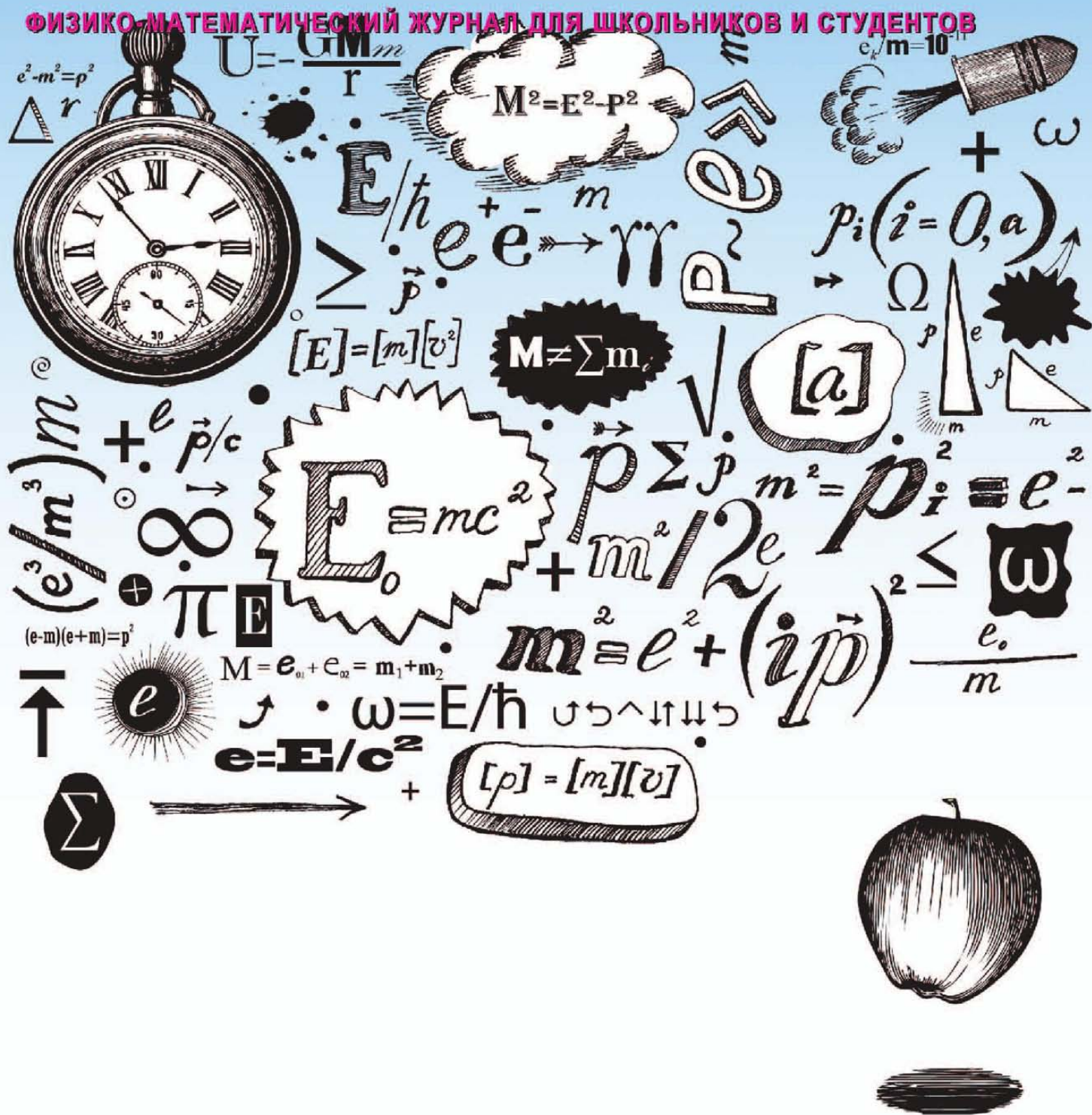


ISSN 0130-2221
2008 №5

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





ЮРИЙ АНДРЕЕВИЧ ОСИПЬЯН
1931 – 2008

Время неумолимо... Все дальше уходит в прошлое тот день начала 1985 года, когда в редакцию «Кванта» пришел только что назначенный Президиумом Академии наук новый Главный редактор Юрий Андреевич Осипьян.

Юрий Андреевич, Вы были молоды, красивы, излучали доброжелательность, энергию и надежность, которой нам тогда так не хватало в связи с безвременной кончиной горячо любимого нами Исаака Константиновича Кикоина. На протяжении всех последующих лет Вы уверенно и мужественно держали в своих руках руль нашего общего дела. Спасибо Вам за все.

Мы всегда будем Вас помнить, Юрий Андреевич, и до конца наших дней будем делать все от нас зависящее, чтобы жил и оставался уникальным наш с Вами журнал «Квант»... Прощайте.

*Редакционная коллегия,
редакционный совет,
редакция журнала «Квант»*

журнал Квант СЕНТЯБРЬ 2008 ОКТАБРЬ 2008 №5

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна), ИФТТ РАН

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Ю.А.Осипьян

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский,
А.А.Егоров, А.В.Жуков,
А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии), П.А.Кожевников,
В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии), С.П.Коновалов, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,
Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Ливинский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

© 2008, РАН,
Фонд Осипяна, «Квант»

- К 100-летию И.К.Кикоина
2 Физик и инженер. *Я.Сморodinский*
3 Теория относительности и теорема Пифагора. *Л.Окунь*
11 Комплексные числа. *С.Дориченко*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи M2101–M2110, Ф2108–Ф2117
21 Решения задач M2081–M2085, Ф2093–Ф2101

К М Ш

- 28 Задачи
29 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
29 Летний турнир имени А.П.Савина «Математика 6–8»

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Распространение света

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 35 И тележка в гору едет... *С.Семинов*
37 Механический генератор. *В.Дроздов*
38 Магнитная сила и закон электромагнитной индукции.
Е.Ромишевский, А.Стасенко

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 40 Как шарик о плиту ударился. *А.Стасенко*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 44 Два тюремщика. *И.Акулич, В.Лецко*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 47 Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия.
А.Черноуцан

ОЛИМПИАДЫ

- 51 XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по математике
54 XLII Всероссийская олимпиада школьников по физике
58 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к статье *Л.Окуня*
II Памяти *Ю.А.Осипяна*
III Шахматная страничка
IV Коллекция головоломок



В праздновании 100-летнего юбилея академика
И.К.Кикоина финансовое участие принимает
ОАО «ТЕХНАБЭКСПОРТ»

К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

Физик и инженер

Я.СМОРОДИНСКИЙ

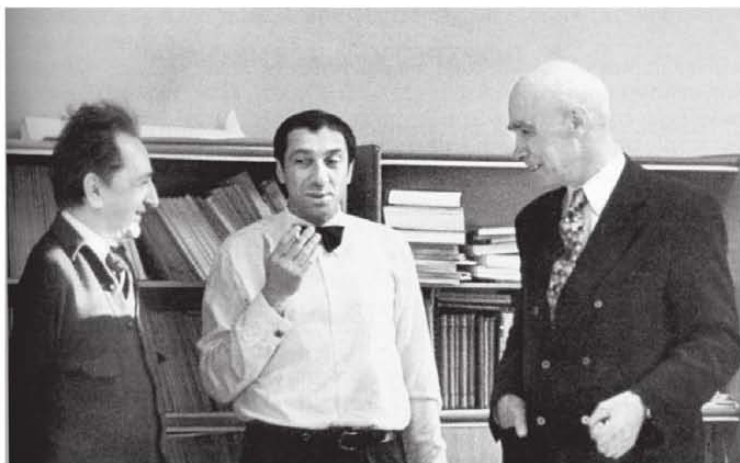
ПЕРВАЯ МОЯ ВСТРЕЧА С ИСААКОМ Константиновичем была необычной. Я, аспирант Ландау, жил в одной из квартир Института физических проблем. В этой же квартире порой останавливались и гости – физики, которые приезжали в Москву. Это был 1940 год. Вечером, довольно поздно, раздался звонок в дверь. Я пошел открывать. Весь проем двери заслоняла огромная меховая медвежья шуба – никаких признаков ее владельца не было видно. Откуда-то из центра шубы появилась рука, и голос (как мне показалось, с высоты) прозвучал: «Здравствуйте, я – Кикоин».

Так я познакомился с человеком, с которым мне было суждено провести много лет.

Настоящая работа началась в 1944 году. Для новой темы, нового задания правительства Кикоин подбирал людей, которые, как он надеялся, составят сильный и дружный коллектив, способный быстро и эффективно решить целую серию задач, никогда не решаемых физиками. Теоретические направления возглавили замечательные люди: член-корреспондент АН СССР И.Н.Вознесенский, который посвятил нас в идеи регулирования, и академик С.Л.Соболев, принесший с собой высочайшую математическую культуру. Работали много и до позднего вечера. Вечером собирались у И.К.Кикоина, и наступало самое интересное и плодотворное время: начиналась дискуссия об основных успехах в сделанном и задачах на будущее.

Исаак Константинович обладал многими талантами: он был внимательным слушателем, помнил и знал все, что было связано с задачей, и мгновенно оценивал правильность и эффективность того, о чем ему рассказывали. Он был не только великим физиком, что общезвестно, но и превосходным инженером. Дело заключалось не только в том, что он понимал конструкции и мог вносить в них важные усовершенствования, но и в том, что он ясно представлял различие между лабораторией и заводом. Он всегда четко знал ту границу, до которой надо доводить лабораторные исследования, чтобы обеспечить практический успех. Он понимал также, какую теорию надо развивать, чтобы ее можно было использовать на промышленном объекте.

Но не только о промышленных вопросах шла речь. Исаак Константинович не ослаблял своего интереса к



И.К.Кикоин (справа) и Я.А.Сморodinский с С.Ю.Юрским (в центре) (1973 г.)

физике, и разговоры о новостях науки всегда завершали наши неофициальные семинары. Старые воспоминания об открытии фотомагнитного эффекта часто приводили к обсуждению новых эффектов в кристаллах, которые можно исследовать в лабораториях. Многие из высказанных идей Кикоин реализовал.

Замечательным качеством Исаака Константиновича было то, что он никогда не оставлял работы в лаборатории, и занятие физикой составляло для него жизненную потребность. Поэтому он до конца своих дней оставался физиком, и это качество делало из него организатора коллектива, который был способен к интенсивной целенаправленной работе.

Интересным периодом в его жизни было время поиска фильтра для разделения изотопов. Были задействованы самые разные направления: на одном этапе медную фольгу кололи иглами, на другом – подбирали порошки. Фильтры приготовили быстро, их выбор был сделан Исааком Константиновичем безошибочно, хотя вначале казалось, что задача почти неразрешимая. Так же быстро был проведен и выбор типа машин из предлагавшихся самых разных конструкций (некоторые из них уже работали в других лабораториях).

Как можно было угадать правильное направление конструирования и отбросить неперспективные типы? Для этого надо было иметь редкую комбинацию инженерного и физического мышления. Именно этим отличалось мышление И.К.Кикоина.

К 100-ЛЕТИЮ И.К.КИКОИНА

С большим удовольствием представляем читателям статью академика Льва Борисовича Окуня. Он всегда уделял большое внимание популяризации науки (достаточно вспомнить его замечательную книгу « $\alpha, \beta, \gamma \dots Z$: элементарное введение в физику элементарных частиц», вышедшую в том числе и в серии «Библиотечка «Квант»).

Несколько публикаций Л.Б.Окуня связаны с проблемами преподавания теории относительности. В январе 2008 года он сделал на эту тему доклад на сессии Российской академии наук, посвященной 100-летию со дня рождения Л.Д.Ландау. Мы предлагаем вам текст этого доклада, подготовленный для презентации в виде слайдов.

Каждый слайд — это маленькое законченное утверждение, мысль, идея, как бы мгновенная вспышка-фотография одного из ракурсов проблемы. Хотя некоторые слайды при первом чтении могут показаться сложными, прочитав текст целиком, вы получите яркое и цельное представление о современном взгляде на теорию относительности Эйнштейна.

Теория относительности и теорема Пифагора

Л.ОКУНЬ

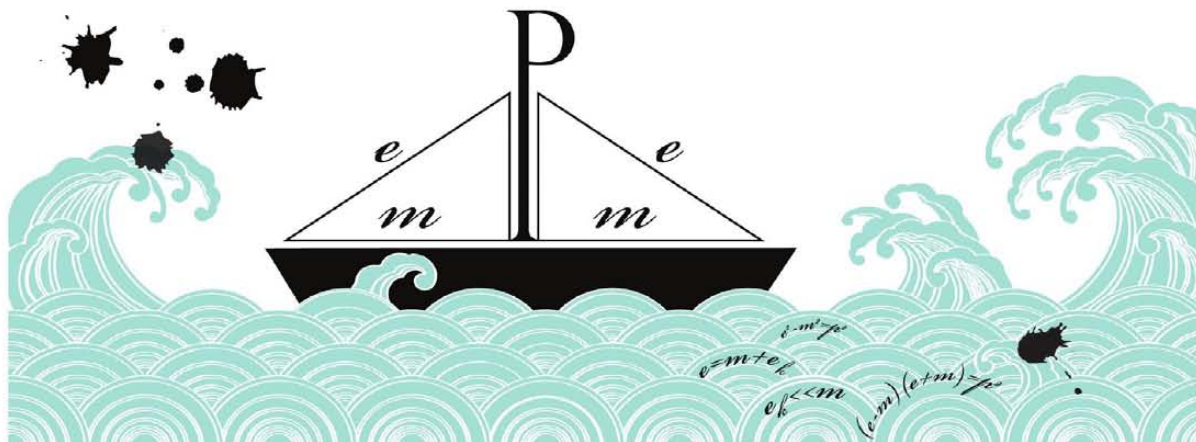
ФИЗИКА XX ВЕКА В КОРНЕ ИЗМЕНИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЕ о том, что такое пустота и материя, и по-новому связала между собой такие свойства материи, как энергия, импульс и масса. Тем важнее не забывать высказывание, приписываемое Фоку: «Физика — наука, по существу, простая. Главная проблема в ней — понимать, что какая буква означает». Формирование фундаментальных понятий физики еще не завершено и вряд ли завершится в обозримом будущем. В частности и поэтому так важно выбирать адекватные слова и буквы при обсуждении физических явлений и теорий.

Постараюсь рассказать об основных формулах тео-

рии относительности максимально просто, пользуясь в основном теоремой Пифагора.

Относительность

Высшая точка зрения. Понятие массы в физике имеет многовековую историю. История эта очень интересна, но здесь мы не будем ее касаться. Вместо этого постараемся взглянуть на массу «с высшей точки зрения». Я использую здесь знаменитое название книги Феликса Клейна «Элементарная математика с высшей точки зрения» (оно традиционно неправильно переводится на русский язык как «Элементарная математика с точки зрения высшей»). Такая высшая,



современная точка зрения, в основе которой лежат принципы симметрии вообще и теория относительности в частности, позволяет избежать терминологической путаницы и связанных с ней парадоксов.

Принцип относительности. Со времен Галилея и Ньютона термин «принцип относительности» выражает невозможность оставаясь внутри замкнутого пространства (например, внутри корабля) любыми экспериментами обнаружить поступательное (равномерное и прямолинейное) движение этого пространства. Эйнштейн в 1905 году обобщил этот принцип на случай существования предельной скорости распространения сигналов. (Конечная скорость распространения света была впервые определена Рёмером еще в 1676 году.) Планк назвал построенную таким образом теорию теорией относительности Эйнштейна.

Механика и оптика. Ньютон пытался построить как теорию движения массивных объектов (тел) – механику, так и теорию распространения света – оптику. Единую теорию вещества и света удалось построить только в XX веке. При этом оказалось, что свет – это тоже вещество, но его частицы безмассовы. Такой взгляд на частицы света – фотоны – до сих пор вызывает сопротивление многих физиков.

Размерности

Единицы, в которых $c = 1$. Максимальную скорость в природе обычно называют скоростью света и обозначают c . При рассмотрении формул теории относительности удобно пользоваться такой системой единиц, в которой c выбрана в качестве единицы скорости. Поскольку $c/c = 1$, в такой системе единиц во всех формулах следует положить $c = 1$, что очень упрощает их. Если измерять время в секундах, то в этой системе единиц расстояние следует измерять в световых секундах: одна световая секунда равна $3 \cdot 10^{10}$ см.

Пуанкаре и c . Один из создателей теории относительности Пуанкаре, говоря в 1904 году о том, что скорость света c входит во все уравнения электродинамики, сравнил ситуацию с геоцентрической теорией эпициклов Птолемея, в которой в соотношения между движениями небесных тел входил земной год. Он высказал надежду, что будущий Коперник избавит электродинамику от c . Но уже в следующем году Эйнштейн показал, что в теории относительности c должна играть ключевую роль.

Сравнение СИ и $c = 1$. В международной системе единиц – СИ – единица скорости 1 м/с навязывается соображениями удобства, стандартизацией производства и торговли, но не законами природы. В отличие от этого, c в качестве единицы скорости навязывается самой природой, когда мы хотим рассматривать фундаментальные процессы в ней.

Размерные множители. Рассмотрим некую физическую величину a . Обозначим $[a]$ размерность этой величины. Умножение a на любую степень мировой постоянной c несомненно меняет ее размерность, но не меняет ее физической сути. В дальнейшем я поясню, почему это так.

Скорость, импульс, энергия, масса. Обычно раз-

мерности импульса, массы и скорости частицы связаны соотношением $[p] = [m][v]$, а размерности энергии, массы и скорости – соотношением $[E] = [m][v^2]$. Введем безразмерную скорость $\bar{v}/c$ и, начиная с этого момента, будем именно ее обозначать $\bar{v}$. Аналогично, будем называть импульсом $\bar{p}$ то, что обычно обозначают $\bar{p}/c$. А энергией будем называть величину $e = E/c^2$. Очевидно, что после этого размерности p , e и m станут одинаковыми, и потому эти величины можно будет измерять в одних и тех же единицах, например – в граммах или в электронвольтах, как это принято в физике элементарных частиц.

О букве e для энергии. Выбор буквы e для обозначения энергии частицы может вызвать недовольство читателя, поскольку обычно этим символом обозначают электрон и элементарный электрический заряд. Однако к путанице такой выбор обычно не приводит, зато позволяет компактно записать формулы для одной частицы, напоминая, что эти формулы написаны в системе единиц, в которой $c = 1$. С другой стороны, как будет видно из дальнейшего, букву E удобно использовать для обозначения энергии двух или большего числа частиц.

О различии между энергией и частотой. Я только что настаивал на том, что $e = E/c^2$, так же, как и E , является энергией несмотря на то, что имеет размерность массы. Но тогда естественно спросить: а почему $\omega = E/\hbar$ является не энергией, а частотой? Ведь квант действия $\hbar$, подобно скорости света c , является мировой константой. Ответ на этот вопрос легко найти, если рассмотреть, как измеряют e и ω . Величины E и e измеряют одинаковым образом – скажем, с помощью калориметра. А частоту измеряют принципиально другим способом – например, с помощью часов. Поэтому равенство $\omega = E/\hbar$ говорит нам о связи между результатами двух различных типов измерений, в то время как равенство $e = E/c^2$ такой информации не содержит. Соображения, аналогичные высказанным относительно частоты, справедливы и для длины волны.

Одна частица

Относительные величины. Кинетическая энергия любого тела – величина относительная: она зависит от того, в какой системе отсчета ее измеряют. То же относится и к импульсу тела. В отличие от них масса тела – величина абсолютная: она характеризует тело само по себе, безотносительно к наблюдателю. Абсолютной величиной является и энергия покоя тела, поскольку в ней система отсчета раз и навсегда фиксирована.

Инвариантная масса. В теории относительности масса тела (частицы) определяется соотношением

$$m^2 = e^2 - p^2. \quad (1)$$

Заметьте, что энергия и импульс данного тела не ограничены сверху, а его масса фиксирована. Формула (1) является простейшим соотношением между энергией, импульсом и массой, которое можно написать «из головы». (Соотношение между e , $\bar{p}$ и m не может быть

линейным, поскольку $\vec{p}$ – вектор, а e и m – скаляры в трехмерном пространстве.)

4-мерный импульс. Как впервые указал Минковский, теория относительности приобретает наиболее простой вид, если рассматривать ее в четырехмерном пространстве-времени. В теории относительности энергия и импульс тела образуют 4-мерный вектор энергии-импульса

$$p_i \ (i = 0, a), \text{ где } p_0 = e, \ p_a = \vec{p}, \ a = 1, 2, 3.$$

Масса является лоренцовым скаляром, характеризующим длину 4-мерного вектора, или просто 4-вектора, p_i :

$$m^2 = p_i^2 = e^2 - \vec{p}^2.$$

4-мерное пространство псевдоевклидово – отсюда знак «минус» в формуле для квадрата длины.

Другой способ понять знак «минус» – это ввести мнимый импульс $i\vec{p}$. Тогда

$$m^2 = e^2 + (i\vec{p})^2,$$

и мы имеем дело с теоремой Пифагора для такого псевдоевклидова прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза m короче большего катета e .

Связь импульса и скорости. Импульс тела связан с его скоростью формулой

$$\vec{p} = e\vec{v}. \quad (2)$$

Эта формула самым простым образом удовлетворяет тому, что 3-мерный вектор (3-вектор) импульса должен быть пропорционален 3-мерному вектору скорости, а размерный коэффициент пропорциональности не должен обращаться в ноль для безмассового фотона.

В теории относительности сохранение так определенного импульса является следствием однородности 3-пространства, а сохранение энергии – следствием однородности времени (теорема Нётер).

Теорема Пифагора. Формула (1) представлена на рисунке 1 обычным евклидовым прямоугольным треугольником, в котором m и p – катеты, а e – гипотенуза.

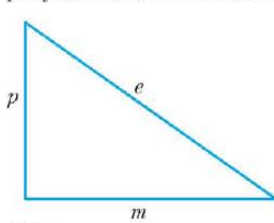


Рис. 1

Переход от $m \neq 0$ к $m = 0$. Формула (1) очевидным образом справедлива и при $m = 0$. А формула (2) справедлива и при $v = 1$. Отсюда следует, что существует плавный переход к безмассовым частицам от массивных, когда энергия последних намного превосходит их массу.

Физика от $p = 0$ до $p = e$. Рассмотрим формулы (1) и (2) сначала при импульсе, равном нулю, затем в пределе очень малых импульсов, когда $p \ll m$, потом в пределе очень больших импульсов, когда $p \sim e \gg m$, и, наконец, в случае безмассовых фотонов. Будем называть случай малых импульсов и скоростей ньютоновым, а случай очень больших импульсов и скоростей, близких к скорости света, – ультрарелятивистским. Но начнем с покоящегося тела.

