and a Sequence, New York, Springer, 2006.

Gorman, P.: Pythagoras: A Life, London, Routledge and Kegan Paul Books, 1979.

Loomis, E. S.: The Pythagorean Proposition, NCTM, Michigan, 1968.

Maor, E.: The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 2007.

O'Meara, D. J.: Pythagoras Revived: Mathematics and Philosophy in Late Antiquity, Oxford, Clarendon Press, 1990.

Pedoe, D.: Geometry and the Visual Arts, New York, Dover Publications Inc., 2000.
Издание на русском языке: Пидоу Д. Геометрия и искусство. — М. : Мир, 1979.

Steen, L. A. et al.: Mathematics Today, New York, Random House Inc., 1988.

Strathern, P. Pythagoras and his Theorem: the Big Idea, London, Arrow, 2009.

Алфавитный указатель

Научно-популярное издание
Выходит в свет отдельными томами с 2014 года
Мир математики
Том 5
Клауди Альсина
Секта чисел.
Теорема Пифагора

РОССИЯ
Издатель, учредитель, редакция:
ООО «Де Агостини», Россия
Юридический адрес: Россия, 105066,
г. Москва, ул. Александра Лукьянова, д. 3, стр. 1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.
Генеральный директор: Николаос Скилакис
Главный редактор: Анастасия Жаркова
Старший редактор: Дарья Клинг
Финансовый директор: Наталия Василенко
Коммерческий директор: Александр Якутов
Менеджер по маркетингу: Михаил Ткачук
Менеджер по продукту: Яна Чухиль

Для заказа пропущенных книг и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт www.deagostini.ru, по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной горячей линии в России:
☏ 8-800-200-02-01
Телефон горячей линии для читателей Москвы:
☏ 8-495-660-02-02
Адрес для писем читателей:
Россия, 170100, г. Тверь, Почтамт, а/я 245,
«Де Агостини», «Мир математики»
Пожалуйста, указывайте в письмах свои контактные данные для обратной связи (телефон или e-mail).
Распространение:
ООО «Бурда Дистрибьюшен Сервисиз»
УКРАИНА
Издатель и учредитель:
ООО «Де Агостини Паблишинг» Украина
Юридический адрес: 01032, Украина,
г. Киев, ул. Саксаганского, 119
Генеральный директор: Екатерина Клименко
Для заказа пропущенных книг и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт www.deagostini.ua, по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной горячей линии в Украине:
☏ 0-800-500-8-40
Адрес для писем читателей:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини»,
«Мир математики»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»
БЕЛАРУСЬ
Импортер и дистрибьютор в РБ:
ООО «Росчерк», 220037, г. Минск,
ул. Авангардная, 48а, литер 8/к,
тел./факс: +375 17 331 94 27
Телефон «горячей линии» в РБ:
☏ + 375 17 279-87-87 (пн—пт, 9.00—21.00)
Адрес для писем читателей:
Республика Беларусь, 220040, г. Минск,
а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини»,
«Мир математики»
КАЗАХСТАН
Распространение:
ТОО «КГП «Бурда-Алатау Пресс»

Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую розничную цену книг. Издатель оставляет за собой право изменять последовательность заявленных тем томов издания и их содержание.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии:
Grafica Veneta S.p.A Via Malcanton 2
35010 Trebaseleghe (PD) Italy
Подписано в печать: 14.08.2013
Дата поступления в продажу на территории России: 18.02.2014
Формат 70 х 100 / 16. Гарнитура «Academy».
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 5.
Усл. печ. л. 6,48.
Тираж: 200 000 экз.

ISBN 978-5-9774-0682-6
ISBN 978-5-9774-0633-8 (т. 5)

12+

Данный знак информационной продукции размещен в соответствии с требованиями Федерального закона от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию».
Издание для взрослых, не подлежит обязательному подтверждению соответствия единым требованиям, установленным Техническим регламентом Таможенного союза «О безопасности продукции, предназначенной для детей и подростков» ТР ТС 007/2011 от 23 сентября 2011 г. № 797.

Секта чисел

Теорема Пифагора

Не зря говорят, что идеи витают в воздухе. Иначе как объяснить то, что к одному и тому же открытию приходят ученые, живущие в разных уголках Земли? Теорема Пифагора, пожалуй, классический пример подобного «единомыслия». В той или иной форме это математическое утверждение присутствует практически во всех древних культурах. Этот факт заставляет нас сомневаться в том, что авторство идеи принадлежит исключительно древнегреческому математику. Но, как бы то ни было, одна из самых известных в мире теорем неразрывно связана с именем Пифагора...

ISBN 978-597740682-6

00005

9 785977 406826

12+