Энергия покоя

Тело в покое. Если тело покоится, то его скорость и импульс равны нулю, а его энергия e по определению равна энергии покоя e_0 . (Индекс 0 напоминает, что здесь мы имеем дело не вообще с энергией данного тела, а именно с его энергией тогда, когда оно покоится!) В этом случае из уравнения (1) следует, что

$$e_0 = m. \quad (3)$$

Горизонтальный «двуугольник». Таким образом, для покоящегося тела треугольник из рисунка 1 «схлопывается» в горизонтальный «двуугольник» (рис. 2).

Великое открытие Эйнштейна. В единицах, в которых $c \neq 1$, уравнение (3) имеет вид

$$E_0 = mc^2. \quad (4)$$

Осознание, что покоящееся тело обладает колоссальной энергией, было великим открытием Эйнштейна.

«Знаменитая формула». Очень часто (особенно в научно-популярной литературе) уравнение (4) записывают в виде «знаменитого уравнения Эйнштейна», опуская индекс 0:

$$E = mc^2. \quad (5)$$

Такое, на первый взгляд невинное, упрощение приводит к недопустимой путанице в понимании основ физики. В частности, к абсолютно ложному представлению о том, что, согласно теории относительности, масса тела эквивалентна его полной энергии и потому зависит от его скорости.

Вопрос не вкуса, а понимания. Часто можно услышать, что введение понятия массы, зависящей от скорости, это «вопрос вкуса». Разумеется, E/c^2 можно обозначить буквой m и даже назвать массой, хотя это не более разумно, чем обозначить E/c буквой p и назвать импульсом. Но это «переодевание» приводит к введению излишних понятий – релятивистской массы и массы покоя m_0 – и затрудняет понимание теории относительности. Вспоминается известная русская поговорка: «Назови хоть горшком, только в печь не ставь». Но люди, называющие E/c^2 массой, ставят этот горшок в печь преподавания физики.

Продольная и поперечная массы. В начале XX века наряду с релятивистской массой широко обсуждались поперечная и продольная массы: m_t и m_l . Последняя росла как $(e^3/m^3)m$ и «объясняла» с помощью ньютоновой формулы $F = ma$, почему массивное тело нельзя разогнать до скорости света. Потом о ней забыли, и такие популяризаторы теории относительности, как Хокинг, стали внушать своим читателям, что даже гораздо более медленный рост массы со скоростью $((e/m)m)$ якобы способен объяснить, почему скорость массивного тела не может достичь c .

Ложная интуиция. А.Н.Скринский рассказал мне о том, что представление о релятивистской массе мешало его собеседнику – известному физiku – понять, как релятивистский электрон при столкновении может

передать всю свою энергию покоящемуся электрону. Ну как может тяжелая бита отдать всю свою энергию пинг-понговому шарiku? А ведь в физике, как и в обыденной жизни, мы очень часто опираемся на интуицию.

Механика Ньютона

Импульс в механике Ньютона. Ньютонова механика с высокой точностью описывает движение макроскопических тел в земных условиях, поскольку их скорости гораздо меньше скорости света. Так, скорость пули имеет порядок 1 км/с, что соответствует $v = 1/300000$, а $v^2 = 10^{-11}$. В этих условиях уравнение (2) сводится к такому:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (6)$$

Уравнение (1) в ньютоновом пределе в схематическом виде изображено на рисунке 3. Отрезок, изображающий p , на этом рисунке непропорционально велик. При наблюдении масштаба он должен был бы измеряться микронами.

Кинетическая энергия e_k . При малых скоростях разумно переписать формулу (1) в виде

$$e^2 - m^2 = p^2 \quad (7)$$

и представить ее так:

$$(e - m)(e + m) = p^2. \quad (8)$$

Это позволяет получить нерелятивистское выражение для кинетической энергии, не прибегая к обычному разложению в ряд квадратного корня. Учтем, что полная энергия e равна сумме энергии покоя e_0 и кинетической энергии e_k , и, следовательно,

$$e = m + e_k.$$

Энергия в механике Ньютона. В ньютоновом пределе $e_k \ll m$ (для летящей пули, например, $e_k/m = 10^{-11}$). Поэтому e с высокой точностью можно заменить на m в выражении (2) для импульса и в множителе $(e + m)$ в уравнении (8). Из последнего сразу же следует выражение для кинетической энергии e_k в механике Ньютона:

$$e_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}. \quad (9)$$

Потенциальная энергия. Наряду с кинетической энергией, зависящей от скорости, в нерелятивистской механике тела, находящегося во внешнем силовом поле, важную роль играет потенциальная энергия, зависящая только от положения (координаты) тела. В стационарных процессах сумма кинетической и потенциальной энергий тела сохраняется. Потенциальная энергия определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной, поскольку сила, действующая на тело, равна градиенту потенциальной энергии. Потенциальная энергия является сугубо нерелятивистским понятием.

Ньютон и современная физика. Гений Ньютона

ознаменовал рождение современной науки. Ее достижения со времен Ньютона фантастичны. Современные взгляды на строение материи радикально отличаются от взглядов Ньютона. Тем не менее, даже в XXI веке многие учебники по физике продолжают использовать уравнения Ньютона при энергиях, на много порядков превосходящих пределы применимости механики Ньютона $e_k \ll e_0$.

Если некоторые профессора предпочитают настаивать на продолжении этой традиции с ее массой, зависящей от скорости, они должны по крайней мере познакомить своих студентов и с фундаментальными понятиями инвариантной массы и энергии покоя, и с истинным уравнением Эйнштейна $E_0 = mc^2$.

Ультрарелятивизм

Физика высоких энергий. Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда $e/m \gg 1$. Именно такое соотношение между энергией и массой осуществляется в физике высоких энергий. Например, для электронов в коллайдере LEP (Large Electron-Positron Collider, коллайдер – ускоритель) в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) $e/m = 10^5$, поскольку $m = 0,5$ МэВ, а $e = 50$ ГэВ. И для протонов в большом адронном коллайдере LHC (Large Hadron Collider), который расположен в том же тоннеле, где раньше работал LEP, $e/m \sim 10^4$ (здесь $m \sim 938$ МэВ, а $e \sim 7$ ТэВ.)

Вертикальный треугольник. Треугольник для протона в LHC весьма схематически изображен на рисунке 4. Его основание на четыре порядка меньше гипотенузы.

Нейтрино. Еще более ультрарелятивистскими частицами являются нейтрино: их массы составляют доли электронвольта, а энергии – мегаэлектронвольты у нейтрино, летящих из Солнца и ядерных реакторов, и гигаэлектронвольты у нейтрино от распадов частиц, рождающихся в космических лучах и на ускорителях. При таких высоких энергиях нейтрино основание треугольника, схематически изображенного на рисунке 4, на много порядков меньше и его вертикального катета, и его гипотенузы.

Осцилляции нейтрино и $m^2/(2e)$. Из уравнения $(e - p)(e + p) = m^2$ сразу же следует, что

$$e - p = \frac{m^2}{2e}.$$

Различие масс трех нейтрино ν_1, ν_2, ν_3 , обладающих определенными массами в вакууме, приводит к осцилляциям между нейтрино, не обладающими определенными массами, но представляющими три разных вида – электронное, мюонное, тауонное: ν_e, ν_μ, ν_τ . Данные по осцилляциям нейтрино дают

$$\Delta m_{21}^2 = (0,8 \pm 0,04) \cdot 10^{-4} \text{ эВ}^2,$$

$$\Delta m_{32}^2 = (25 \pm 6) \cdot 10^{-4} \text{ эВ}^2.$$

Фотон. Как известно, масса фотона равна нулю.

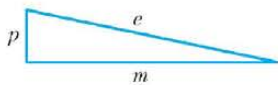


Рис. 3

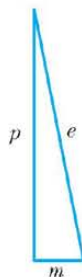


Рис. 4

Поэтому для фотона $e = p$ и треугольник из рисунка 4 схлопывается в вертикальный «двуугольник», изображенный на рисунке 5.

Фотон и энергия покоя? Уместно заключить рассмотрение одночастичной механики вопросом: совместимо ли с понятием энергии покоя существование безмассового фотона? Легко видеть, что совместимо. Ведь чем меньше масса частицы, тем ближе к c скорость, с которой должен двигаться наблюдатель, чтобы перейти в систему ее покоя. Для очень легких одиноких частиц эта система отсчета становится не относящейся к сути обсуждаемого вопроса вместе с самим понятием e_0 . Поэтому вполне согласуется с предельным переходом значение $e_0 = 0$ при $m = 0$.

Две свободные частицы

Столкновение двух частиц. В случае столкновения двух частиц сравнение системы покоя одной из них с системой покоя их общего центра инерции демонстрирует преимущество последней. Это обстоятельство используется в коллайдерах.

Зачем нужны коллайдеры? Если импульсы сталкивающихся частиц равны и противоположны, как, например, в коллайдерах LHC или LEP, то практически вся энергия сталкивающихся частиц идет на рождение новых частиц.

Масса системы частиц. Как известно, для изолированной системы частиц полная энергия E и полный импульс $\vec{P}$ сохраняются. Так как энергия и импульс аддитивны, то для двух свободных частиц

$$E = e_1 + e_2, \quad (10)$$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (11)$$

Определим величину M следующей формулой:

$$M^2 = E^2 - \vec{P}^2. \quad (12)$$

Массы аддитивны при $v = 0$. Уравнение (12) инвариантно относительно лоренцевых преобразований, как и уравнение (1). Поэтому величину M естественно назвать массой системы двух частиц. В статическом пределе, когда p_1 и p_2 равны нулю, из уравнения (12) следует, что

$$M = e_{01} + e_{02} = m_1 + m_2. \quad (13)$$

Таким образом, в ньютоновом пределе M действительно равно сумме масс двух частиц, т.е. массы аддитивны.

Массы не аддитивны при $v \neq 0$. Однако при больших скоростях связь между M и массами m_1 и m_2 отсутствует. Например, в коллайдерах ЦЕРН величина M на четыре порядка превышает массу электронов или протонов. Величина M кардинальным образом зависит от относительного направления импульсов двух частиц, поскольку сумма двух векторов зависит от угла между ними. Так, для двух фотонов, летящих в одном направлении,

$$P = p_1 + p_2. \quad (14)$$

Коллинеарные фотоны. Для фотонов $p_1 = e_1$ и $p_2 = e_2$. И потому для пары фотонов, летящих в одном направлении,

$$P = p_1 + p_2 = e_1 + e_2 = E. \quad (15)$$

Тогда из уравнения (12) следует, что в этом случае масса пары фотонов $M = 0$. А это значит, что масса «иглового» пучка света равна нулю.

А если фотоны разлетаются? Однако если фотоны летят в противоположные стороны с одинаковыми энергиями, то $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, а $\vec{P} = 0$. В этом случае энергия покоя системы двух фотонов просто равна сумме энергий этих фотонов, а масса этой системы равна

$$M = E_0 = 2e. \quad (16)$$

Шок. Разумеется, утверждение о том, что пара двух безмассовых частиц имеет огромную массу, может вызвать шок у неподготовленного читателя. Какой смысл имеет понятие энергии покоя для двух фотонов, каждому из которых «покой лишь только снится»? Что покоится в этом случае?

Ответ очевиден. Действительно, очевиден: покоится центр инерции двух фотонов. Но если для одной покоящейся частицы энергия покоя это энергия, скрытая в ее массе, то для двух фотонов это просто сумма их энергий (кинетических!) в системе отсчета, в которой их импульсы равны по величине и противоположны по направлению. Скрытой энергии в этом случае нет!

Что значит слово «сохраняется»? Когда мы говорим, что энергия сохраняется, мы имеем в виду, что сумма энергий частиц, вступающих в реакцию, равна сумме энергий частиц, возникших в результате реакции. Аналогичный смысл имеет утверждение о сохранении импульса. Сохраняются величины $E = \sum e_i$ и $\vec{P} = \sum \vec{p}_i$. А следовательно, сохраняется и масса M системы (совокупности) частиц, определяемая формулой $M^2 = E^2 - \vec{P}^2$. Но, в отличие от энергии и импульса, масса не аддитивна: $M \neq \sum m_i$. Некоторые авторы говорят о неаддитивности массы как о ее несохранении. Но для отдельных частиц, участвующих в реакции, вообще говоря, не сохраняются не только их массы, но и энергии, и импульсы, да и они сами. Поэтому говорить о несохранении массы неправильно.

Мысленный опыт Эйнштейна. Конечно, понятие массы системы двух разлетающихся фотонов весьма непривычно. Но именно с его помощью Эйнштейн в 1905 году открыл энергию покоя массивного тела. Он заметил, что излучив «два количества света» в противоположные стороны, покоящееся тело остается в покое, но его масса в этом мысленном эксперименте уменьшается.

Аннигиляция позитрония. Как известно, nihil латини значит ничто. При аннигиляции позитрония (связанной водородоподобной системы, состоящей из электрона и позитрона)

$$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$$

величина M сохраняется, поскольку сохраняются E и

$\vec{P}$. В начальном состоянии M равно сумме масс электрона и позитрона, а в конечном – сумме энергий двух фотонов в системе покоя позитрония. Таким образом, энергия покоя электрона и позитрона полностью переходит в кинетическую энергию фотонов, но массы начального и конечного состояний в этом процессе одинаковы, как того требует сохранение полной энергии и полного импульса.

Распады мезонов. Аналогичным образом при распаде K -мезона на два π -мезона или на три π -мезона энергия покоя каона переходит в сумму полных энергий пионов, каждая из которых имеет вид $e = e_k + m$. Но масса системы двух или трех пионов, возникших при распаде каона, равна массе каона.

Что называть материей? Во всех распадах энергия покоя переходит в энергию движения, а полная энергия изолированной системы сохраняется. Сохраняется и масса системы, но не массы отдельных ее частиц. Массивные частицы переходят в менее массивные, а то и вовсе в безмассовые. Разумно называть частицами материи не только такие массивные частицы, как протоны и электроны, но и очень легкие нейтрино, и безмассовые фотоны, и даже гравитоны. В современной квантовой теории поля все они рассматриваются на равных основаниях.

Чеширский кот? В реакциях распада и аннигиляции материя не исчезает подобно чеширскому коту, от которого остается только его улыбка – энергия. Носителями энергии здесь являются частицы материи. Во всех изученных до сих пор процессах энергии без материи («чистой энергии») не бывает.

Это, правда, не относится к так называемой темной энергии, которая была открыта в последние годы XX века. Темная энергия проявляется в ускоряющемся расширении Вселенной. (Об этом ускоряющемся расширении свидетельствуют скорости далеких сверхновых звезд.) Похоже, что носителем темной энергии является вакуум и что она составляет три четверти всей энергии Вселенной. Оставшаяся четверть заключена в массе обычной материи (5%) и темной материи (20%). В лабораторных опытах с обычным веществом темная энергия не проявляется.

Распад в среде. Если распад (или реакция) происходит в среде, то в результате распада система перестает быть изолированной из-за взаимодействия продуктов распада с частицами среды. При этом среда будет нагреваться, а ее энтропия – расти.

Несвободные частицы

Тела и частицы. Все физические тела состоят из элементарных частиц. Такие элементарные частицы, как протон и нейтрон, сами состоят из еще более элементарных частиц – кварков и глюонов. А электрон и нейтрино на современном уровне познания выглядят как истинно элементарные.

Масса газа. Во всех рассмотренных выше случаях, когда масса системы частиц была больше суммы их масс, эти частицы свободно разлетались. Обратимся теперь к ситуации, когда они разлетаться не могут. Такая ситуация осуществляется, например, в часто

обсуждаемом мысленном опыте с газом молекул или фотонов в замкнутом покоящемся сосуде. Полный импульс такого газа равен нулю, поскольку газ изотропен: $\vec{P} = \sum \vec{p}_i = 0$. Поэтому полная масса M такого газа равна его полной энергии E и равна сумме энергий отдельных частиц:

$$M = E = \sum e_i.$$

Масса нагретого газа. При нагревании газа полный импульс не меняется, а полная энергия увеличивается, так как растет кинетическая энергия отдельных частиц. В результате масса газа в целом растет, в то время как масса каждой отдельной частицы остается неизменной. (В литературе можно встретить неверное утверждение, что при увеличении кинетической энергии частиц (фотонов) растет их масса.)

Масса горячего утюга. Таким же образом, как масса газа, должна расти при нагревании и масса утюга, хотя массы колеблющихся атомов остаются неизменными. Однако совокупность формул (10) – (12) для системы свободных частиц здесь неприменима, поскольку частицы, в этом случае атомы, не свободны, а связаны в кристаллической решетке металла. Разумеется, увеличение массы утюга слишком мало, чтобы его можно было реально измерить.

Масса атомного ядра. Аналогичным образом связаны нуклоны в атомных ядрах. Но здесь эффект настолько велик, что от него зависит судьба жизни на Земле. Начнем с ядра тяжелого водорода. Масса дейтрона меньше суммы масс протона и нейтрона, составляющих его. Энергия связи нуклонов в дейтроне составляет 2,2 МэВ. Чтобы развалить дейтрон на нуклоны, надо затратить энергию, равную энергии связи или превышающую ее. Атомные ядра остальных элементов таблицы Менделеева тоже существуют благодаря энергии связи нуклонов в этих ядрах.

О формулах (10) – (12). Поясним, почему для таких несвободных частиц, как электроны в атомах или нуклоны в атомных ядрах, неприменимы формулы (10) – (12). Прежде всего потому, что эти частицы не имеют определенных импульсов, в силу соотношения неопределенностей. Чем меньше радиус сферы, в которой заключены частицы, тем больше неопределенность их импульсов.

Соотношение неопределенностей. И для атомов, и для ядер очень важны закономерности квантовой механики, и в частности – соотношение неопределенностей. Как известно, произведение неопределенностей импульса Δp и координаты Δx должно быть больше, чем квант действия $\hbar$. Поэтому частицы в атомах не имеют определенных индивидуальных импульсов, а имеют только определенный суммарный импульс.

Энергия поля. Другой причиной, по которой в атомах неприменимы формулы (10) – (12), является то, что пространство между отдельными частицами в них по существу не является пустым: оно заполнено материальной средой – физическими полями. Пространство внутри атома заполнено электромагнитным полем, а внутри ядра – гораздо более плотным и сильным полем, которое часто называют мезонным.

Энергия связи. Наличие энергии поля приводит к тому, что для двух тесно взаимодействующих частиц, скажем, в атомном ядре тяжелого водорода – дейтрона – в формуле (10) $E = e_1 + e_2$ необходимо учитывать энергию поля. В результате получается $M < m_1 + m_2$. Величину $m_1 + m_2 - M$ называют энергией связи.

Слияние и деление ядер. Энергия связи в начале таблицы Менделеева максимальна у ядра гелия, а в середине – у ядра железа. Именно поэтому при образовании гелия из водорода в реакциях слияния на Солнце и в водородных бомбах выделяется большое количество кинетической энергии. А в ядерных реакторах и атомных бомбах эта энергия образуется в реакциях деления при развале тяжелых ядер урана и плутония на более легкие ядра в середине таблицы Менделеева.

Химические реакции. Существенно меньшая энергия, измеряемая единицами электронвольт, выделяется в химических реакциях за счет различия энергий связи электронов в разнообразных химических соединениях. Однако источником кинетической энергии и в химических, и в ядерных реакциях является разность масс начальных и конечных частиц, участвующих в этих реакциях.

Закон Кулона. Энергия связи электронов в атомах много меньше массы электрона. Поэтому понятие энергии связи в атомах можно пояснить с помощью нерелятивистского понятия потенциальной энергии. Энергия связи равна сумме положительной кинетической энергии связанной частицы и ее отрицательной потенциальной энергии. Потенциальная энергия электрона, скажем, в атоме водорода определяется законом Кулона:

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \quad (17)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$, а e – заряд электрона.

Еще о потенциальной энергии. Понятие потенциальной энергии определено только в ньютоновом пределе. Если одна из двух взаимодействующих частиц или обе они существенно релятивистские, то понятие потенциальной энергии неприменимо.

Электромагнитное поле. В теории относительности кулоново поле является 0-компонентой 4-потенциала электромагнитного поля A_i ($i = 0, 1, 2, 3$). Источником поля является электромагнитный ток, пропорциональный 4-вектору ep_i , где p_i – 4-импульс частицы с зарядом e . Взаимодействие двух движущихся зарядов осуществляется путем распространения поля от одного заряда к другому. Оно описывается так называемой функцией Грина, или пропагатором электромагнитного поля.

Гравитация

Гравитационные орбиты. На различных эмблемах часто изображают орбиты электронов в атомах, подобные орбитам планет. Из только что сказанного должно быть ясно, что таких орбит в атомах нет – это запрещено законами квантовой механики. Для макроскопических же тел и уж, конечно, для таких тяжелых, как планеты, квантовые эффекты ничтожны, поэтому их

орбиты прекрасно описываются классической механикой.

Константа Ньютона. Потенциальная энергия Земли в гравитационном поле Солнца определяется законом Ньютона:

$$U = -\frac{GMm}{r}, \quad (18)$$

где M – масса Солнца, m – масса Земли, r – расстояние между их центрами, а G – константа Ньютона (гравитационная постоянная):

$$G = 6,71 \cdot 10^{-39} \hbar c \left(\text{ГэВ}/c^2 \right)^{-2}. \quad (19)$$

(Здесь использованы единицы, в которых $c \neq 1$.)

Тензор энергии-импульса частицы. В ньютоновой физике источником гравитации является масса. В теории относительности источником гравитации является тензор энергии-импульса $p_i p_k$, который, будучи деленным на энергию e , служит как бы «гравитационным зарядом». (Напомню, что p_i – 4-вектор энергии-импульса, $i = 0, 1, 2, 3$.)

Распространение поля от источника до «стока» описывается функцией Грина, или пропагатором гравитационного поля. Пропагатор гравитационного поля пропорционален $g^{il} g^{km} + g^{im} g^{kl} - g^{ik} g^{lm}$, где g^{ik} – метрический тензор.

Масса Планка. В физике частиц используется понятие массы Планка:

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}. \quad (20)$$

В единицах, в которых $c, \hbar = 1$, масса Планка равна $m_P = 1/\sqrt{G} = 1,22 \cdot 10^{19}$ ГэВ.

Гравитационное взаимодействие двух ультрарелятивистских частиц растет как квадрат их энергии E в системе их центра инерции. Оно становится предельно сильным при $E \sim m_P$ и при расстоянии между частицами $r \sim 1/m_P$. Но вернемся от этих фантастически больших энергий и малых расстояний к яблокам и фотонам в гравитационных полях Земли и Солнца.

Яблоко и фотон. Рассмотрим частицу, находящуюся в статическом гравитационном поле, для которого в силу статичности $l, m = 0$. В этом случае пропагатор гравитационного поля пропорционален $2g^{i0} g^{k0} - g^{ik} g^{00}$, а тензор энергии-импульса частицы, умноженный на пропагатор, сводится к простому выражению $p_i p_k \Rightarrow (2e^2 - m^2)$. Следовательно, для нерелятивистского яблока с массой m «гравитационный заряд» равен m , а для фотона с энергией e он равен $2e$. Обратите внимание на множитель 2. Кинетическая энергия «притягивается» сильнее, чем скрытая энергия, заключенная в массе.

Фотон в поле Солнца. Взаимодействие фотона с гравитационным полем должно вызывать отклонение луча света далекой звезды вблизи солнечного диска. В 1915 году Эйнштейн вычислил этот угол отклонения и показал, что он должен составлять $4GM/(c^2 R) \approx 1,75''$. (Здесь M и R – масса и радиус Солнца.) Это предсказание было подтверждено во время солнечного затме-

ния в 1919 году, что вызвало огромный интерес к теории относительности.

Атом в поле Земли. При подъеме тела над Землей его потенциальная энергия растет пропорционально его массе. Поэтому разность энергий двух уровней атомного ядра должна быть тем больше, чем выше этаж дома, на котором ядро находится.

Энергия фотона сохраняется. С другой стороны, частота ω фотона, летящего в статическом гравитационном поле, а следовательно, и его полная энергия $e = \hbar\omega$ не должны меняться.

В результате фотон, испущенный на нижнем этаже дома при переходе между двумя уровнями ядра, не сможет вызвать обратного перехода в том же ядре на верхнем этаже. Это теоретическое предсказание было подтверждено в 1960-х годах после открытия эффекта Мёссбауэра, позволяющего измерять ничтожно малые смещения ядерных уровней.

Но длина волны меняется. Фотон, летящий в статическом гравитационном поле, подобно летящему камню, сохраняет свою полную энергию e и частоту ω . Но его импульс, а следовательно, и его длина волны меняются с изменением расстояния до гравитирующего тела.

Показатель преломления. При удалении фотона от источника гравитационного поля его скорость возрастает, стремясь к c , а при приближении к источнику — падает. Гравитационное поле, как прозрачная среда, имеет коэффициент преломления. Это наглядно объясняет отклонение света в поле Солнца и в гравитационных линзах галактик. Уменьшение скорости фотона вблизи Солнца было обнаружено в опытах по измерению запаздывания радарного эха от планет.

Часы или секундомеры. Пусть на первом этаже рядом находятся синхронно идущие часы A и B . Если поднять на второй этаж сначала часы A , а, скажем, завтра — B , то часы A будут впереди B . Но в качестве синхронизированных секундомеров они будут одинаково хороши.

Когда каждую точку в пространстве снабжают своими собственными часами, то по существу говорят не о часах, а о секундомерах. Если теперь с помощью локальных секундомеров измерять частоту света, то она была бы тем меньше, чем выше этаж.

Эпистемика и лингвистика

Эпистемика. Эпистемика или, как принято было говорить раньше, эпистемология — это теория знания и познания. Очевидно, что обсуждаемые в этой статье вопросы относятся не только к физике, но и к эпистемике.

Физика и семантика. Но какое отношение к физике имеет наука о языке — лингвистика и ее раздел семантика — наука о словах и символах?

Тут уместно вспомнить высказывание Фока, упомянутое в начале доклада.

«Склеенные понятия». В «Началах» Ньютона «склеены» понятия массы и материи (вещества): «масса пропорциональна плотности и объему». В статьях Эйнштейна масса «склеена» с инерцией и гравитацией

(инертная и гравитационная массы). А энергия «склеена» с материей.

Архетип. Согласно словарям, архетип — это исторически исходная форма (протоформа), исходное понятие, слово или исходный тип (прототип). Понятием архетипа очень интересовался Паули, опубликовавший в 1952 году статью о влиянии архетипических представлений на создание естественно-научных теорий Кеплером. Возможно, понятие массы является именно таким архетипическим понятием, которое «склеило» в себе понятия вещества, инерции и тяжести.

Атом и архетип. «Atom and Archetype» — под этим заглавием была переведена с немецкого на английский язык книга, содержащая переписку Вольфганга Паули и ведущего немецкого психоаналитика Карла Юнга, длившаяся с 1932 по 1958 год. Они обсуждали, в частности, материальную природу времени и возможность общаться с людьми, жившими века и тысячелетия тому назад.

Широко известно, что Паули серьезно относился к эффекту, носящему его имя: когда он входил в экспериментальную лабораторию, приборы в ней ломались.

Поэты о терминах. Д.Самойлов о словах: «Их протирают, как стекло. И в этом наше ремесло».

В.Маяковский: «Улица корчится безъязыкая. Ей нечем кричать и разговаривать».

Нехватка точных терминов и неумение пользоваться ими восполняется многими авторами обильным использованием слов-паразитов типа «масса покоя», придающих текстам гладкость и «энергетику», подобно тому как в обычной современной речи это делают слова типа «блин».

Как преподавать физику. Надо «протирать» и «расклеивать» термины. «Пуповина», соединявшая современную физическую теорию с предшествующей «материнской» теорией, должна бережно обрезать при преподавании. (В случае теории относительности «матерью» был «кентавр», состоявший из теории поля Максвелла и механики Ньютона, а «пуповина» — релятивистская масса.)

Вспомним название знаменитой книги Ф.Клейна «Элементарная математика с высшей точки зрения». На ландшафт современной физики надо смотреть не из оврага истории, а с вершины принципов симметрии.

Мне представляется, что недопустимо выдавать за факт, скрывая от студента, что она является интерпретационным «фактоидом». (Согласно словарям, фактоид похож на факт, но считается достоверным только потому, что встречается в печатных текстах.)

Закключение

О заглавии. Мой хороший друг и большой эксперт по теории относительности, прочитав слайды этого доклада, посоветовал мне укоротить его название, выбросив вторую половину. Если бы мне пришлось сокращать название, я бы скорее выбросил первую половину: ведь рассмотрения прямоугольных треугольников без извлечения квадратного корня я в литературе по теории относительности не встречал.

Комплексные числа

С. ДОРИЧЕНКО

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА ПОЯВИЛИСЬ ВПЕРВЫЕ в XVI веке при решении кубических уравнений. Чтобы найти действительные решения кубического уравнения, иногда приходилось в промежуточных вычислениях оперировать «несуществующими» квадратными корнями из отрицательных чисел. Но в итоге получался верный ответ. Удивительно и непонятно.

Постепенно обнаруживалось, что комплексные числа могут быть очень полезны в самых разных областях математики: алгебре, геометрии, теории чисел, анализе.

Тем не менее, комплексные числа очень долго вызывали недоверие математиков, считались таинственными и сомнительными для использования величинами. Тут есть некоторая аналогия с отрицательными числами – когда-то давно люди их не знали. Сейчас же мы легко пользуемся отрицательными числами, да еще применяя «странные» правила вроде «минус на минус дает плюс». Почему? Наивное объяснение состоит в том, что отрицательные числа с такими правилами помогают правильно решать уравнения. Если верно составлено уравнение (например, в задаче на движение), можно в этом уравнении раскрывать (по правилам) скобки, можно переносить числа (или переменные) из одной части в другую, меняя при этом знак на противоположный, – такие преобразования не приведут к ошибке. Это удобно: действуя таким образом, мы можем упрощать уравнение, не задумываясь в каждый момент, какой смысл имеют выражения справа и слева от знака равенства. Например, в Европе отрицательные числа так и входили в обращение в эпоху Возрождения – постепенно, по мере того как люди стали оперировать с буквенными выражениями. Точно так же и к комплексным числам математики привыкали очень медленно.

Благодаря комплексным числам были решены сложные задачи, в формулировках которых участвовали только действительные числа, появились новые интересные задачи и теории. Поэтому сейчас комплексные числа прочно вошли в математику и физику, где имеют множество применений. Название «числа» оправдано потому, что у них много общего с действительными числами: их можно складывать, вычитать, умножать, делить одно на другое (как обычно, нельзя делить только на ноль). Но есть и отличия: например, из любого комплексного числа можно извлечь квадратный корень.

Мы расскажем о том, что такое комплексные числа и как они помогают решать самые разные задачи. Не пытайтесь сразу все усвоить – прочитайте определения, решите несколько задач, и постепенно вы все поймете.

Определения и основные свойства

Комплексное число – это выражение вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, специальный символ, квадрат которого равен минус единице: $i^2 = -1$.

У комплексного числа $z = a + bi$ число a называют его *действительной* (или *вещественной*) *частью* (пишется $a = \operatorname{Re} z$), а число b – его *мнимой частью* (пишется $b = \operatorname{Im} z$). Два комплексных числа считаются равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части. Если мнимая часть равна нулю, т.е. число имеет вид $a + 0i$, пишут просто a – мы получаем обычное действительное число.

Комплексные числа складывают, вычитают и умножают, раскрывая скобки и приводя подобные (заменяя при этом i^2 на -1). Найдем, например, сумму комплексных чисел $5 - 4i$ и $2 + 3i$:

$$(5 - 4i) + (2 + 3i) = (5 + 2) + (-4 + 3)i = 7 - i.$$

Найдем произведение этих чисел:

$$(5 - 4i) \cdot (2 + 3i) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3i - 4 \cdot 2i - 4 \cdot 3 \cdot i^2 = 22 + 7i.$$

Упражнение 1. Найдите действительную и мнимую части суммы, разности и произведения комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$.

Число $a - bi$ называется *комплексно-сопряженным* числу $z = a + bi$ и обозначается $\bar{z}$. Произведение $z\bar{z}$ равно $a^2 + b^2$, т.е. всегда является действительным числом. Это замечание поможет нам научиться делить комплексные числа друг на друга. Вычислим, например, $\frac{5 - 4i}{2 + 3i}$. Сделаем небольшой алгебраический трюк: домножим числитель и знаменатель на число $2 - 3i$ (сопряженное к знаменателю). В числителе получим $-2 - 23i$, а в знаменателе получим $4 - 9i^2$, т.е. 13 – действительное число. Значит, наша дробь равна $-\frac{2}{13} - \frac{23}{13}i$.

Упражнение 2. Найдите действительную и мнимую части отношения комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ (где $c + di \neq 0$).

У комплексных чисел есть наглядная геометрическая интерпретация.

Возьмем плоскость с декартовой системой координат. Пусть v_1 – вектор с координатами $(1; 0)$, а v_2 – вектор с координатами $(0; 1)$. Как вы знаете, любой вектор на плоскости выражается единственным способом через векторы v_1 и v_2 (в виде суммы этих векторов, взятых с числовыми множителями). А именно, вектор с координатами $(a; b)$ равен сумме векторов с координатами $(a; 0)$ и $(0; b)$, т.е. равен сумме

$av_1 + bv_2$. Обозначим вектор v_2 символом i , а вектор v_1 — единицей (которую писать не будем), тогда запись $av_1 + bv_2$ как раз превратится в $a + bi$. Фактически мы просто сопоставляем каждому комплексному числу $z = a + bi$ вектор с координатами $(a; b)$ (рис.1). Длина этого вектора (т.е. число $\sqrt{a^2 + b^2}$) называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$. Пусть $z \neq 0$.

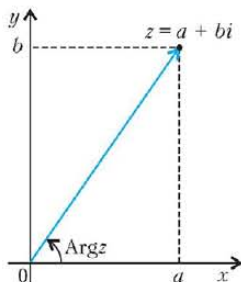


Рис. 1

Угол, отсчитанный против часовой стрелки от вектора с координатами $(1; 0)$ до вектора с координатами $(a; b)$, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\text{Arg } z$. (Углы измеряем в радианах.) Аргумент комплексного числа определен с точностью до прибавления числа вида $2\pi n$, где n — целое. Например, для числа i аргументами будут числа $\pi/2$, $\pi/2 + 2\pi$, $\pi/2 - 2\pi$ и т.д. Мы говорим, что аргументы равны, если они отличаются на число вида $2\pi n$, где n — целое.

Упражнения

3. Найдите модуль и аргумент чисел -4 , i , $1+i$, $1-i\sqrt{3}$, $\sin \alpha + i \cos \alpha$.

4. Выразите модуль и аргумент числа $\bar{z}$ через модуль и аргумент числа z .

Если $z = a + bi$, длина вектора z равна r , а угол наклона к оси абсцисс равен φ , то координаты вектора есть $a = r \cos \varphi$ и $b = r \sin \varphi$ (рис.2). Поэтому для любого ненулевого комплексного числа z имеет место равенство $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \text{Arg } z$. Это так называемая *тригонометрическая форма записи комплексного числа*. Например, $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

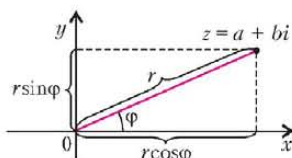


Рис. 2

Итак, можно представлять себе комплексное число как вектор, координаты которого — действительная и мнимая части этого числа. А можно сопоставить комплексному числу конец этого вектора и считать комплексное число точкой на плоскости. Поэтому мы будем называть комплексным числом (и обозначать одной и той же буквой) и выражение $a + bi$, и вектор с координатами $(a; b)$, и точку плоскости с координатами $(a; b)$.

При этом замечательно, что сложение комплексных чисел и сложение векторов (по правилу параллелограмма) — это одно и то же (что сразу следует из определения).

При этом замечательно, что сложение комплексных чисел и сложение векторов (по правилу параллелограмма) — это одно и то же (что сразу следует из определения).

При этом замечательно, что сложение комплексных чисел и сложение векторов (по правилу параллелограмма) — это одно и то же (что сразу следует из определения).

Упражнение 5. Докажите, что $|z + w| \leq |z| + |w|$ при любых комплексных числах z и w .

А каков геометрический смысл умножения? Чтобы ответить на этот вопрос, отметим одно очень важное

свойство комплексных чисел, которое не раз пригодится в дальнейшем, — они тесно связаны с преобразованиями плоскости. Например, чтобы получить число, комплексно-сопряженное числу z , надо просто отразить вектор, соответствующий z , относительно оси абсцисс (рис.3). Таким образом, перевод числа в комплексно-сопряженное отвечает симметрии плоскости относительно оси абсцисс.

Что будет, если к каждой точке плоскости мы прибавим комплексное число z ? Все точки сдвинутся на этот вектор, т.е. мы получим сдвиг плоскости в направлении нашего вектора на его длину.

Умножение на ненулевое действительное число — это просто гомотетия. А какое получится преобразование плоскости, если мы каждую ее точку умножим на ненулевое комплексное число z ?

Разберем сначала случай, когда модуль числа z равен 1, т.е. z можно записать в виде $\cos \varphi + i \sin \varphi$. Посмотрим, куда перейдут (при умножении на z) точки на оси абсцисс. Любое число a на оси абсцисс действительное, и оно перейдет в число $a \cos \varphi + i(a \sin \varphi)$, т.е. просто повернется на угол φ относительно начала координат (рис.4). А куда перейдут точки на оси ординат? Любая такая точка имеет вид bi , где число b действительное, и значит, перейдет в число $-b \sin \varphi + i(b \cos \varphi)$, т.е. тоже повернется на угол φ (рис.4). Докажем, что и любой вектор плоскости при умножении на z повернется на угол φ . Действительно, пусть нам дано число $w = a + bi$. Тогда $z \cdot w = z \cdot a + z \cdot (bi)$. Мы уже знаем, что вектор $z \cdot a$ — это вектор a , повернутый на угол φ , и вектор $z \cdot (bi)$ — это вектор bi , повернутый на угол φ , но в таком случае и сумма $z \cdot a + z \cdot (bi)$ — это сумма векторов a и bi , повернутая на угол φ (рис.5). Что и требовалось доказать.

Если же умножить вектор w на ненулевой вектор z не обязательно единичной длины, то w , очевидно, тоже повернется на угол $\text{Arg } z$, и еще его длина умножится на $|z|$ (кстати, в геометрии такое преобразование называется поворотной гомотетией). Значит, мы доказали такую замечательную теорему.

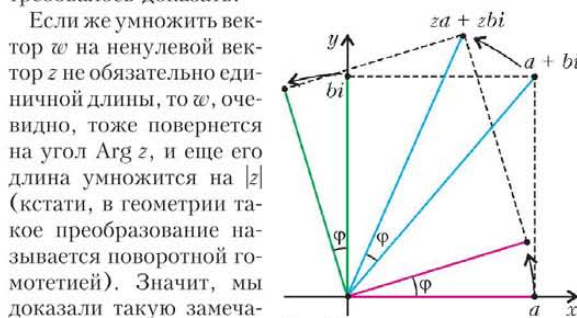


Рис. 5

Теорема. При перемножении ненулевых комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются: $|zw| = |z| \cdot |w|$, $\operatorname{Arg} zw = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$.

Приведем одно следствие из этой теоремы. Возьмем два числа $\cos \alpha + i \sin \alpha$ и $\cos \beta + i \sin \beta$ и перемножим их. По только что доказанной теореме мы должны получить число $\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$. С другой стороны, если мы просто перемножим эти два числа, раскрыв скобки и приводя подобные, мы получим число

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta).$$

Но ведь должно получиться то же самое! Значит, мы доказали тригонометрические формулы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta.$$

Упражнения

6. Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство (формула Муавра) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

7. Вычислите $(1 + i\sqrt{3})^{150}$ и $(1 - i)^{30}$.

8. Выразите $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$ для $n = 2, n = 3, n = 4, \dots$

Заметим, что отношение $\frac{z}{w}$ комплексных чисел z и w — это, по определению, такое число, которое при умножении на w дает z . Тогда, по доказанной теореме, модуль этого числа равен $\frac{|z|}{|w|}$, а аргумент равен $\operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w$ и равен углу между векторами z и w (с точностью до прибавления чисел вида $2\pi n$, где n — целое).

Корни из комплексных чисел

Теперь давайте научимся извлекать корни из комплексных чисел. *Корнем степени n* из комплексного числа z называется любое такое комплексное число w , что $w^n = z$. Корень любой степени из нуля равен нулю, поэтому рассмотрим ненулевое комплексное число z с модулем r и аргументом φ . Найдем все квадратные корни из z , т.е. все такие комплексные числа w , что $w^2 = z$. Ясно, что модуль числа w должен равняться корню (арифметическому) из модуля z (т.е. $\sqrt{r}$). Аргумент же числа w , умноженный на 2, должен

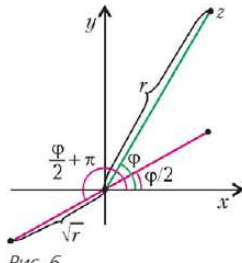


Рис. 6

дать φ (или отличаться от φ на число вида $2\pi n$, где n — целое). Нетрудно убедиться, что таких w ровно два: одно с аргументом $\varphi/2$ и другое с аргументом $\varphi/2 + \pi$. Эти числа противоположны (рис. 6). Например, уравнение $w^2 = -1$ имеет ровно два решения: i и $-i$.

Объяснить, что квадратных корней из ненулевого числа z

не может быть больше двух, можно и алгебраически: если a — один из корней, то для любого другого корня w будет выполнено $z = w^2 = a^2$, откуда $(w - a)(w + a) = 0$, и, значит, либо $w = a$, либо $w = -a$.

Чтобы извлечь квадратный корень из комплексного числа $z = a + bi$, на практике иногда удобнее действовать алгебраически: ищем w такое, что $w^2 = z$, в виде $w = c + di$. Подставляем в уравнение, получаем $(c + di)^2 = a + bi$, раскрываем скобки и решаем систему.

Теперь мы можем решить любое квадратное уравнение (даже с комплексными коэффициентами) — оно решается по обычной школьной формуле, только надо уметь извлекать корень из отрицательного (или любого комплексного) числа.

Упражнение 9. Решите уравнения:

а) $z^2 = i$; б) $z^2 = 5 - 12i$; в) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$.

Аналогично можно извлекать корни больших степеней. На рисунке 7 изображены корни уравнений $z^3 = 1$, $z^4 = 1$, $z^5 = 1$ — они образуют правильные много-

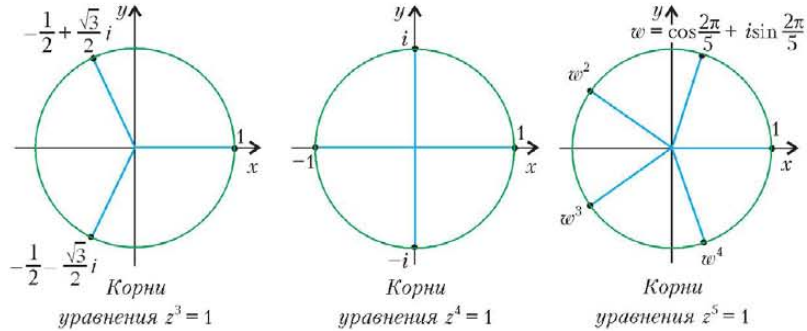


Рис. 7

угольники, вписанные в окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Нетрудно проверить, что у уравнения $z^n = 1$ ровно n корней. Как и в приведенных выше примерах, они расположены в вершинах правильного n -угольника.

Один из корней равен $\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, обозначим его через w . Тогда остальные корни нашего уравнения — это числа $w^2, w^3, \dots, w^n$ (причем $w^n = 1$).

Упражнение 10. Докажите это.

Теперь докажем, что $w + w^2 + \dots + w^n = 0$. Обозначим сумму $w + w^2 + \dots + w^n$ через S . Домножим эту сумму на w . Каждое слагаемое, кроме последнего, при домножении на w перейдет в следующее слагаемое, а последнее слагаемое перейдет в первое (поскольку $w^{n+1} = w$), т.е. мы получим ту же самую сумму! Значит, $Sw = S$, откуда $S(1 - w) = 0$. Но $w \neq 1$, поэтому сумма S равна нулю. Заодно мы доказали такую теорему: сумма векторов, ведущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулю.

Упражнение 11. а) Докажите, что произведение всех корней степени n из единицы равно 1.

6) Пусть s – любое натуральное число. Найдите сумму s -х степеней всех корней уравнения $z^n = 1$.

Комплексные числа в геометрии

Прежде чем читать дальше, выполните такое упражнение.

Упражнение 12. Докажите, что:

а) $|z|^2 = z\bar{z}$ для любого комплексного числа z ;

б) $z_1 \pm z_2 = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ и $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ для любых комплексных

чисел z_1, z_2 , и $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, если $z_2 \neq 0$.

Расстояние между точками плоскости z_1 и z_2 – это длина вектора $z_1 - z_2$, а значит, квадрат расстояния между точками z_1 и z_2 равен $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$. Это простое замечание помогает решить много планиметрических задач. Докажем, например, теорему косинусов.

Теорема. В треугольнике ABC с углом α при вершине A выполнено равенство $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha$.

Расположим треугольник ABC на координатной плоскости так, показано на рисунке 8 (точка A совпадает с началом координат, а точка C лежит на оси абсцисс справа от нуля). Пусть точки B и C отвечают комплексным числам z и w (при этом число w действительное и положительное, откуда $w = \bar{w}$). Длина стороны CB есть модуль числа $w - z$, откуда

$$|CB|^2 = (w - z)(\bar{w} - \bar{z}) = w\bar{w} + z\bar{z} - w\bar{z} - \bar{w}z = |w|^2 + |z|^2 - |w|(\bar{z} + z).$$

Осталось заметить, что векторы z и $\bar{z}$ симметричны относительно оси абсцисс, и, значит, их сумма равна удвоенной проекции вектора z на ось абсцисс, т.е. равна $2|z| \cos \alpha$, и теорема косинусов доказана.

Решим теперь такую задачу.

Задача 1. Пусть $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ – равносторонние треугольники, причем их вершины занумерованы в порядке обхода против часовой стрелки. Докажите, что середины отрезков A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 – вершины равностороннего треугольника (или совпадают).

Пусть z_1, z_2, z_3 – соответственно вершины первого треугольника, w_1, w_2, w_3 – соответственно вершины второго (рис. 9). Пусть $s = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ – число с модулем 1 и аргументом $\frac{\pi}{3}$. Условие того, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний, можно записать так: $z_3 - z_1 = s(z_2 - z_1)$ (сторона A_1A_3 получается поворотом стороны A_1A_2 на

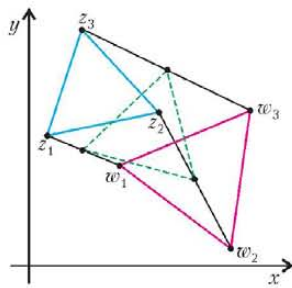


Рис. 9

60° против часовой стрелки). Аналогично записываем, что треугольник $B_1B_2B_3$ – равносторонний: $w_3 - w_1 = s(w_2 - w_1)$. Серединами отрезков A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 будут точки $\frac{z_1 + w_1}{2}$, $\frac{z_2 + w_2}{2}$ и $\frac{z_3 + w_3}{2}$. Но

$$\begin{aligned} \frac{z_3 + w_3}{2} - \frac{z_1 + w_1}{2} &= \frac{z_3 - z_1}{2} + \frac{w_3 - w_1}{2} = s \frac{z_2 - z_1}{2} + s \frac{w_2 - w_1}{2} = \\ &= s \left(\frac{z_2 + w_2}{2} - \frac{z_1 + w_1}{2} \right), \end{aligned}$$

т.е. середины тоже образуют равносторонний треугольник (или совпадают), что и требовалось доказать.

В дальнейшем нам понадобится несложное, но очень полезное наблюдение, которое мы сформулируем в виде упражнения.

Упражнение 13. Докажите, что три различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$ действительное.

Решим еще одну вспомогательную задачу.

Задача 2. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 1. Через точки z_1 и z_2 этой окружности провели касательные к ней. Найдите точку пересечения этих касательных.

Пусть w – искомая точка. По теореме Пифагора для треугольника с вершинами в точках O , z_1 и w получаем $z_1\bar{z}_1 + (w - z_1)(\bar{w} - \bar{z}_1) = w\bar{w}$, откуда $2z_1\bar{z}_1 = w\bar{z}_1 + \bar{w}z_1$. По условию $z_1\bar{z}_1 = 1$, и предыдущее равенство перепи- сывается в виде $2 = \frac{w}{z_1} + \bar{w}z_1$. Аналогично, $2 = \frac{w}{z_2} + \bar{w}z_2$.

Из двух последних равенств находим $w = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$. Если $z_1 = -z_2$, касательные параллельны, и задача не имеет решения.

Теперь мы готовы доказать следующую замечательную теорему, носящую имя Исаака Ньютона.

Теорема Ньютона. В описанном около окружности четырехугольнике середины диагоналей и центр этой окружности лежат на одной прямой.

Выберем систему координат и масштаб так, чтобы центр окружности был в начале координат, а радиус равнялся 1. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 – последовательные точки касания сторон четырехугольника с окружностью (рис. 10). Вершинами четыреху-

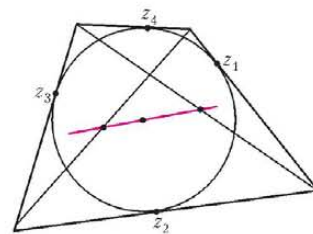


Рис. 10

гольника будут тогда точки $\frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$, $\frac{2z_2z_3}{z_2 + z_3}$, $\frac{2z_3z_4}{z_3 + z_4}$, $\frac{2z_4z_1}{z_4 + z_1}$, а серединами диагоналей – точки $w_1 = \frac{z_1z_2}{z_1 + z_2} + \frac{z_3z_4}{z_3 + z_4}$ и $w_2 = \frac{z_2z_3}{z_2 + z_3} + \frac{z_4z_1}{z_4 + z_1}$. Нетрудно

проверить, что $\frac{w_1}{w_2} = \frac{(z_4 + z_1)(z_2 + z_3)}{(z_1 + z_2)(z_3 + z_4)}$. С другой стороны, $z_1 + z_2 = \frac{1}{\bar{z}_1} + \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{\bar{z}_1 \bar{z}_2}$. Заменяя в предыдущем равенстве каждую скобку на аналогичное выражение, получим $\frac{w_1}{w_2} = \frac{(\bar{z}_4 + \bar{z}_1)(\bar{z}_2 + \bar{z}_3)}{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_3 + \bar{z}_4)}$, т.е. $\frac{w_1}{w_2} = \overline{\left(\frac{w_1}{w_2}\right)}$. Это означает, что число $\frac{w_1}{w_2}$ действительное, откуда, в силу упражнения 13, точки w_1 , w_2 , 0 лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Разберем еще одну замечательную теорему.

Теорема Птолея. Произведение длин диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений длин его противоположных сторон.

Сначала заметим, что для любых чисел z_1, z_2, z_3, z_4 выполнено равенство

$$(z_1 - z_2)(z_4 - z_3) + (z_2 - z_3)(z_4 - z_1) = (z_2 - z_4)(z_3 - z_1). \quad (1)$$

Его легко проверить, просто раскрыв скобки.

Пусть теперь z_1, z_2, z_3, z_4 — вершины произвольного четырехугольника (занумерованные по порядку). Из равенства (1) следует, что

$$(z_1 - z_2)(z_4 - z_3) + (z_2 - z_3)(z_4 - z_1) = |(z_2 - z_4)(z_3 - z_1)|.$$

Воспользовавшись упражнением 5, получаем, что

$$|(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)| + |(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)| \geq |(z_2 - z_4)(z_3 - z_1)|. \quad (2)$$

Тем самым мы уже доказали, что в любом четырехугольнике произведение длин диагоналей не превосходит сумму произведений длин противоположных сторон.

А когда неравенство (2) обращается в равенство? Сумма длин двух векторов на плоскости равна длине их суммы ровно в том случае, когда эти векторы сонаправлены, т.е. неравенство (2) обращается в равенство ровно в том случае, когда у чисел $(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)$ и $(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)$ аргументы одинаковы. Но это равносильно тому, что у отношения $\frac{(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}$ этих чисел аргумент равен 0, т.е. это отношение является положительным действительным числом. Обозначим его λ . Тогда $\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1} =$

$= -\lambda < 0$ (мы поменяли знак в одной из скобок) — полученное равносильно тому, что аргументы чисел $w_1 = \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3}$ и $w_2 = \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1}$ дают в сумме π .

Пусть теперь z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на окружности (рис. 11). На рисунке отмечены аргументы чисел w_1 и w_2 — видно, что они дают в сумме π в силу того, что четырехугольник вписан в окружность. Теорема Птолея доказана.

Можно доказать и обратное: если неравенство (2) обращается в равенство, то четырехугольник вписан в окружность.

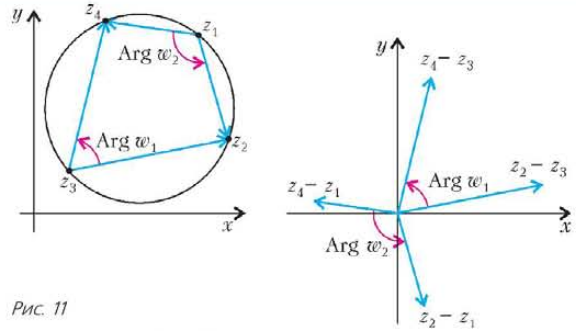


Рис. 11

Упражнение 14. Двойным отношением четверки различных точек z_1, z_2, z_3 и z_4 называется число $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$. Докажите, что двойное отношение действительно тогда и только тогда, когда точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой.

Задача о неподвижной точке и преобразования плоскости

Рассмотрим теперь такую задачу.

Задача 3. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба, причем меньшая карта целиком лежит внутри большей. Докажите, что можно проткнуть иголкой одновременно обе карты так, что точка прокола будет изображать на обеих картах одну и ту же точку местности.

Попробуем записать алгебраически тот факт, что вторая карта — меньшего масштаба и как-то положена на первую. Введем на ней систему координат так, что началом будет одна из вершин первой карты, а оси будут направлены по ее сторонам. Тогда вторая карта получается из первой следующим образом: сначала мы изменяем масштаб в r раз, где r — некоторое число, меньшее 1 (т.е. умножаем все точки на r , см. рис. 12),

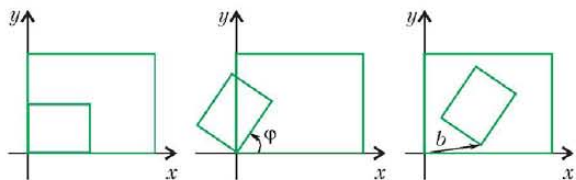


Рис. 12

затем поворачиваем уменьшенную карту на нужный угол Φ (т.е. умножаем все точки на комплексное число $\cos \Phi + i \sin \Phi$), после чего сдвигаем повернутую карту на нужный вектор (прибавляем комплексное число b). В итоге получаем: если точка z плоскости обозначает на большой карте некоторую точку местности, то на маленькой карте эту же точку местности обозначает точка $az + b$ плоскости (где $a = r(\cos \Phi + i \sin \Phi)$).

Чтобы найти такую точку плоскости, которая изображает на обеих картах одну и ту же точку местности, надо просто решить уравнение $z = az + b$. Откуда

получаем $z = \frac{b}{1-a}$ — нужная точка прокола найдена.

(Заметим, что $a \neq 1$ — иначе масштаб карт одинаков, что противоречит условию.)

Неужели уже все доказано? Не совсем. Ведь правило $z \rightarrow az + b$ преобразует не только точки большой карты, но и все точки плоскости. И значит, мы пока доказали, что при этом преобразовании где-то на плоскости найдется *неподвижная* точка (т.е. точка, которая остается на месте, переходит сама в себя). Но надо еще доказать, что эта точка действительно принадлежит обеим картам. Да ведь мы пока и не использовали одно важное условие — что вторая карта целиком поместилась в первой.

Заметим, что среди точек первой карты, не принадлежащих второй карте, не может быть неподвижной (поскольку они перейдут во вторую карту, а сначала были вне нее). А почему никакая точка снаружи первой карты не может остаться на месте?

Чтобы это понять, заметим сначала, что при нашем преобразовании расстояния между точками уменьшаются: ведь мы сначала уменьшаем масштаб (и значит, уменьшаем расстояния), а потом (при повороте и сдвиге) расстояния не меняются. Пусть неподвижная точка z лежит снаружи первой карты. Тогда она

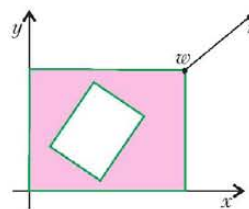


Рис. 13

находится на некотором расстоянии от нее (расстояние до карты — это расстояние до ближайшей точки на границе этой карты). Найдем на границе первой карты точку w , ближайшую к z (рис. 13). После преобразования расстояние между точками должно уменьшиться — но w

остается в пределах первой карты, а значит, точка z должна сдвинуться, чтобы расстояние от нее до карты уменьшилось, т.е. точка z не может быть неподвижной.

Задача решена.

Здесь уместно вернуться к движениям плоскости. Как записать поворот на угол φ против часовой стрелки относительно произвольной точки a ? Можно поступить так же, как в задаче про карты. Пусть $s = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Сделаем сначала сдвиг в начало координат (z переходит в $z - a$), потом поворот относительно начала координат (умножение на s), а затем обратный сдвиг. В итоге получаем: точка z при повороте на угол φ относительно точки a переходит в точку $s(z - a) + a$. Будем считать, что $s \neq 1$.

А что будет, если мы после этого поворота сделаем еще сдвиг на вектор b ? Тогда z в итоге перейдет в точку

$s(z - a) + a + b$. Но оказывается, это составное движение (сначала поворот относительно a , потом сдвиг) является просто поворотом на тот же угол, но относительно некоторой другой точки (рис. 14). Чтобы доказать это, обозначим исходную точку через c . При повороте на угол φ относи-

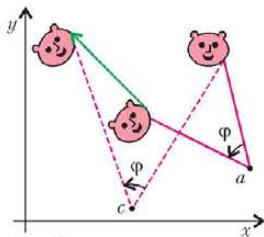


Рис. 14

тельно c точка z переходит в $s(z - c) + c$. Значит, нам надо решить уравнение $s(z - a) + a + b = s(z - c) + c$.

$$\text{Решаем и находим } c = \frac{-sa + a + b}{-s + 1} = a + \frac{b}{1 - s}.$$

Упражнение 15. Докажите, что составное движение, состоящее из поворота на угол φ относительно точки a и затем еще поворота на угол ψ относительно точки b , является либо поворотом на угол $\varphi + \psi$ относительно некоторой точки c , либо сдвигом на некоторый вектор, если $\varphi + \psi$ имеет вид $2\pi n$, где n — целое.

Комплексные числа и суммы

Покажем теперь, как с помощью комплексных чисел найти сумму $S = \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$. Пусть $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Тогда S будет равна действительной части числа $z + z^2 + \dots + z^n$. А это число — сумма геометрической прогрессии, правда состоящей из комплексных чисел. Но формула для суммы такой прогрессии точно такая же, как и в случае действительных чисел: $z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ (проверьте, домножив обе части равенства на $1 - z$). Поэтому S равна действительной части числа

$$\frac{1 - \cos(n+1)\varphi - i \sin(n+1)\varphi}{1 - \cos \varphi - i \sin \varphi}.$$

Домножим числитель и знаменатель этой дроби на сопряженное к знаменателю число $1 - \cos \varphi + i \sin \varphi$ и выпишем действительную часть, получим

$$S = \frac{(1 - \cos(n+1)\varphi)(1 - \cos \varphi) + \sin(n+1)\varphi \sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}.$$

Это уже ответ. Желаящие могут упростить его (используя формулы тригонометрии) в качестве упражнения.

Упражнение 16. Найдите сумму

$$\sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \dots + \frac{1}{2^n} \sin n\varphi.$$

Если вы знаете, что такое бином Ньютона и биномиальные коэффициенты, советуем решить следующее упражнение. Дадим подсказку к пункту а): запишите число $(1 - i)^n$ двумя способами — просто раскрыв скобки (по формуле бинома Ньютона) и используя формулу Муавра.

Упражнение 17. Вычислите суммы:

$$\text{а) } C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots; \text{ б) } C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots$$

Основная теорема алгебры

Как мы уже знаем, любой квадратный трехчлен с действительными (и даже с комплексными) коэффициентами имеет комплексный корень. А что можно сказать про многочлены более высоких степеней? Одной из жемчужин математики является следующая знаменитая теорема.

Теорема (основная теорема алгебры). Любой многочлен положительной степени с действительными (и даже с комплексными) коэффициентами имеет комплексный корень.

Мы не будем доказывать здесь эту теорему – она довольно сложная. Желаящие могут прочитать различные доказательства этой теоремы, опубликованные в «Кванте» (см., например, статьи А.Тоома, В.Тихомирова, Л.Понтрягина в списке литературы).

Упражнение 18. Докажите теорему Безу: если $R(x)$ – многочлен с комплексными коэффициентами и s – любой его корень, то $R(x)$ делится на $x - s$, т.е. его можно представить в виде $(x - s)Q(x)$, где $Q(x)$ – некоторый многочлен.

Из этого упражнения и основной теоремы алгебры легко следует такая теорема.

Теорема. Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами можно представить в виде $a(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n)$, где $a, b_1, \dots, b_n$ – комплексные числа (такое представление называют разложением на линейные множители).

Применим эту теорему к многочлену с действительными коэффициентами. Пусть $P(x)$ – такой многочлен. Разложим его на линейные множители. Пользуясь свойствами комплексного сопряжения, можно вывести следующий результат.

Упражнение 19. Пусть $P(x)$ – многочлен с действительными коэффициентами, b – комплексный корень этого многочлена, т.е. $P(b) = 0$. Докажите, что тогда и $P(\bar{b}) = 0$.

Значит, если среди множителей многочлена $P(x)$ есть $(x - b)$, причем число b не является действительным, то среди его множителей есть и $(x - \bar{b})$. Перемножим их – получим многочлен $x^2 - (b + \bar{b})x + b\bar{b}$ с действительными коэффициентами (ведь $b + \bar{b}$ – это удвоенная действительная часть числа b , а $b\bar{b}$ – это квадрат модуля числа b). Но тогда можно представить $P(x)$ в виде $(x^2 - (b + \bar{b})x + b\bar{b})P_1(x)$, где $P_1(x)$ – многочлен меньшей степени с действительными коэффициентами. Применим аналогичные рассуждения к многочлену $P_1(x)$, и так далее. В итоге мы докажем следующую теорему.

Теорема. Любой многочлен положительной степени с действительными коэффициентами раскладывается на множители с действительными коэффициентами, среди которых только линейные и квадратные.

В формулировке никаких комплексных чисел нет. А доказательство удалось получить благодаря использованию комплексных чисел.

Рекуррентные соотношения

Мы умеем теперь решать любое квадратное уравнение. Но где могут пригодиться комплексные корни квадратных уравнений? Разберем один пример.

В математике часто встречаются последовательности, которые заданы не явной формулой, а рекуррентно – т.е. известны несколько первых членов последовательности, и есть правило, как получать следующие члены из предыдущих. (Яркий пример – последовательность чисел Фибоначчи, где первые два числа

равны 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих.)

Пусть, например, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ и

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n \text{ при } n \geq 1 \quad (3)$$

(коротко вся последовательность обозначается символом (a_n)). Мы хотим найти явную формулу для членов этой последовательности.

Найдем сначала все геометрические прогрессии вида q^n , удовлетворяющие уравнению (3). Подставляя в уравнение (3), получаем $q^{n+2} = 3q^{n+1} + 4q^n$. Сокращая на q^n , получим квадратное уравнение $q^2 = 3q + 4$, решая его, находим $q = -1$ или $q = 4$. Значит, последовательности $(-1)^n$ и 4^n удовлетворяют уравнению (3). Заметим, что для любых чисел c и d последовательность $b_n = c \cdot (-1)^n + d \cdot 4^n$ тоже будет удовлетворять уравнению (3).

Теперь уже нетрудно найти формулу для членов последовательности (a_n) . Если мы найдем такие числа c и d , что будет выполнено $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$, то последовательности (a_n) и (b_n) окажутся одинаковыми. Ведь первые два члена последовательности, удовлетворяющей уравнению (3), полностью ее определяют. Так как $a_1 = 2$ и $a_2 = 5$, осталось найти такие c и d , что $2 = -c + 4d$ и $5 = c + 16d$. Решая эту систему, находим $d = \frac{7}{20}$, $c = -\frac{3}{5}$, откуда

$$a_n = -\frac{3}{5} \cdot (-1)^n + \frac{7}{20} \cdot 4^n.$$

Попробуем таким же методом найти формулу для последовательности (a_n) , где $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, и

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n \text{ при } n \geq 1. \quad (4)$$

Какие прогрессии вида q^n удовлетворяют уравнению (4)? Подставляя, получаем $q^{n+2} = 2q^{n+1} - 2q^n$, т.е. $q^2 - 2q + 2 = 0$. Это квадратное уравнение не имеет действительных корней, но у него есть два комплексных корня: $1 + i$ и $1 - i$. Ищем a_n в виде $c \cdot (1 + i)^n + d \cdot (1 - i)^n$, получаем $a_1 = 2 = c \cdot (1 + i) + d \cdot (1 - i)$, $a_2 = 4 = c \cdot (1 + i)^2 + d \cdot (1 - i)^2 = 2ci - 2di$, откуда находим $c = -i$, $d = i$. Поэтому $a_n = -i(1 + i)^n + i(1 - i)^n$ – последовательность действительных чисел 2, 4, 4, 0, -8, -16, 0, 32, 64, ... – задается простой формулой, в которой участвуют комплексные числа. Впрочем, теперь от них уже можно избавиться: поскольку $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$, то, по формуле Муавра, $a_n = 2 \left(\sqrt{2} \right)^n \sin \frac{\pi n}{4}$ (проверьте).

Упражнение 20. Найдите явные формулы для последовательности чисел Фибоначчи: $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

* * *

Мы затронули только небольшую часть математики, где встречаются комплексные числа, даже не сформу-

лировали некоторые интересные вопросы – можно ли, например, возводить числа в комплексную степень или брать логарифм комплексного числа. Мы только упомянем здесь одну красивую формулу, доказанную Эйлером:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

(она справедлива для любого действительного числа φ). Чтобы объяснить ее смысл, потребовалась бы еще целая статья. Но можно рассматривать $e^{i\varphi}$ просто как сокращенное обозначение для $\cos \varphi + i \sin \varphi$. При таком понимании нами доказано, например, равенство $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$, что соответствует правилу, по которому перемножаются степени.

Те, кто захотят продолжить свое знакомство с комплексными числами, найдут ниже подборку задач для самостоятельного решения, а также список некоторых замечательных книг и статей об этих удивительных числах.

Задачи для самостоятельного решения

1. Нарисуйте множество комплексных чисел z , для которых: а) $z^n + 1 = 0$; б) $|z - i| \leq 2$; в) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$; г) $|z - 1| = |z - i|$; д) $|z - 1| = 2|z - i|$; е) $|z - 1| + |z + 1| = 2$.

2. Докажите, что сумма квадратов длин сторон четырехугольника отличается от суммы квадратов диагоналей на учетверенный квадрат длины отрезка, соединяющего середины диагоналей.

3. На сторонах A_2A_3 , A_1A_3 , A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ во внешнюю сторону построены квадраты с центрами B_1, B_2, B_3 соответственно. Докажите, что отрезки B_1B_2 и A_3B_3 равны по длине и перпендикулярны.

4. Докажите, что в любом треугольнике центр тяжести треугольника, его ортоцентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой (прямой Эйлера).

5*. Каждую сторону n -угольника в процессе обхода против часовой стрелки продолжили на ее длину. Оказалось, что концы построенных отрезков служат вершинами правильного n -угольника. Докажите, что исходный n -угольник – тоже правильный.

6. Пусть P – многочлен степени k с комплексными коэффициентами. Докажите, что среднее арифметическое значений P в вершинах правильного n -угольника равно значению P в центре этого многоугольника, если $n > k$.

7. а) Пусть $z = (3 + 4i)/5$. Найдется ли такое натуральное число n , что $z^n = 1$?

б) Докажите, что число $\frac{1}{\pi} \arctg \frac{4}{3}$ иррационально.

8. Сумма трех комплексных чисел равна нулю, сумма их квадратов равна нулю и сумма их кубов тоже равна нулю. Верно ли, что и сумма четвертых степеней этих чисел равна нулю?

9. Изобразите на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z = \frac{1+ti}{1-ti}$, где t пробегает все действительные числа.

10. Мы уже знаем, что некоторые преобразования плоскости задаются функциями комплексного переменного: например, функция $f(z) = \bar{z}$ задает симметрию относительно оси абсцисс, а функция $f(z) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)z$ задает поворот на угол φ против часовой стрелки. Запишите как функцию комплексного переменного:

- ортогональную проекцию на ось абсцисс;
- симметрию относительно оси ординат;
- центральную симметрию с центром A ;
- гомотетию с коэффициентом k и центром A ;
- симметрию относительно прямой $y = 3$ со сдвигом на 1 влево;
- поворот, переводящий ось абсцисс в прямую $y = 2x + 1$;
- симметрию относительно прямой $y = 2x + 1$;
- инверсию относительно единичной окружности (этот пункт для тех, кто знаком с понятием инверсии).

11. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами, который при всех действительных x принимает только неотрицательные значения. Выведите из результатов раздела «Основная теорема алгебры», что этот многочлен можно представить в виде суммы нескольких квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

12*. Пусть $c_1, c_2, \dots, c_n, z$ – такие комплексные числа, что

$$\frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \dots + \frac{1}{z - c_n} = 0,$$

причем точки $c_1, c_2, \dots, c_n$ являются вершинами выпуклого многоугольника. Докажите, что точка z лежит внутри этого многоугольника.

13. Для действительных чисел есть понятие «меньше». Докажите, что это понятие нельзя распространить на комплексные числа так, чтобы выполнялись условия:

- для действительных чисел понятие не изменилось;
- из двух разных комплексных чисел ровно одно меньше другого, причем если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$;
- при умножении неравенства на число, меньшее нуля, неравенство меняет знак.

14. а) Найдите все общие комплексные корни многочленов $x^n - 1$ и $x^m - 1$ и наибольший общий делитель этих многочленов.

б) Решите эту же задачу для многочленов $x^n + 1$ и $x^m + 1$.

15. Рассмотрим последовательности (a_n) , удовлетворяющие уравнению

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \text{при } n \geq 1. \quad (5)$$

а) Докажите, что среди геометрических прогрессий вида q^n уравнению (5) удовлетворяет только одна (какая?).

б) Докажите, что любую последовательность (a_n) , удовлетворяющую уравнению (5), можно задать формулой вида $c \cdot 2^n + d \cdot 2^n$, где c и d – некоторые числа, и найдите их для случая последовательности с начальными членами $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Литература

- М.Балк, Г.Балк, А.Полухин. Реальные применения мнимых чисел. (Киев: Радянська школа, 1988)
- А.Тоом. Дама с собачкой. («Квант» №2 за 1990 г.)
- В.Тихомиров. Теоремы существования и основная теорема алгебры. («Квант» №4 за 2005 г.)
- Л.Понтрягин. Основная теорема алгебры. («Квант» №4 за 1982 г.)
- В.Сендеров, А.Спивак. Суммы квадратов и целые гауссовы числа. («Квант» №3 за 1999 г.)
- А.Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. (М.: МЦНМО, 2001)
- Я.Понарин. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. (М.: МЦНМО, 2004)
- А.Киселев. Алгебра. Часть II. (М.: Физматлит, 2005).
- Ю.Соловьев. Комплексные числа. («Квант» №7 за 1991 г.)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2009 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2101» или «Ф2108». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2101, M2102 предлагались на IV этапе, а задачи M2103 – M2110 – на V этапе XXXIV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи M2101–M2110, Ф2108–Ф2117

M2101. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что для любого действительного числа x найдется такое действительное число y , что $f(y) = f(x) + y$. Найдите наибольшее возможное значение a .

Д. Терещин

M2102. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседей, а каждое синее – полусумме соседей. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю.

И. Богданов

M2103. Дана таблица $n \times n$, столбцы которой пронумерованы числами от 1 до n . В клетки таблицы расставляются числа 1, 2, ..., n так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Назовем клетку *хорошей*, если число в ней больше номера столбца, в котором она находится. При каких n существует расстановка, в которой во всех строках одинаковое количество хороших клеток?

К. Чувпиль

M2104. Фокусник отгадывает площадь выпуклого 2008-угольника $A_1A_2 \dots A_{2008}$, находящегося за ширмой. За один вопрос он называет две точки на периметре многоугольника; зрители отмечают эти точки, проводят через них прямую и сообщают фокуснику меньшую из двух площадей частей, на которые 2008-угольник разбивается этой прямой. При этом в качестве точки фокусник может назвать либо вершину, либо точку, делящую указанную им сторону в указан-

ном им численном отношении. Докажите, что за 2006 вопросов фокусник сможет отгадать площадь многоугольника.

Н. Агаханов

M2105. Окружность ω с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C . Внутри угла BAC выбрана точка Q . На отрезке AQ нашлась такая точка P , что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает окружности ω_1 и ω_2 , описанные около треугольников BPQ и CPQ , вторично в точках M и N . Докажите, что $OM = ON$.

А. Акопян

M2106. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \dots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k)(b_2 + k) \dots (b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k , но должен быть всегда больше 1.)

В. Произволов, В. Сендеров

M2107. В неравностороннем треугольнике ABC точки H и M – точки пересечения высот и медиан соответственно. Через вершины A , B и C проведены прямые, перпендикулярные прямым AM , BM , CM соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника, образованного проведенными прямыми, лежит на прямой MH .

Л. Емельянов

M2108. Дано конечное множество простых чисел P . Докажите, что найдется натуральное число x такое, что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (a, b – натуральны-

ми a, b) при всех $p \in P$ и не представляется в таком виде для любого простого $p \notin P$.

В.Сендеров

M2109. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть P и Q — точки пересечения лучей BA и CD , BC и AD соответственно, а H — проекция D на PQ . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами.

В.Шмаров

M2110*. В турнире принимали участие $2n + 3$ шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее n игр. Докажите, что один из шахматистов, игравших в первой партии, играл и в последней.

А.Грибалко

Ф2108. Вдоль оси X движется точка. В пределах заданной дистанции скорость точки обратно пропорциональна расстоянию от нее до начала координат. Во сколько раз больше времени она затратит на прохождение второй половины дистанции по сравнению с первой?

А.Простов

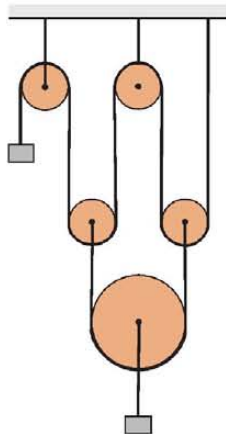


Рис. 1

Ф2109. В системе, изображенной на рисунке 1, большой груз вдвое тяжелее малого. Блоки одинаковые, очень легкие. Нити нерастяжимые, массы нитей пренебрежимо малы, свободные куски нитей вертикальны. Найдите ускорение большого груза.

А.Повторов

Ф2110. Яма имеет полусферическую форму, ее радиус $R = 1$ м, стенки гладкие. На уровне горизонтального диаметра приклеено очень маленькое тело. Оно отклеивается и начинает скользить вниз без начальной скорости. Внизу

большой кусочек поверхности шероховатый, коэффициент трения там $\mu = 0,1$, шероховатый кусочек имеет форму круга, его радиус $r = 1$ см, центр круга находится около самой нижней точки поверхности ямы. Какая часть начальной потенциальной энергии тела выделится при первом преодолении шероховатого кусочка?

Р.Теплов

Ф2111. В сосуде находится смесь одинаковых масс криптона и гелия при давлении 1 атм и температуре 300 К. Проследим за одним из атомов криптона. Оцените число его соударений с другими частицами за 1 час.

З.Рафаилов

Ф2112. Давление разреженного газа в сосуде убывает от 1 атм до 0,2 атм при увеличении объема от 2 л до 20 л, при этом зависимость давления от объема линейная. Найдите максимальную температуру газа в этом процессе. Минимальная температура газа в процессе 200 К.

А.Повторов

Ф2113. Вольтметр и миллиамперметр соединены последовательно и подключены к батарейке, при этом приборы показывают 6,1 В и 1 мА. Параллельно миллиамперметру подключают второй вольтметр — показания первого вольтметра увеличиваются до 6,3 В, а второй вольтметр (он того же типа, что и первый) показывает 0,4 В. Какой ток теперь течет через миллиамперметр? Батарейку можно считать идеальной.

Р.Александров

Ф2114. В схеме, изображенной на рисунке 2, три конденсатора одинаковые и имеют емкость C каждый, а один имеет вдвое большую емкость. Между точками A и B включают катушку индуктивностью L . Найдите максимальное значение силы тока через катушку. Батарейка имеет напряжение U .

А.Мостиков

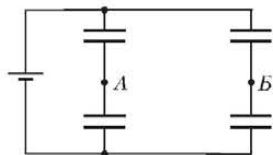


Рис. 2

Ф2115. Катушка индуктивностью $L = 2$ Гн и резистор сопротивлением $R = 100$ Ом соединены параллельно. В некоторый момент к этой цепочке подключают источник постоянного тока силой $I_0 = 3$ А («источник постоянного тока» создает в нагрузке постоянный по величине ток, не зависящий от свойств нагрузки). Найдите количество теплоты, которое выделится в резисторе за большое время.

З.Катушкин

Ф2116. Вдоль прямого участка дороги стоят люди — они встречают дорогого гостя из далекой страны. Интервал между встречающими составляет 0,5 м. Один из встречающих делает шаг в сторону и тут же возвращается на место. Через 2 с то же самое делает его сосед справа, и так далее. С большой высоты кажется, что вдоль шеренги бежит волна. Определите скорость этой волны и ее длину.

А.Гостев

Ф2117. До сих пор любители высококачественного звучания используют усилители звуковой частоты на электронных лампах — они уверены, что качество звучания музыки в этом случае намного лучше, чем при использовании транзисторов (автор задачи не разделяет их уверенности). Рассмотрим практический случай: громкоговоритель имеет сопротивление 4 Ом и для его подключения к усилителю требуется понижающий трансформатор. Выходной каскад усилителя низкой частоты (УНЧ) содержит одну мощную электронную лампу — ее анодный ток может быть в пределах от 20 до 100 мА, напряжение на аноде этой лампы при таких изменениях анодного тока должно находиться в пределах от 40 до 300 В. Какая «выходная мощность» может

быть у такого усилителя? Каков должен быть коэффициент трансформации у выходного трансформатора для получения этой мощности?

А.Зильберман

Решения задач M2081–M2085, Ф2093–Ф2101

M2081. На доске записаны три положительных числа: x , y и 1 . Разрешается дописывать на доску сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать число, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Всегда ли можно получить на доске число: а) x^2 ; б) xy ?

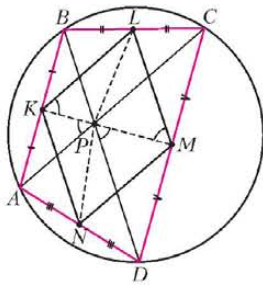
Ответ: а), б) всегда.

а) Запишем на доску по очереди числа $\frac{1}{x}$, $x+1$, $\frac{1}{x+1}$,
 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}$, x^2+x , $(x^2+x) - x = x^2$.

б) Покажем, как разделить y на 2 по правилам задачи:
 $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{2}{y}$, $\frac{y}{2}$. Далее, умея возводить в квадрат, за несколько шагов получим $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = xy$.

Г.Гальперин

M2082. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Пусть K , L , M , N – середины сторон AB , BC , CD , DA соответственно. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников PKL , PLM , PMN , PNK равны.



Треугольники BAK и CDP (см. рисунок) подобны по двум углам, поэтому подобны и их «половинки» KAP и MDP . Следовательно, $\angle APK = \angle DPM$.

Далее, $KL \parallel AC$, $ML \parallel BD$ (как средние линии треугольников ABC и BCD), значит, $\angle LKP = \angle APK = \angle DPM = \angle LMP$. Итак, углы LKP и LMP , опирающиеся на отрезок LP , равны. Значит, равны и радиусы описанных окружностей треугольников PKL и PLM . Остальные равенства доказываются аналогично.

А.Заславский

M2083. Дана клетчатая полоса $1 \times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй – нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Ответ: при $N = 1$ выигрывает первый, в остальных случаях – второй.

Случай $N = 1$ очевиден. Пусть $N > 1$. Второй игрок может сделать первый ход в крайнюю клетку. После k -го хода первого игрока крестики делят полосу не

менее чем на k частей, состоящих из пустых клеток и ноликов. Но к этому моменту выставлено лишь $k - 1$ ноликов, значит, в одной из частей нолика нет, в эту часть и можно поставить нолик.

Б.Френкин

M2084*. Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1.$$

Ответ: таких пар нет.

Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть натуральные числа x , n и t таковы, что $x^t - 1 \vdots n$, а s – наименьшее натуральное число такое, что $x^s - 1 \vdots n$. Тогда $t \vdots s$.

Доказательство. Так как $x^t - 1$ делится на n , то x взаимно просто с n . Разделим t на s с остатком: $t = ks + r$, где $0 \leq r < s$. Тогда $x^{ks} \equiv 1 \pmod{n}$, откуда $(x^t - 1) - (x^{ks} - 1) = x^{ks}(x^r - 1) \vdots n \Rightarrow x^r - 1 \vdots n$. Получаем $r = 0$, иначе имеем противоречие с выбором s . Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть q – простой делитель числа $\frac{x^p - 1}{x - 1}$, где x – целое, а p – простое. Тогда либо $q = p$, либо $q = kp + 1$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Так как $x^p - 1$ делится на q , то x не делится на q , и, согласно малой теореме Ферма, $x^{q-1} - 1$ делится на q . Пусть s – наименьшее натуральное число такое, что $x^s - 1 \vdots q$. Согласно лемме 1, $p \vdots s$ и $q - 1 \vdots s$, откуда $s = p$ или $s = 1$. В первом случае $q - 1 = pk$. Во втором случае имеем

$$x \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \dots + x + 1 \equiv p \pmod{q} \Rightarrow p \vdots q,$$

и, значит, $p = q$. Лемма 2 доказана.

Перейдем к решению задачи. Предположим, что нашлись целые числа x и y , удовлетворяющие равенству $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$. Из леммы 2 вытекает, что любой простой делитель числа $\frac{x^7 - 1}{x - 1}$ либо равен 7, либо имеет остаток 1 при делении на 7, значит, $\frac{x^7 - 1}{x - 1}$ дает остаток 0 или 1 при делении на 7.

Пусть $\frac{x^7 - 1}{x - 1} \equiv 1 \pmod{7}$. Тогда $y^5 \equiv 2 \pmod{7}$, откуда получаем непосредственной проверкой, что возможно лишь $y \equiv 4 \pmod{7}$, но в таком случае $y - 1$, а значит и $y^5 - 1$, имеет простой делитель p такой, что $p \neq 7$, $p \neq 7k + 1$ – противоречие.

Пусть теперь $\frac{x^7 - 1}{x - 1} \equiv 0 \pmod{7}$. Тогда $y^5 \equiv 1 \pmod{7}$, откуда получаем, что $y \equiv 1 \pmod{7}$. Отсюда $\frac{y^5 - 1}{y - 1} = y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \equiv 5 \pmod{7}$, поэтому $\frac{y^5 - 1}{y - 1}$, а значит и $y^5 - 1$, имеет простой делитель p такой, что $p \neq 7$, $p \neq 7k + 1$ – противоречие.

А.Ефимов

M2085*. Среди участников математического соревнования некоторые дружат между собой; если A дружит с B , то и B дружит с A . Назовем группу участников кликой, если каждые двое из них дружат. Назовем количество человек в клике ее размером. Известно, что наибольший размер клики, состоящей из участников соревнования, является четным числом. Докажите, что всех участников можно рассадить в две комнаты так, чтобы наибольший размер клики в одной комнате был равен наибольшему размеру клики в другой комнате.

Размер клики X обозначаем $|X|$. Рассмотрим клику G наибольшего размера $|G| = 2n$.

Схема решения такова: мы распределим участников по двум комнатам, а затем будем переводить по одному из второй комнаты в первую, пока не достигнем требуемого результата. Через G_1 , G_2 будем обозначать части клики G в первой и второй комнатах, а через k_1 , k_2 — наибольшие размеры клик в комнатах.

В течение всего процесса будут выполняться два условия:

- (1) $k_1 \leq k_2$;
- (2) каждый человек в первой комнате дружит со всеми из G_2 .

Из условия (2) следует, что $k_1 = |G_1| = 2n - |G_2|$. Действительно, если бы в первой комнате нашлась клика размером больше $|G_1|$, то вместе с G_2 она образовала бы клику размером больше $2n$, что невозможно.

Вначале произвольно разобьем G на группы G_1 , G_2 по n человек и отправим их в соответствующие комнаты. Добавим в первую комнату всех, кто дружит со всеми из G_2 , всех остальных отправим во вторую. Очевидно, условия (1) и (2) выполнены: $k_2 \geq |G_2| = n = |G_1| = k_1$. Пока $k_2 - k_1 \geq 2$, будем переводить в первую комнату любого из G_2 (если с самого начала $k_2 - k_1 < 2$, то этот этап не выполняем). При этом k_1 растет на 1, k_2 уменьшается не более чем на 1, поэтому $k_2 - k_1$ уменьшается, но остается неотрицательным. Очевидно, выполняется и условие (2). Наконец, мы достигнем того, что $k_2 - k_1 = 0$ или 1.

Если $k_2 - k_1 = 0$, то задача решена; поэтому пусть $k_2 - k_1 = 1$.

Если во второй комнате для некоторой клики K размера k_2 найдется $x \in G_2 \setminus K$ (т.е. x входит в G_2 , но не входит в K), то переведем x . Число k_1 увеличится на 1, k_2 не изменится, и задача решена.

В противном случае каждая клика K размера k_2 целиком содержит G_2 . Рассмотрим любую такую клику K . Поскольку $k_2 > k_1 \geq n \geq |G_2|$, то найдется $x \in K \setminus G_2$. Очевидно, x дружит со всеми из G_2 ; переведем его в первую комнату. При этом k_1 не изменится, поскольку условие (2) выполнено, а G_2 не изменилось.

Если k_2 уменьшилось на 1, то задача решена. Иначе повторим эту же операцию. До бесконечности мы повторять ее не можем, значит, в какой-то момент k_2 уменьшится и станет равным k_1 , что и требовалось.

Замечание 1. В начальные разбиения годится любое,

удовлетворяющее условиям (1) и (2). Например, можно вначале направить всех во вторую комнату.

Замечание 2. Более сильное утверждение о том, что в условиях задачи всегда найдется подходящее разбиение, в котором все участники в одной из комнат образуют клику, неверно.

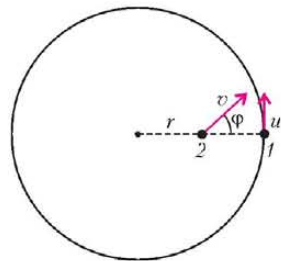
Возьмем $n(2n + 1)$ участников, помеченных всеми двухэлементными подмножествами множества $\{1, \dots, 2n + 1\}$. Пусть два участника дружат, когда их подмножества имеют общий элемент.

Предлагаем читателям проверить, что при любом нечетном $n \geq 2$ эта ситуация служит контрпримером к утверждению.

М.Илюхина, Д.Фон-Дер-Флаасс

Ф2093. Школьник бежит по окружности радиусом $R = 30$ м с постоянной по величине скоростью $u = 3,14$ м/с. Второй школьник гонится за ним, стартовав из центра окружности. В процессе погони он все время находится на радиусе, соединяющем центр окружности и первого школьника, а величина его скорости неизменна и равна $v = 2u$. Сколько времени займет погоня?

Обозначим $\omega = u/R$ угловую скорость движения первого школьника, r — расстояние от второго школьника до центра, φ — угол между направлением скорости второго школьника и радиусом (см. рисунок). Поскольку составляющая скорости второго школьника, перпендикулярная радиусу, равна ωr , а модуль его скорости равен $v = 2u = 2\omega R$, име-



$$\sin \varphi = \frac{\omega r}{2\omega R} = \frac{r}{2R}.$$

Следовательно, в процессе погони угол φ изменяется от начального значения, равного нулю, до конечного значения

$$\varphi_k = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Найдем промежуток времени Δt , за который угол φ изменяется на некоторую малую величину $\Delta \varphi$. Для этого заметим, что за этот промежуток времени второй школьник удаляется от центра окружности на расстояние

$$\begin{aligned} \Delta r &= 2R\Delta(\sin \varphi) = 2R(\sin(\varphi + \Delta \varphi) - \sin \varphi) = \\ &= 2R \cdot 2 \cos \left(\varphi + \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \sin \frac{\Delta \varphi}{2}. \end{aligned}$$

Учтем малость угла $\Delta \varphi$ и получим

$$\Delta r = 2R \cdot 2 \cos \varphi \cdot \frac{\Delta \varphi}{2} = 2R \cos \varphi \cdot \Delta \varphi.$$

Поскольку радиальная составляющая скорости второго школьника равна $2\omega R \cos \varphi$, он удалится от центра

окружности на расстояние Δr за время

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{2\omega R \cos \varphi} = \frac{2R \cos \varphi \cdot \Delta \varphi}{2\omega R \cos \varphi} = \frac{\Delta \varphi}{\omega},$$

пропорциональное изменению угла.

Значит, время, которое займет погоня, составит

$$t = \frac{\varphi_{\text{к}}}{\omega} = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{\pi R}{6u} = 5 \text{ с}.$$

К.Парфенов

Ф2094. Небольшой груз массой m , привязанный нитью длиной l к платформе (рис.1), движется по гладкой поверхности стола со скоростью v , описывая окружность. Нить невесома и нерастяжима и образует угол α с вертикалью. Платформа начинает двигаться вверх с ускорением a ; при этом вначале груз не отрывается от стола. Найдите величины действующих на груз сил натяжения нити T и реакции стола N сразу после начала движения платформы.

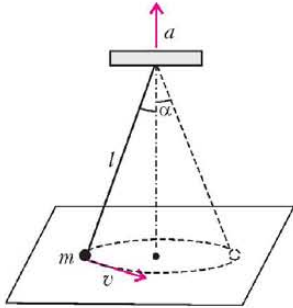


Рис. 1

движения платформы.

Пусть a_1 – составляющая ускорения груза, направленная к центру окружности. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления в вертикальной плоскости, проходящей через нить:

$$\begin{aligned} T \cos \alpha - mg + N &= 0, \\ T \sin \alpha &= ma_1. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$T = \frac{ma_1}{\sin \alpha} \text{ и } N = mg - ma_1 \cotg \alpha,$$

т.е. для получения ответа остается найти величину a_1 .

Поместим начало прямоугольной системы координат в центр окружности, по которой движется груз (рис.2). Означим $\vec{r}_1$ радиус-вектор конца нити, прикрепленного к грузу,

$\vec{r}_2$ – радиус-вектор конца нити, прикрепленного к платформе, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости концов нити, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – ускорения концов нити. Введем также обозначения для относительных величин: $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (модуль этой величины равен длине нити), $\vec{V} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (скорость груза относительно верхнего конца нити), $\vec{A} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$. Заметим, что

$$\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} - \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{A}.$$

Так как нить нерастяжима и в процессе движения груза все время натянута, скорость груза относительно верхнего конца нити всегда направлена перпендикулярно нити. Это означает, что скалярное произведение векто-

ров $\vec{R}$ и $\vec{V}$ равно нулю:

$$(\vec{R} \cdot \vec{V}) = 0.$$

Пусть за малое время Δt векторы $\vec{R}$ и $\vec{V}$ получили малые приращения $\Delta \vec{R}$ и $\Delta \vec{V}$. Запишем для момента времени $t + \Delta t$ полученное выше условие перпендикулярности векторов:

$$((\vec{R} + \Delta \vec{R}) \cdot (\vec{V} + \Delta \vec{V})) = 0.$$

Раскрывая скобки, пренебрегая малой величиной $(\Delta \vec{R} \cdot \Delta \vec{V})$ и деля обе части равенства на Δt , получим

$$(\vec{V} \cdot \vec{V}) + (\vec{R} \cdot \vec{A}) = 0.$$

Сразу после начала движения платформы

$$\vec{v}_1 = \vec{v}, \quad \vec{v}_2 = 0, \quad (\vec{V} \cdot \vec{V}) = v^2,$$

$$(\vec{R} \cdot \vec{A}) = (\vec{R} \cdot \vec{a}_1) - (\vec{R} \cdot \vec{a}_2) = -la_1 \sin \alpha + la \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$v^2 - la_1 \sin \alpha + la \cos \alpha = 0, \text{ и } a_1 = a \cotg \alpha + \frac{v^2}{l \sin \alpha}.$$

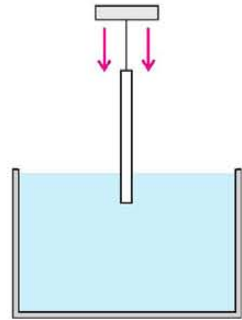
Подставляя найденное значение a_1 в полученные выше формулы для искомых сил, приходим к ответу:

$$T = \frac{ma \cotg \alpha}{\sin \alpha} + \frac{mv^2}{l \sin^2 \alpha},$$

$$N = mg - ma \cotg^2 \alpha - \frac{mv^2 \cotg \alpha}{l \sin \alpha}.$$

М.Ромашка

Ф2095. Тонкий карандаш, подвешенный на нитке за один из концов, начинают погружать в воду, медленно опуская точку подвеса (см. рисунок). Определите максимальную глубину погружения нижнего конца карандаша, если длина карандаша $l = 18$ см, а его средняя плотность в $n = 2$ раза меньше плотности воды.



Рассмотрим карандаш, погруженный в воду и отклоненный от вертикали на малый угол α . Суммарный момент сил тяжести и архимедовой силы относительно горизонтальной оси, проходящей через верхний конец карандаша, равен

$$M = mg \frac{l}{2} \sin \alpha - F_A \left(l - \frac{x}{2} \right) \sin \alpha,$$

где $F_A = \rho g S x$ – сила Архимеда, ρ – плотность воды, S – площадь поперечного сечения карандаша, x – длина погруженной в воду части карандаша, $m = (\rho/n) S l$ – масса карандаша. При $M > 0$ момент сил возвращает карандаш в вертикальное положение, при $M < 0$ – увеличивает отклонение карандаша от вертикали. Формулу для момента сил можно переписать

иначе:

$$M = \left(x^2 - 2lx + \frac{l^2}{n} \right) \frac{\rho g S}{2} \sin \alpha.$$

Отсюда следует, что при малых x момент сил $M > 0$ и, следовательно, вертикальное положение карандаша будет устойчивым. Потеря устойчивости вертикального положения происходит при

$$x = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right),$$

когда момент сил меняет знак с положительного на отрицательный. При дальнейшем погружении карандаш будет отклоняться от вертикали, но длина x погруженной в воду его части меняться не будет, поскольку в равновесии момент сил M должен оставаться равным нулю. Поэтому глубина погружения нижнего конца карандаша, равная $x \cos \alpha$, будет при этом уменьшаться.

Итак, максимальная глубина погружения нижнего конца карандаша равна

$$h = l \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) = l \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 5,3 \text{ см.}$$

И. Горбатый

Ф2096. На гладком горизонтальном столе лежит груз массой m , к которому прикреплены две одинаковые пружины жесткостью k каждая (рис. 1). Левый

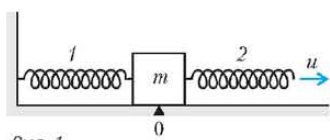


Рис. 1

концы пружины 1 прикреплен к стенке, в момент времени $t = 0$ правый конец пружины 2 начинают медленно перемещать с

постоянной скоростью u . 1) Через какое время груз впервые приобретет скоростью u ? 2) На каком расстоянии от первоначального положения будет находиться он в этот момент?

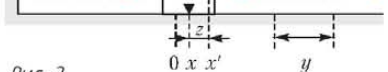


Рис. 2

Введем обозначения: x — смещение груза из первоначального положения, $y = ut$ — смещение правого конца пружины 2 (рис. 2). На груз действуют две упругие силы

$$F_1 = kx \text{ и } F_2 = (y - x)k = (ut - x)k.$$

Результирующая этих сил равна

$$F = F_2 - F_1 = kut - kx - kx = k(ut - 2x).$$

Запишем для груза второй закон Ньютона (уравнение движения груза):

$$ma_x = k(ut - 2x).$$

Перейдем теперь в систему отсчета Z , движущуюся с постоянной скоростью $u/2$ относительно «неподвижной» системы. Обе системы инерциальные, поэтому ускорения груза в обеих системах одинаковы: $a_x = a_z$. В момент времени t начало координат новой системы

находится в точке $x' = \frac{u}{2}t$. Координата груза в этот момент равна $z = -(x' - x) = -x' + x$. Второй закон Ньютона в «движущейся» системе отсчета будет иметь вид

$$ma_z = k(ut - 2z - ut) = -2kz.$$

Это — уравнение свободных колебаний груза с угловой частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

В момент времени $t = 0$ груз находится в начале координат «движущейся» системы $z_0 = 0$ и имеет скорость $v_0 = -\frac{u}{2}$. Через полпериода колебаний, т.е. через время

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m}{2k}},$$

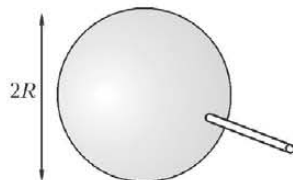
скорость груза в этой системе будет равна $+\frac{u}{2}$, и он снова будет находиться в точке $z = 0$. Следовательно, в «неподвижной» системе скорость груза в этот момент будет равна u , и от первоначального положения он будет находиться на расстоянии

$$x = \frac{u}{2} \Delta t = \frac{\pi}{2} u \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

А. Гуденко

Ф2097. Через короткую трубку выдувают мыльный пузырь с массой $m = 0,01 \text{ г}$ и коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 0,01 \text{ Н/м}$ (см. рисунок). Пузырь заряжают зарядом $Q = 5,4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$. Трубка остается открытой. 1) Определите равновесный радиус пузыря R_0 . 2) Определите период малых колебаний пузыря, если при

колебаниях он сохраняет сферическую форму. 3) Оцените, с какой скоростью разлетятся брызги, если пузырь внезапно зарядит зарядом $Q_1 = 10 \text{ Q}$. Электростатическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)$.



1) Найдем давление на пузырь, обусловленное электростатическими силами. Рассмотрим малый элемент ΔS его поверхности. Напряженность E_0 электрического поля, действующего на него, по модулю равна напряженности E_1 поля, создаваемого им самим вблизи его поверхности (это следует, например, из того, что напряженность поля внутри пузыря должна быть равна нулю). Тогда на пузырь действует электрическая сила

$$F_э = E_0 \Delta Q = E_0 \frac{Q \Delta S}{4\pi R^2}, \text{ где } E_0 = E_1 = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Таким образом, давление на пузырь, обусловленное электростатическими силами, равно

$$p_э = \frac{F_э}{\Delta S} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4}.$$

Давление сил поверхностного натяжения составляет

$$p_{\sigma} = -\frac{4\sigma}{R}.$$

Суммарное давление $p = p_a + p_{\sigma}$ в равновесном состоянии равно нулю:

$$\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R_0^4} - \frac{4\sigma}{R_0} = 0.$$

Следовательно, равновесный радиус пузыря равен

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{128\pi^2\epsilon_0\sigma}} \approx 3,0 \text{ см}.$$

2) Если радиус пузыря изменился по сравнению с равновесным значением R_0 , то на малый элемент ΔS его поверхности будет действовать сила

$$F = p\Delta S = 4\sigma \left(\frac{R_0^3}{R^4} - \frac{1}{R} \right) \Delta S.$$

При малых изменениях радиуса $\Delta R \ll R_0$ выражение для силы принимает вид

$$F = \frac{dp}{dR} \Big|_{R=R_0} \cdot \Delta R \Delta S = 4\sigma \Delta R \Delta S \left(-\frac{4R_0^3}{R^5} + \frac{1}{R^2} \right) \Big|_{R=R_0} = -\frac{12\sigma}{R_0^2} \Delta R \Delta S.$$

Знак «минус» означает, что равновесное состояние пузыря устойчиво.

Запишем второй закон Ньютона для элемента поверхности ΔS массой Δm :

$$\Delta m \Delta R'' = -\frac{12\sigma}{R_0^2} \Delta R \Delta S, \text{ где } \Delta m = \frac{m \Delta S}{4\pi R_0^2},$$

откуда получаем

$$\Delta R'' + 48 \frac{\pi\sigma}{m} \Delta R = 0.$$

Это — уравнение свободных колебаний с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{48\pi\sigma}{m}}.$$

Таким образом, период колебаний будет равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi m}{12\sigma}} \approx 16 \text{ мс}.$$

3) Скорость разлета брызг v можно оценить из закона сохранения энергии. Пренебрегая поверхностной энергией, запишем

$$\frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{100Q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0 m}} \approx 94 \text{ м/с}.$$

А. Ольховец

Ф2098. Найдите сопротивление электрической цепи между точками A и B (рис. 1). Сопротивление сторо-

ны большого шестиугольника равно R , сопротивление стороны малого шестиугольника равно $R/2$, сопротивление каждого внутреннего проводника, заключенного между шестиугольниками, равно $R/2$, а сопротивление каждого проводника, находящегося внутри малого шестиугольника, равно $R/4$.

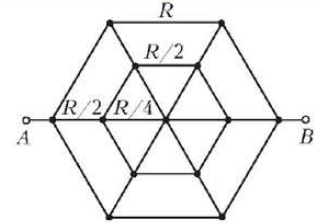


Рис. 1

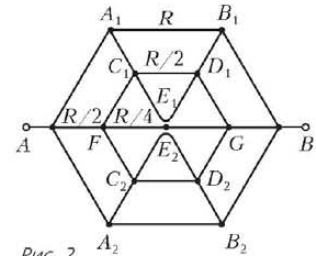


Рис. 2

В схеме электрической цепи, изображенной на рисунке 2, точки E_1 , E_2 и центр схемы имеют, в силу ее симметрии, одинаковые потенциалы. При их соединении проводником с нулевым сопротивлением ток в цепи и ее сопротивление не меняются, а полученная при таком преобразовании схема совпадает со схемой, приведенной в условии. Рассчитаем сопротивление этой цепи.

Пары точек A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 , D_1 и D_2 , также в силу симметрии, имеют попарно одинаковые потенциалы. Соединяя их, получаем эквивалентную схему, изображенную на рисунке 3; здесь учтено, что сопротивление двух парал-

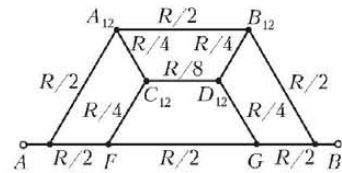


Рис. 3

лельно соединенных одинаковых резисторов вдвое меньше сопротивления каждого из них. Заметим, что пары точек A_{12} и F , B_{12} и G имеют одинаковые потенциалы; соединяя их, получаем электрическую цепь, схема которой изображена на рисунке 4. Ее сопротивление легко рассчитывается по формулам последовательного и параллельного соединения проводников: оно равно



Рис. 4

$$R_0 = \frac{13R}{20}.$$

Е. Простомолотова

Ф2099. В цилиндре под поршнем находится смесь воздуха и паров некоторой жидкости. Смесь изотермически сжимают. На рисунке 1 представлена экспериментальная зависимость давления в сосуде от объема в этом процессе. Чему равно давление насыщенных паров жидкости при данной температуре и внутренняя энергия смеси при объеме цилиндра более 5 л?

Примечание. Считать воздух идеальным двухатомным газом, а пары жидкости — идеальным трехатом-

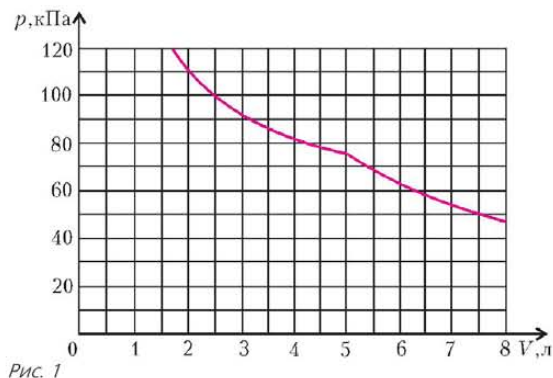


Рис. 1

ным газом.

Предположим, что эксперимент проводится при температуре T . Очевидно, что насыщение пара наступает в точке излома изотермы (см. рис. 1). Тогда для объемов $V > 5$ л уравнение газового состояния, в соответствии с законом Дальтона, имеет вид

$$p_1 V_1 = (v_1 + v_2) RT,$$

где v_1 — количество молей воздуха в сосуде, v_2 — количество молей паров жидкости в сосуде, V_1 — любой объем, превышающий 5 л, а p_1 — соответствующее ему давление в сосуде (рис. 2). Для объемов $V < 5$ л давление в сосуде складывается из давления воздуха и давления насыщенного пара. Уравнение газового со-

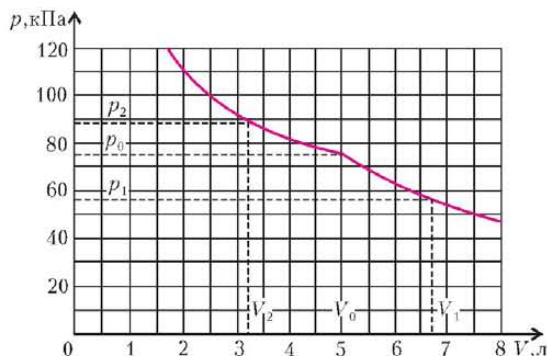


Рис. 2

стояния имеет вид

$$p_2 V_2 = p_n V_2 + v_1 RT,$$

где V_2 — любой объем, не превышающий 5 л. Обе кривые, описывающие состояние газа для объемов больше и меньше 5 л, пересекаются в точке с координатами V_0 , p_0 , следовательно, при $V = V_0$ имеем

$$v_2 RT = p_n V_0.$$

Из полученных уравнений находим

$$p_n = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{V_0 - V_2} \approx 50 \text{ кПа}.$$

Следует заметить, что для получения более точного численного результата целесообразно с помощью гра-

фика на рисунке вычислить несколько произведений $p_1 V_1$ для различных объемов $V > 5$ л и усреднить полученные значения. Аналогично, вычисление окончательного результата лучше проводить для нескольких значений V_2 и соответствующих ему значений p_2 . При построении графика использовались такие численные значения: $T = 300$ К, $v_1 = 0,05$ моль, $v_2 = 0,1$ моль, $p_n = 50$ кПа.

Внутренняя энергия смеси при $V > 5$ л вычисляется по формуле

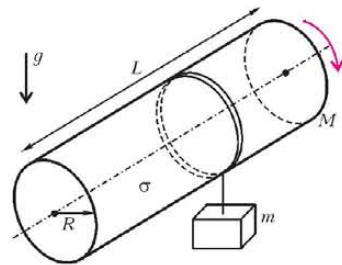
$$U = \frac{5}{2} v_1 RT + 3 v_2 RT,$$

или, с учетом полученных ранее выражений,

$$U = \frac{5}{2} (p_0 - p_n) V_0 + 3 p_n V_0 \approx 1060 \text{ Дж}.$$

С.Кармазин

Ф2100. На длинном тонкостенном диэлектрическом цилиндре радиусом R , длиной $L \gg R$ и массой M размещен электрический заряд с одинаковой поверхностной плотностью σ . Цилиндр может свободно (без трения) вращаться вокруг своей оси под действием груза массой m , подвешенного на невесомой нити, намотанной на цилиндр (см. рисунок). Определите ускорение груза. Магнитную постоянную μ_0 считать заданной.



При вращении цилиндра возникает круговой ток, создающий магнитное поле внутри цилиндра.¹ Полная сила тока, текущего по поверхности цилиндра, равна $I = \sigma v L$, где v — линейная скорость зарядов. Ток, приходящийся на единицу длины цилиндра, равен $i = I/L = \sigma v$. Магнитное поле B внутри цилиндра совпадает с магнитным полем длинной катушки:

$$B = \frac{\mu_0 I}{L} = \mu_0 \sigma v.$$

Плотность магнитной энергии равна $w_m = B^2 / (2\mu_0) = \mu_0 \sigma^2 v^2 / 2$. Тогда полная энергия магнитного поля составляет

$$W_m = w_m \cdot \pi R^2 L = \frac{k v^2}{2}, \text{ где } k = \pi \mu_0 \sigma^2 R^2 L.$$

Суммарная кинетическая энергия вращающегося цилиндра и движущегося груза равна

$$W_k = \frac{(m + M) v^2}{2}.$$

Если координатную ось X направить вниз, то потенциальную энергию груза можно представить в виде

$$W_n = -mgx + \text{const}.$$

¹ Подробнее об этом см. в статье Ю.Маношкина и А.Стасенко «Магнитный тормоз и формула Эйнштейна» в «Кванте» №5 за 2004 год.

Запишем теперь закон сохранения энергии, включая механическую энергию цилиндра и груза и энергию магнитного поля внутри цилиндра:

$$W_k + W_n + W_m = \text{const},$$

или

$$(m + M + k) \frac{v^2}{2} - mgx = \text{const}.$$

Продифференцировав это уравнение по времени, принимая во внимание, что $v = \frac{dx}{dt}$ и $a = \frac{dv}{dt}$, найдем искомое ускорение:

$$a = \frac{mg}{m + M + k} = \frac{mg}{m + M + \pi \mu_0 \sigma^2 R^2 L}.$$

М. Осин

Ф2101. Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы. От времени чертила выцвели, и на чертеже остались видны только параллельные друг другу собирающая линза, объект и его действительное изображение (рис. 1). Из пояснений к чертежу было ясно, что за линзой находилось плоское зеркало. Восстановите построением по имеющимся данным положение зеркала и найдите положение фокусов линзы.

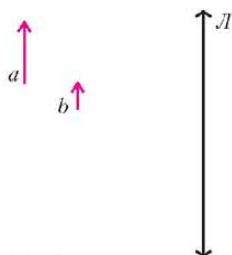


Рис. 1

Из обратимости хода лучей следует, что результат решения задачи не зависит от того, какая из стрелок a или b , заданных в условии, является предметом, а какая – его изображением в системе линза–зеркало. Так как стрелки a и b параллельны линзе, то их изображения A и B тоже параллельны линзе и, следовательно, друг другу. А поскольку A и B параллельны друг другу, то они параллельны и зеркалу,

причем прямая, проходящая через их концы, параллельна главной оптической оси. Следовательно, луч, распространяющийся вдоль этой прямой, преломляясь, в линзе, пройдет через фокус и концы стрелок a и b . Таким образом, построение будем проводить в следующем порядке.

1) Построим главную оптическую ось линзы OO_1 , которая проходит через оптический центр перпендикулярно плоскости линзы (рис. 2).

2) Проведем лучи, проходящие через начала и концы предмета и его изображения. Эти лучи должны пересе-

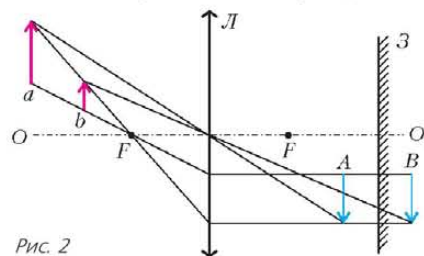


Рис. 2

кать оптическую ось в фокусе F линзы.

3) Задний фокус линзы находится справа от линзы на таком же расстоянии от нее.

4) Одна из стрелок a или b , указанных в условии, является предметом, а другая – его изображением в системе линза–зеркало. Построим изображения этих стрелок в линзе, используя обратимость хода лучей. Для этого возьмем стандартные лучи – проходящие через фокус линзы и через ее центр. Получим изображения A и B .

5) Одна из стрелок A или B является предметом по отношению к плоскому зеркалу, а другая – его изображением. Следовательно, плоское зеркало должно располагаться посередине между стрелками A и B .

Г.Тарнопольский

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Пять петель

(Начало см. на 4-й с. обложки)

В одной из самых авторитетных книг, посвященных головоломкам, написано, что головоломка «Пять петель» создана в 1983 году в Голландии. Однако в далекой от Голландии Малайзии похожую игрушку считают давно известной забавой местных племен, до сих пор живущих в джунглях изолированно от европейской цивилизации.

В 1974 году я ездил по деревням Архангельской области, разыскивая старинные северные головоломки. В селе Конёве в одном из домов среди старых вырезанных из дерева игрушек мне попалась незнакомая головоломка, сплетенная из ивовой лозы. Одна из четырех петель у нее была сломана, но я сохранил этот экземпляр, изготовленный не менее 50 лет назад.

На фотографиях на обложке журнала представлены и малайзийская, и архангельская головоломки. Изготовьте аналогичную игрушку и постарайтесь отцепить веревочную

петлю от центрального стержня, воспользовавшись приведенной схемой с промежуточными этапами решения.

Однако существует и более интересный путь – научиться самостоятельно быстро и без подсказки снимать и надевать веревочную петлю, а попутно пополнить свою коллекцию сразу несколькими головоломками. Для этого приготовьте жесткие проволочные петли и стержень, но не торопитесь скреплять их друг с другом. Сначала соедините только две петли и стержень. В результате вы получите первый, самый простой вариант головоломки. Освоив вариант с двумя петлями, добавьте в головоломку третью и потренируйтесь в ее решении. Наконец, закрепив четвертую петлю, вы получите классическую головоломку, решить которую сможете самостоятельно.

Наращивать количество петель в изготовленной вами модели можно и далее, но лучше сделать несколько вариантов головоломок возрастающей трудности – с двумя, четырьмя, шестью и даже с восемью жесткими петлями.

Желаем успеха!

А.Калинин

Задачи

1. Можно ли расставить числа от 1 до 15 в клетках таблицы 3×5 так, чтобы во всех строках суммы чисел были одинаковы, и во всех столбцах суммы чисел были одинаковы?

В.Доценко



2. За круглым столом сидят 31 человек. Часть из них — рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут, причем лжецов не менее одного. Каждого спросили: «Сколько среди твоих соседей лжецов?» (имеются в виду сосед слева и сосед справа). Все дали одинаковые ответы. Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться за столом?

Д.Калинин



3. К некоторому натуральному числу прибавили 2008, затем к результату снова прибавили 2008, и так далее. Обязательно ли в какой-то момент получится число, начинающееся на 1?

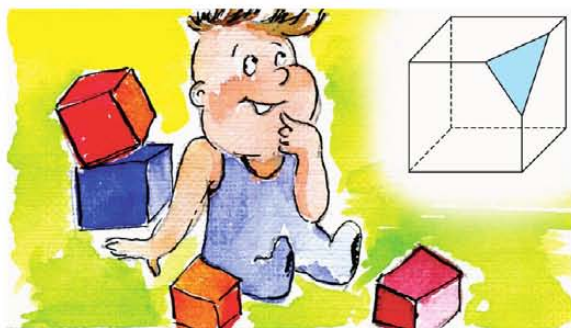
С.Дориченко

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



4. Можно ли отпилить от кубика $10 \times 10 \times 10$ уголок так, чтобы срез имел форму треугольника со сторонами 2, 3, 4?

А.Шень



5. Имеются шесть гирь, массы которых равны 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г и 6 г. На каждой гире надписана масса в граммах, но надписи возможно перепутаны. Как за два взвешивания на чашечных весах выяснить, есть ли среди надписей неправильные (не важно, какие именно)?

С.Токарев



Иллюстрации Д.Гришуковой

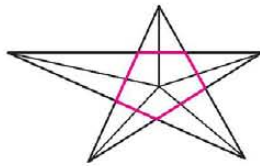
Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64–А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. Имеются 11 гирь, массы которых равны 1 г, 2 г, 4 г, ..., 1024 г. На каждой гире надписана масса в граммах, но надписи возможно перепутаны. Как за 10 взвешиваний на чашечных весах выяснить, есть ли среди надписей неправильные (не важно, какие именно)? Удастся ли сделать это за 9 взвешиваний?

К.Шрамов



7. В «неправильной» пятиконечной звезде биссектрисы углов при вершинах пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектрисы углов внутреннего пятиугольника пересекаются в одной точке.

Фольклор

8. Назовем натуральное число a *хорошим*, если найдется прямоугольный треугольник с целыми сторонами, одна из сторон которого равна a . Найдите все хорошие числа.

Е.Поршнев

9. Докажите, что через точку пересечения медиан треугольника нельзя провести прямую, которая делила бы его площадь в отношении 2:1.

В.Доценко

10. Концами пятидесяти отрезков на числовой прямой являются все натуральные числа от 1 до 100. Длина каждого отрезка кратна пяти, а сумма всех длин равна 2500. Докажите, что отрезки можно разбить на пять десятков так, что в каждом десятке сумма длин отрезков будет равна 500.

В.Произволов

Летний турнир имени А.П.Савина «Математика 6–8»

В выпуклом многоугольнике сумма тупых углов равна 2008° . Сколько сторон у этого многоугольника?

А.Шаповалов

С 26 июня по 2 июля 2008 года под городом Судиславлем Костромской области состоялся летний турнир математических боев имени А.П.Савина. Это уже 14-й такой турнир, и популярность его растет с каждым годом. Организаторами турнира выступили образовательная программа «Большая перемена» (директор Г.В.Кондаков) и база отдыха «Берендеевы поляны». Лишь размеры базы вынудили организаторов ограничиться 32 командами 6–9 классов. Кроме москвичей, составивших львиную долю команд, в турнире приняли участие команды из Иванова, Кирова, Костромы, Ленинградской области, Магнитогорска, Харькова и Черногловки. Команды были разделены на 5 лиг: четыре основные лиги по классам и еще одна лига, объединившая четыре оставшиеся команды 6 и 7 классов.

В первый день для разминки была проведена новая математическая игра «Абака»¹, вызвавшая большой интерес у школьников.

Во второй день у старших школьников начались круговые турниры матбоев (5 туров), у младших прошла устная командная олимпиада для разделения на лиги, а 4 тура матбоев начались со следующего дня.

В лиге 9 классов интрига сохранялась до последнего: сборные Магнитогорска (руководитель Н.С.Никифорова), Костромы (руководитель Д.А.Калинин) и «Квантик-1» из Москвы (руководитель И.А.Николаева) выиграли друг у друга по кругу и победили остальные 3 команды. Блиц-бой вывел на первое место Кострому, на 2-е — «Квантик-1», оставив Магнитогорск на 3-м месте. В лиге 8 классов борьба была менее острой: с заметным отрывом, выиграв все бои, победила команда «Эврика» из Харькова (руководитель А.Л.Берштейн), 2-е и 3-е места — у московских

¹См. об этом статью К.Кнопа «Абака для математиков» в газете «Математика» («Первое сентября») № 16/2008.

команд «Л2Ш» (т.е. лицей «Вторая школа», руководитель А.Г.Кондакова) и гимназии 1514 (руководитель Л.О.Бычкова). В лиге 7 классов диплом I степени достался команде «Москва-Юг» (руководитель Т.П.Зорина), дипломы II степени — командам Кирова (руководитель Н.Н.Франчески) и «2007-Б» из Москвы (руководитель Д.В.Прокопенко), дипломы III степени — командам Ленинградской области (руководитель С.П.Павлов) и «2007-А» из Москвы (руководитель О.Е.Данченко). В лиге 6 классов диплом I степени выиграла команда Кирова (руководитель М.А.Прокашева), дипломы II степени — команды «Кострома 6-6-6» (руководитель Н.Л.Чернышев) и «Интеллектуал» из Москвы (руководитель Н.М.Нетрусова), дипломы III степени — команды «Эврика-1» и «Эврика-2» из Харькова (руководитель Е.Л.Аринкина).

Один из дней в середине турнира был отдан под личную устную олимпиаду. Участнику выдавался листочек с тремя задачами. Решив одну, участник получал второй листочек с еще тремя задачами. Решив задачу из второго листочка, участник получал последний, третий листочек с еще тремя задачами. Ученики 6–7 классов решали одни и те же задачи, но с раздельным зачетом. Аналогично проходила личная олимпиада и для учеников 8 и 9 классов.

Призеры личной олимпиады

Гран-при завоевали семиклассник *Всеволод Гулин* («Эврика», Харьков), опередивший всех в олимпиаде для старших на 2 задачи и разделивший первое место в олимпиаде для младших, и шестиклассница *Юлия Гребенникова* («Интеллектуал», Москва), опередившая своих сверстников на одну задачу.

Дипломы I степени получили

Глухов Евгений — Кострома, 9 кл.,
Николаев Семен — Москва, «Квантик-1», 9 кл.,
Бурова Ольга — Москва, «Л2Ш», 8 кл.,
Лисичкин Сергей — Харьков, «Эврика», 8 кл.,
Сандрикова Мария — Москва, школа 218, 7 кл.,
Синяков Лев — Москва, «Москва-Юг», 7 кл.,
Любчик Евгений — Харьков, «Эврика-2», 6 кл.,
Зверев Иван — Москва, «Москва-Юг», 6 кл.

Дипломы II степени получили

Зиборов Артем — Москва, школа 218, 9 кл.,
Ноздрин Михаил — Магнитогорск, 9 кл.,
Пастух Денис — Москва, школа 218, 9 кл.,
Яцкевич Максим — Москва, гимназия 1514, 9 кл.,
Вилкул Даниил — Москва, «Л2Ш», 8 кл.,
Матвеевский Дмитрий — Харьков, «Эврика», 7 и 8 кл.,
Логвинов Сергей — Москва, «Москва-Юг», 7 кл.,
Баев Будимир — Москва, «Фрактал», 6 кл.,
Бакунов Никита — Харьков, «Эврика-2», 6 кл.,
Горбунов Дмитрий — Москва, «Интеллектуал», 6 кл.

Дипломы III степени получили

Абрамян Левон — Магнитогорск, 9 кл.,
Деревицкий Иван — Магнитогорск, 9 кл.,
Ланина Наталья — Москва, «Квантик-1», 9 кл.,
Яцкевич Максим — Москва, гимназия 1514, 9 кл.,

Топеха Артур — Москва, «Квантик-2», 9 кл.,
Завадский Дмитрий — Ленинградская область, 8 кл.,
Циглер Александр — Магнитогорск, 8 кл.,
Шолохов Александр — Иваново, 8 кл.,
Виноградов Алексей — Москва, гимназия 1514, 7 кл.,
Котельникова Дарья — Киров, 7 кл.,
Мирский Алексей — Москва, «Интеллектуал», 7 кл.,
Рахматулин Ян — Киров, 7 кл.,
Жабрëв Илья — Ленинградская область, 6 кл.,
Калашников Вадим — Харьков, «Эврика-1», 6 кл.,
Князева Алиса — Харьков, «Эврика-2», 6 кл.,
Корякин Данил — Киров, 6 кл.,
Мальгин Виталий — Киров, 6 кл.,
Мизюк Соломия — Москва, школа 2007, 6 кл.,
Сиротина Анастасия — Москва, школа 2007, 6 кл.

Почетными дипломами отмечены

семиклассники: кировчане *Никита Козицын* и *Роман Маракулин*, москвичи *Ирина Булушева*, *Артем Закиров* и *Сергей Рафаэлов* (все из школы 2007), *Денис Булейко* (гимназия 1514), *Наталья Остроухова* (школа 218) и *Мария Щербакова* («Фрактал»).

Книги и другие призы для победителей предоставили редакция журнала «Квант», компания «Яндекс» и Фонд математического образования и просвещения.

Отбором задач и составлением вариантов занималась методическая комиссия турнира: А.Л.Берштейн, М.А.Берштейн, А.Д.Блинков, Ю.А.Блинков, А.С.Горская, Н.Гребеник, С.А.Дориченко, А.Ефремов, Д.А.Калинин, П.Мартынов, К.Матвеев, Д.В.Прокопенко, В.А.Сендеров, А.Б.Скопцов, К.Скопцов, С.И.Токарев, А.В.Шаповалов.

Избранные задачи турнира

По традиции, идущей еще от первых турниров, большинство задач турнира были новыми и авторскими. Из них мы постарались выбрать такие, где есть пусть маленькое, но чудо: из условий следует чуть-чуть больше, чем можно ожидать, или в решении есть неожиданный поворот и краткость.

У каждой задачи указано, для каких классов она наиболее подходит и кто ее автор. Звездочками отмечены трудные задачи, двумя звездочками — особо трудные.

1 (6–7). На поверхности кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ отмечены несколько точек так, что в каждом из 54 квадратов, включая его границу, отмечена ровно одна точка. Какое наименьшее число точек может быть отмечено?

А.Шаповалов

2 (6–7). Дано натуральное число, у которого все цифры, кроме одной, нечетные. Может ли оно делиться на 2008?

С.Токарев

3 (6–8). В однокруговом волейбольном турнире участвовали 14 команд. *Интересной* назовем команду, выигравшую нечетное число матчей, а *особенной*



— команду, выигравшую нечетное число матчей у интересных. Докажите, что число особенных команд четно.

С.Токарев

4 (6–8). Двум игрокам выдано по карточке с числами a и b из набора, где $1, 2, \dots, 10$ встречаются по разу. Каждый видит только свое число. Игроки Первый и Второй по очереди называют числа, каждое должно быть больше предыдущего и заведомо (для называющего) делить $\text{НОК}(a, b)$. Кто не смог сделать ход — проиграл. Есть ли такая карточка, получив которую Первый может быть уверен в выигрыше?

А.Шаповалов

5 (6–9). Какое наименьшее число слонов можно расставить на доске $2N \times 2N$ так, чтобы каждое свободное поле было побито ровно один раз?

А.Шаповалов

6 (6–9). На шахматную доску по одной выставляются ладьи так, чтобы каждая выставленная побила (на момент выставления) четное число пустых полей. Какое наибольшее число ладей можно выставить?

А.Шаповалов

7** (6–9). Можно ли поверхность куба оклеить без перекрытий тремя одинаковыми пятиугольниками?

С.Токарев

8* (7–8). В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 85^\circ$, $\angle B = 115^\circ$, $AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M . Найдите $\angle MAB$.

А.Шаповалов

9 (7–8). Натуральное число n можно заменить на одно из следующих 6 чисел: $3n$, $3n + 1$, $3n + 2$, $n/3$, $(n + 1)/3$, $(n + 2)/3$ при условии, что получающееся число — целое. Докажите, что с помощью таких операций из любого натурального числа можно получить любое.

Л.Смирнова

10 (7–8). Корень n -й степени из n -значного числа равен сумме цифр этого числа ($n > 1$). Найдите все значения, которые может принимать этот корень.

С.Шестаков

11 (7–8). Даны два равных прямоугольника $ABCD$ и $AEFG$ ($AB = AE$, $AD = AG$) таких, что точка G лежит на отрезке BC . Точка P — пересечение отрезков FG и CD . Докажите, что отрезки PB и PE равны.

Д.Калинин

12 (7–9). За круглым столом сидят 2000 рыцарей, которые представляют 999 рыцарских орденов, причем каждый орден кем-нибудь представлен. Среди любых 1000 подряд сидящих рыцарей есть представители не более чем 500 орденов. Сколько рыцарей первого ордена присутствует за круглым столом? Найдите все возможные ответы и покажите, что других нет.

К.Матвеев

13 (7–9). Существуют ли ненулевые целые числа $x_1, x_2, \dots, x_{2008}$ такие, что

$$x_1 x_2 \dots x_{2008} = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \dots (x_{2008} + x_1)?$$

С.Токарев, В.Сендеров

14 (7–9). Дан клетчатый квадрат $n \times n$, в котором стерли все клетки выше главной диагонали. В каждой клетке оставшейся фигуры записывают 0 или 1, при этом если в какой-то клетке написана единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху также должна стоять единица. Сколькими способами это можно сделать?

А.Горская

15 (7–9). Диаметр треугольника назовем длину его наибольшей стороны. Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника одинакового диаметра.

А.Шаповалов

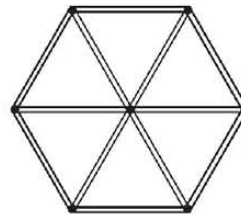
16 (7–9). Дана таблица из 40 строк и 20 столбцов. В первом столбце закрашена самая нижняя клетка, во втором столбце закрашены 3 нижние клетки и т. д.; в 20-м столбце закрашены 39 нижних клеток. Два игрока по очереди ставят ладьи в закрашенные клетки так, чтобы ладьи не били друг друга. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник?

К.Матвеев

17* (7–9). Натуральное число N равно произведению первых l простых чисел. Докажите, что любое натуральное число, меньшее N , может быть представлено как сумма нескольких различных натуральных делителей N .

К.Матвеев

18* (7–9). В системе коридоров, показанной на рисунке, расстояние между каждыми двумя соседними развилками одно и то же. По коридорам бегают мышка, способная развивать скорость до 7 м/с. За мышкой согласо-



(Продолжение см. на с. 34)

Переходы тел в свет и света в тела подчиняются законам Природы, которая, как кажется, забавляется этими превращениями.

Исаак Ньютон

Свет, падающий на тело, разделяется на две части, из которых одна отражается от его поверхности (рассеивается)...

Джон Тиндаль

Интенсивность рассеянного света пропорциональна четвертой степени частоты световой волны или обратно пропорциональна четвертой степени длины волны.

Джон Уильям Рэлей

Этот пепел, долго плавающий в атмосфере, обусловил синеватый цвет солнца и луны в Африке и на островах

Тихого океана и замечательные красные зори в конце 1883 и в начале 1884 года, наблюдавшиеся по всей земле.

Владимир Обручев

Если значение слова «свет» понимать более широко (а есть все основания подразумевать под ним также все разнообразные виды излучений...), тогда свет можно рассматривать как мощное средство передачи из одного места вселенной в другое... энергии...

Уильям Генри Брэгг

...голубой свет рассеивается значительно интенсивнее, чем красный свет. И, взглянув на небо, мы видим только изумительную синеву!

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомо вам распространение света?

Во-первых, как и было обещано в предыдущем выпуске «Калейдоскопа», мы продолжим обсуждение волновых явлений. Во-вторых, следуя Брэггу, мы распространим понятие «свет» на всевозможные электромагнитные волны, хотя, безусловно, главенствующую роль оставим за видимым светом. В-третьих, аналогично прошлому разу, сосредоточимся прежде всего на процессах рассеяния и поглощения. Оказывается, даже при таком ограничении рамки нашей рубрики не способны вместить и малую толику из всего многообразия вопросов, связанных с всеволновой оптикой.

Действительно, мы соприкасаемся с ними в быту и на отдыхе, в медицине и искусстве, в науке и технике. Рассеиваясь и поглощаясь, световые волны пронизывают вокруг все и вся — подбираем ли мы краски для ремонта или для написания картин, пытаемся ли объяснить атмосферные или астрономические явления, выбираем ли посуду для приготовления пищи, ищем ли способы исследования вещества или решаем проблемы передачи информации.

Тем не менее, найденные учеными общие закономерности волновых явлений позволяют успешно справиться как с повседневными бытовыми затруднениями, так и с фундаментальными научными препятствиями. А в награду за их преодоление оптика дарит порой такое эстетическое наслаждение и такой эмоциональный подъем, что скрыть их не в силах и выдающиеся рациональные умы.

Ну что ж, попробуем *рассеянных* обратить в тех, кто будет *поглощен* этой темой.

Вопросы и задачи

1. Почему грязный, в частности покрытый копотью, снег тает быстрее, чем чистый?

2. Для чего внутренние стенки оптических приборов покрывают черной краской?

3. Почему блестит начищенный кожаный сапог?

4. Зачем картины, написанные масляными красками, часто покрывают слоем лака?

5. Что лучше рассеивает свет — наждачная или чертежная бумага?

6. Если на лист белой бумаги попадет растительное масло, то она становится прозрачной, так что через нее можно даже прочесть текст, напечатанный с другой стороны листа. Как это объяснить?

7. Почему почва, бумага, дерево, песок кажутся более темными, если они смочены водой?

8. Радиоволны отражаются от металлической крыши зеркально, а свет при отражении от этой же крыши сильно рассеивается. Отчего?

9. Для чего врачи-рентгенологи пользуются при работе перчатками, фартуками и очками, в которые введены соли свинца?

10. Почему электрические лампочки накаливания зачастую окружают матовым плафоном?

11. Как объяснить тот факт, что раскаленная нить накала лампочки имеет красный оттенок при наблюдении через матовую поверхность плафона?

12. Отчего в отсутствие облаков предметы в тени солнца, например на белом снегу, или при наступлении сумерек приобретают голубоватый цвет?

13. Снег белый и непрозрачный, хотя состоит из мелких бесцветных кристалликов льда, а чистая вода прозрачна, однако туман и облака, представляющие собой мелкие капли воды, непрозрачны. Почему?

14. Отчего в мелких местах морская вода нередко приобретает зеленый цвет?

15. Почему на фоне деревьев дым костра кажется

синим, а над верхушками деревьев (на фоне светлого неба) он выглядит желтовато-красным?

16. В парниках температура заметно выше, чем у окружающего воздуха, даже в отсутствие отопления и удобрений. Как это объяснить?

17. Почему в микроволновой печи можно жарить мясо?

18. Какой цвет имеет Земля при наблюдении из космоса и почему?

19. Отчего на Луне небо черное, а на Марсе имеет красноватый оттенок?

20. Почему по мере подъема звезды над горизонтом она становится ярче?

21. Наблюдаются ли сумерки на Луне?

22. На фотографиях Луны рядом с Землей, полученных с борта межпланетных станций, Земля выглядит очень яркой, а Луна — довольно темной. Почему?

23. Отчего радиоастрономы могут проводить наблюдения ночью и днем, а астрономы-оптики — только ночью?

Микроопыт

Разотрите несколько кристалликов медного купороса в мелкий порошок. Что произойдет с цветом кристалликов? Почему?

Любопытно, что...

...для объяснения голубизны неба уже сотни лет назад выдвигалось немало гипотез. Например, ее трактовали как смешение в определенных долях «света и тьмы», допускали, что частицы воздуха окрашены в голубой цвет либо они люминесцируют под действием солнечного света. Великий поэт Гёте, проявивший интерес к теории возникновения цветов, раскритиковал Ньютона за то, что и он не дал ответа на этот вопрос.

...Тиндаль, обнаружив поглощение инфракрасных лучей углекислым газом, поставил опыт, в котором пропускал эти лучи через трубку, заполняемую выдыхаемым воздухом. Наблюдаемое и в этом случае поглощение стало убедительным оптическим доказательством известного теперь всем факта, что человек выдыхает углекислый газ.

...с легкой руки Рэлея долгое время считалось, что рассеяние солнечных лучей происходит на молекулах газов, и только в 1940 году академик Л.И.Мандельштам преодолел это заблуждение, показав, что в действительности рассеивателями являются неоднородности плотности воздуха.

...даже сажа и платиновая чернь — наиболее черные из известных красок — не поглощают полностью все падающее на них излучение, рассеивая из него около 1–2%. Самые же лучшие белила рассеивают 91% падающего на них света, а свежевыпавший снег — лишь 80%.

...при вулканических извержениях и крупных лесных пожарах атмосфера насыщается аэрозолями, состоящими из частиц таких размеров, что на них свет длинноволновой части спектра рассеивается сильнее, чем коротковолновой. При наблюдении

сквозь такой аэрозоль Луна и Солнце становятся синими, что и зафиксировал русский геолог В.А.Обручев после катастрофического извержения вулкана Кракатау.

...одно из важнейших преимуществ оптоволоконной связи заключается в столь ничтожном затухании сигнала, что расстояние между ретрансляторами может достигать 100–200 километров — многократно больше, чем в обычных проводных линиях. Успехи в технологии изготовления волокон позволили вплотную подойти к теоретическому пределу потерь, обусловленную не дефектами вещества, а рэлеевским рассеянием и поглощением света атомами, из которых состоит волокно.

...несколько Нобелевских премий по физике в начале XX века были присуждены за разработку метода рентгеноструктурного анализа, благодаря которому, например, удалось расшифровать строение сложных кристаллов. Сегодня, исследуя рассеянное и поглощенное образцами рентгеновское излучение, можно детально установить химический состав вещества или наблюдать за динамическими изменениями структуры белков.

...попытки использовать связь между оптическими и акустическими явлениями предпринимались еще в XIX веке и привели к тому, что в 1880 году независимо в трех разных лабораториях — Белом, Тиндалем и Рентгеном — был открыт фотоакустический эффект, заключавшийся в преобразовании модулированного светового потока в звук.

...благодаря лазерам с перестраиваемой частотой стало возможным преобразовывать слабые инфракрасные сигналы в видимый диапазон. Это нашло применение при наблюдении за астрономическими объектами, поскольку чувствительность используемых там фотоприемников в оптическом диапазоне на несколько порядков превышает ее же в инфракрасном диапазоне.

...мелкая космическая пыль не только ослабляет доходящий до нас свет звезд, но и меняет их цвет. Сильнее всего пылью поглощаются синие лучи, что приводит к покраснению света, прошедшего через межзвездную среду.

Что читать в «Кванте» о распространении света

(публикации последних лет)

1. «Небо синее, Солнце красное» — 2003, № 1, с. 37;
2. «Угол падения равен...» — 2005, № 1, с. 31;
3. «Калейдоскоп «Кванта» — 2005, № 5, с. 32;
4. «Прогулки с физикой» — 2006, Приложение № 6, с. 117, 177;
5. «Радиоволны на земле и в космосе» — 2007, Приложение № 1, с. 61, 127;
6. «Лазер — замечательное достижение XX века» — 2007, № 3, с. 8; 2007, № 4, с. 2;
7. «Сюрпризы зеленого стекла» — 2007, № 5, с. 10.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 29)

ванно охотятся две кошки, могущие развивать скорость до v м/с. Все животные в каждый момент знают месторасположение друг друга. При каком наименьшем значении v кошки могут (независимо от начальных положений) гарантированно поймать мышку?

С.Токарев

19 (8–9). Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ делится на $a + b + c$.

В.Произволов, В.Сендеров

20 (8–9). Может ли $(n-1)!$ делиться на n^{2008} для какого-нибудь целого $n > 1$?

В.Сендеров

21 (8–9). Даны 9 чисел $a_1, a_2, \dots, a_9$. Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ ($i \neq j$) как минимум 29 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_9$ — целые.

А.Шаповалов

22 (8–9). Пусть $x, y, z \geq 0$. Докажите неравенство $(x+y-z)^n + (y+z-x)^n + (z+x-y)^n \geq x^n + y^n + z^n$.

В.Произволов, В.Сендеров

23 (8–9). Докажите, что $\sqrt[n]{2} > \frac{2n}{2n-1}$ при целом $n > 1$.

В.Сендеров

24 (8–9). Для каких x найдутся такие (не обязательно целые и не обязательно положительные) числа $x_1, x_2, \dots, x_{2008}$, что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2008} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{2008}} = x?$$

В.Сендеров

25 (8–9). К окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , проведены касательные в точках A и C , пересекающиеся в точке P . Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC , M — середина стороны AC , H — ортоцентр треугольника ABC . Прямая MH пересекает A_1C_1 в точке K . Докажите, что точки P, B, K лежат на одной прямой.

Ю.Блинов

26 (8–9). Две окружности пересекаются в точках A и B . Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA , которая пересекает вторую окружность в точке Y . Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника BXY .

Ю.Блинов

27 (8–9). В трапеции $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке O , известны основание AD , а также углы A, D и AOD . С помощью циркуля и линейки постройте эту трапецию.

Д.Калинин

28 (8–9). Двое играющих по очереди ломают палку:



первый — на две части (возможно, неравные), второй — одну из получившихся частей на две, первый — одну из трех частей на две, и так далее. Выигрывает тот, кто сможет после какого-то из своих ходов выбрать из всех имеющихся частей 4 палки, длины которых образуют арифметическую прогрессию. Кто из игроков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

А.Шаповалов

29 (8–9). На клетчатую доску 100×100 выставлены короли двух цветов так, что черные не бьют белых и черных королей не больше, чем белых. Каково наибольшее возможное число черных королей?

О.Крижановский, А. Шаповалов

30* (8–9). Дан выпуклый многоугольник. Пусть r — количество способов разбить его непересекающимися диагоналями на четное число многоугольников, а n — на нечетное. Докажите, что $|r - n| = 1$.

А.Клячко

31* (8–9). Докажите, что любой треугольник можно циркулем и линейкой разбить на 4 меньших треугольника так, чтобы 4 точки пересечения медиан меньших треугольников лежали на одной окружности.

А.Шаповалов

32* (8–9). Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями Ватсон и на 20% быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий — через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?

А.Шаповалов

33* (8–9). Многоугольник (не обязательно выпуклый) удалось разрезать на 2008 меньших равных многоугольников, подобных исходному. Обязательно ли исходный многоугольник — параллелограмм?

А.Шаповалов

Публикацию подготовил А.Шаповалов
Фотографии предоставил Д.Калинин

И тележка в гору едет...

С. СЕМИКОВ

КТО ИЗ НАС НЕ МЕЧТАЛ ИМЕТЬ САНКИ, КОТОРЫЕ, СЪЕХАВ С ГОРЫ, КАК ПО ПУЧЬЕМУ ВЕЛЕНЬЮ САМИ БЫ ВЗБИРАЛИСЬ НАВЕРХ. Но, оказывается, катки, способные самостоятельно въезжать в горку, все же бывают.

Каток — это выточенный, например из оргстекла, биконус, т.е. два одинаковых конуса, сложенных основаниями, а горка — это две одинаковые скошенные рейки, ребром поставленные на стол под углом друг к другу (рис.1). В зависимости от этого угла и от угла скоса реек каток, поставленный на рейки, словно на рельсы, либо скатится, либо въедет в горку, а может и остаться на месте. Не имея опыта, трудно угадать, как именно он себя поведет.

Эту нехитрую установку можно собрать и дома. Каток легко сделать из двух одинаковых пластиковых бутылок, срезав у них конические верхушки, которые потом скрепляются клеем либо трубкой, пропущенной через горлышки (рис.2). А деревянные рейки можно заменить вырезанными из картона. Каток поменьше можно собрать из двух навинчивающихся наконечников от гелиевых ручек.

Если поэкспериментировать с собранной установкой, меняя катки и углы реек, могут возникнуть два вопроса. Во-первых, почему каток способен как скатываться с горки, так и заезжать на горку? А во-вторых, как найти то переломное, критическое соотношение параметров установки, при достижении которого каток, положенный на горку, замирает?

Внимательно наблюдая за экспериментом, можно заметить, что даже если каток едет вверх по горке, он в действительности опускается. Ведь в отличие от цилиндров или санок, съезжающих с горы, у катка расстояние до опоры меняется. Так, по мере продвижения катка в гору просвет между рейками расширяется, и каток опирается на них все более узкими частями, катится по все меньшему радиусу, приближаясь осью к рейкам. В зависимости от

того, что меняется быстрее — высота реек или соответствующее ей снижение катка, каток поедет вверх или вниз. Каток всегда стремится опуститься — занять состояние с наименьшей потенциальной энергией, как сказал бы физик. Если же высота центра тяжести не меняется, т.е. поднятие по рейке компенсируется таким же опусканием катка, то он стоит на месте. Отсюда легко найти то самое критическое соотношение параметров установки.

Очевидно, что параметров, способных влиять на исход опыта, только три — угол 2α между рейками, угол β их скоса и угол γ конусности катка, составляемый образующей конуса с его осью. Если каток пройдет вдоль рейки расстояние l , точка его опоры K поднимется на $l \tan \beta$, при этом точки опоры катка разойдутся от его средней плоскости (от общего основания конусов) на $b = l \sin \alpha$, а радиус качения уменьшится на $b \tan \gamma = l \sin \alpha \tan \gamma$ (рис. 3).

Итак, поднятие опоры катка на $l \tan \beta$ из-за въезда в горку сопровождается его опусканием на $l \sin \alpha \tan \gamma$ из-за сближения оси O с рейкой. Если первое больше второго, то каток съезжает, если меньше — катится в гору, если же эти изменения высоты компенсируют друг друга, то высота центра катка не меняется. Иными словами, если выполнено критическое соотношение $\tan \beta = \sin \alpha \tan \gamma$, каток не пойдет ни вверх, ни вниз по горке — ему безразлично, куда ехать и где находиться.

Однако энергетические соображения позволяют лишь узнать исход опыта, сказать, как поведет себя каток, но не объясняют *почему*. Поэтому лучше рассмотреть действующие на каток силы. Ведь движение санок с горы вниз обычно объясняют не тем, что это им выгодно энергетически, а тем, что их притягивает земля. Цилиндр катится с горки не потому, что знает где «лучше», а из-за того, что действующая на него сила тяжести G создает соответствующий вращательный момент относительно точки опоры. Для цилиндра, как легко видеть, точка касания K всегда лежит по отношению к горе выше его центра тяжести O , поэтому момент направлен так, что цилиндр катится вниз (рис. 4). У катка же точка K может находиться ближе к началу горки или под центром тяжести; соответствен-

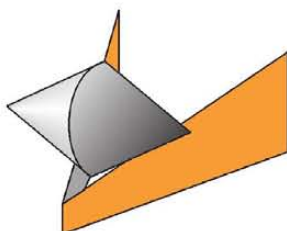


Рис. 1

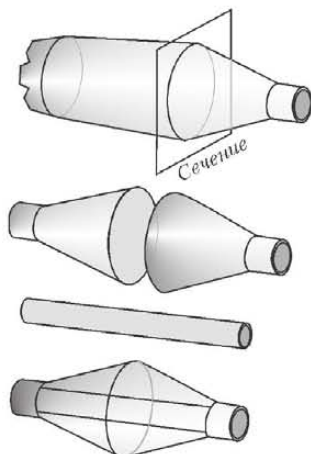


Рис. 2

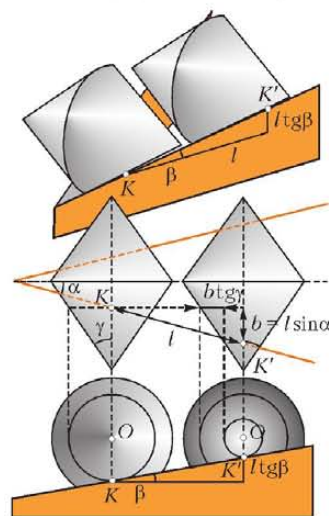


Рис. 3

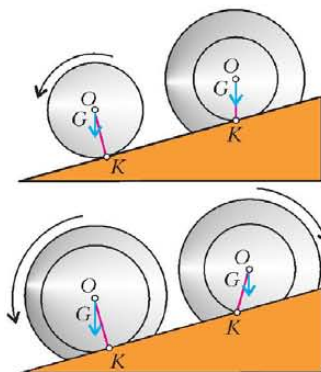


Рис. 4

но, момент направлен так, что каток поедет вверх или останется недвижим. (Это напоминает известный опыт с катушкой, которая в зависимости от угла, под которым мы тянем намотанную на нее нить, катится к нам или от нас.)

Итак, чтобы каток находился в покое, точка касания K должна лежать точно под осью O конуса, т.е. перпендикуляр KO к оси конуса должен быть вертикален. Значит, угол, образованный рейкой-касательной и прямой KO , должен быть равен $90 - \beta$. Отсюда из геометрии конуса легко прийти к тому же соотношению $\operatorname{tg} \beta = \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$, при котором каток остается неподвижен. Меняя один из углов, мы смещаем точку K . Соответственно, для биконуса горка оказывается «горизонтальной» либо наклонной «выравно» или «влево».

Теперь, когда ясен смысл критического соотношения, его можно не только проверить на практике, измерив транспортиром все углы, но и применить для видоизменения опыта. Так, становится ясно, что не обязательно использовать каток, имеющий вид биконуса типа «поплавок», т.е. конусы можно соединить не только основаниями, но и вершинами — получим биконус типа «катушка». Это будет соответствовать изменению угла γ на $-\gamma$. Значит, надо сменить и знак угла β — чтобы рейки соединялись уже не узкими, а широкими концами.

Иллюзию поднятия катка вверх по горке можно усилить, если сделать угол β большим — градусов в 45. Понятно, что одновременно надо увеличить углы α и γ , так что в итоге каток станет больше похож на две сложенные вместе тарелки. Или можно попробовать сделать опускание центра тяжести малозаметным, для чего надо предельно уменьшить угол α , чтобы рейки выглядели почти параллельными, а угол γ , напротив, сделать большим. А чтобы размер катка был не слишком велик и его конусность не бросалась в глаза, надо оставить только его концевые части, катящиеся по рейкам как колеса вагонов по рельсам. Поэтому конусные колеса должны соединяться не основаниями или вершинами, а общей осью. Если теперь присоединить проволокой пару таких колесных осей (а проще — пару простых катушек) к коробку, получится настоящая тележка-самокатка, способная ехать в гору, с которой другие предметы (цилиндры и бруски) съезжают. Такая тележка кажется чудом — столь сложно у нее заметить снижение центра масс при въезде в горку. Если же соединить колеса с тележкой жестко и смазать «рельсы», можно получить и сани, «въезжающие в гору».

Теперь можно рассмотреть и более сложные варианты. Что будет, если мы изогнем картонные рейки так, что угол



Рис. 5

α будет изменяться вдоль горки (рис.5)? Если угол α нарастает, то каток будет выше некоторой критической точки закатываться вверх, а ниже ее — спускаться вниз, т.е. будет всегда удаляться от этой точки. Если же картонные рейки постепенно сходятся и угол α уменьшается, каток будет всегда стремиться к точке с критическим углом α . Доехав до нее, он станет, как в яме, кататься туда-сюда, пока не замрет в этой точке.

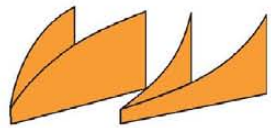


Рис. 6

Другой вариант — это когда рейки плоские (угол α постоянен), зато меняется угол β — гора меняет наклон (рис.6). На ней тоже будет критическая точка при неко-

тором угле β , являющаяся точкой устойчивого равновесия катка, смотря по тому вогнута горка или выпукла.

Наконец, третий вариант — углы α и β постоянны, но меняется угол γ . Такое возможно, если мы используем каток не из конусов, а из других тел вращения, имеющих криволинейную образующую.

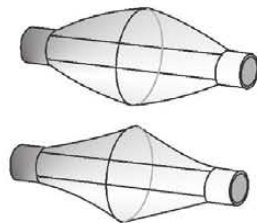


Рис. 7

Например, каток, сделанный из двух пластиковых бутылок не с конусной, а с закругленной верхушкой (рис.7). Также можно использовать вместо конических скругленные наконечники от ручек или же шарики для пинг-понга. Для каждого из таких катков есть свое определенное критическое место на горке, в точке контакта с которым угол γ равен критическому. Положенный выше этого места каток катится вверх, а ниже — вниз. Для того чтобы эта точка служила местом устойчивого равновесия, необходимо применять катки с вогнутой поверхностью.

Возможны и сложные комбинации всех трех вариантов.

Но может ли все это иметь практическое применение? Нельзя ли, к примеру, построить железную дорогу, идущую «под гору» в обе стороны, чтобы поезд сам по себе, без затрат энергии, мог доехать туда и обратно? Казалось бы, достаточно уложить рельсы наподобие наклонных расходящихся реек и сделать поезду два комплекта колес — одни с углом γ , большим критического, другие — с меньшим. Доехал поезд до конечной станции, сменил ему колеса, и он сам пойдет назад. А как доедет, ему снова сменят колеса, и он тронется в обратный путь.

Конечно, такой поезд, сам идущий в оба конца, невозможен, как и любой вечный двигатель. Это ясно из энергетических соображений. Раз центр масс всегда опускается, то, чтобы поезд сам шел туда и обратно, на конечных станциях придется либо поднимать его, затрачивая при этом энергию, либо уменьшать размеры колес, пока они не станут нулевыми.

Так что каких чудо-паровозов и едущих в гору тележек ни выдумывай, все равно обнаружится какой-нибудь обман.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvantinfo

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

ceemat.ru

Механический генератор

В.ДРОЗДОВ

ВО МНОГИХ ЗАДАЧНИКАХ ПО ФИЗИКЕ МОЖНО ВСТРЕТИТЬ такую задачу: «Сплошной металлический цилиндр радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найдите зависимость напряженности электрического поля от расстояния r до оси цилиндра и разность потенциалов между поверхностью цилиндра и его осью».

Сначала приведем решение этой задачи в общем виде. Поскольку внутри металлического цилиндра имеются свободные электроны, при его вращении они будут отбрасываться к краям цилиндра. В результате вблизи оси концентрация электронов понизится, а на краях — повысится, т.е. внутри цилиндра возникнет электрическое поле, направленное от оси к периферии. Равновесие установится тогда, когда образовавшееся поле E будет в состоянии подействовать на каждый электрон с такой силой, чтобы он двигался по окружности с угловой скоростью ω .

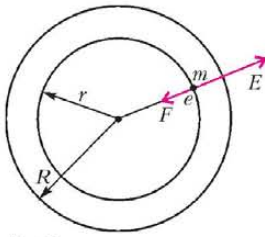


Рис. 1

Пусть некий электрон движется по окружности радиусом r , $0 < r < R$ (рис. 1). Тогда по второму закону Ньютона имеем

$$m\omega^2 r = Ee,$$

где m — масса, e — заряд электрона. Отсюда находим

$$E = \frac{m\omega^2}{e} r.$$

Понятно, что векторы силы $\vec{F}$, действующей на электрон, и напряженности электрического поля $\vec{E}$ направлены противоположно.

Видим, что возникшее электрическое поле неоднородно, оно растет пропорционально расстоянию r от оси цилиндра. Так как вектор $\vec{E}$ всегда направлен в сторону уменьшения потенциала, то потенциал φ_1 на оси цилиндра больше потенциала φ_2 на его поверхности. При этом искомая величина $\varphi_1 - \varphi_2$ численно равна заштрихованной «площади» под графиком зависимости $E(r)$, изображенным на рисунке 2:

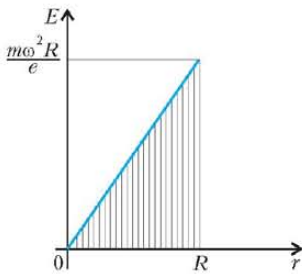


Рис. 2

$$\begin{aligned}\varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{1}{2} R \cdot E(R) = \\ &= \frac{1}{2} R \cdot \frac{m\omega^2 R}{e} = \frac{m\omega^2 R^2}{2e}.\end{aligned}$$

Задача в общем виде решена. Однако конечной целью физических расчетов является число. Интересно оценить порядок величины максимальной электрической мощности, возникающей при вращении цилиндра, фактически

являющегося механическим генератором электроэнергии.

В формуле для разности потенциалов введем для удобства удельный заряд электрона $e/m = \gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг и учтем, что $\omega R = v$ — это линейная скорость точек поверхности цилиндра. Тогда получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{v^2}{2\gamma}.$$

Оценим максимально возможную величину скорости v , используя соображения размерностей. Ясно, что она зависит от предела прочности материала цилиндра σ и от его плотности D . Запишем это так:

$$v \sim \sigma^\alpha \cdot D^\beta.$$

Выпишем единицы измерения всех величин:

$$[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}, [\sigma] = \text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}, [D] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}.$$

Так как обе части формулы для v измеряются в одних и тех же единицах, приходим к равенству

$$\text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \text{кг}^\alpha \cdot \text{м}^{-\alpha} \cdot \text{с}^{-2\alpha} \cdot \text{кг}^\beta \cdot \text{м}^{-3\beta},$$

или

$$\text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \text{м}^{-\alpha-3\beta} \cdot \text{с}^{-2\alpha} \cdot \text{кг}^{\alpha+\beta}.$$

Для определения α и β получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\alpha - 3\beta = 1, \\ -2\alpha = -1, \\ \alpha + \beta = 0, \end{cases}$$

из которой находим

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}.$$

Теперь формула для скорости принимает вид

$$v \sim \sqrt{\frac{\sigma}{D}},$$

а формула для разности потенциалов выглядит так:

$$\varphi_1 - \varphi_2 \sim \frac{\sigma}{\gamma D}.$$

Вспомним формулу электрического сопротивления R_Ω провода длиной l и площадью поперечного сечения S :

$$R_\Omega = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ — удельное сопротивление материала провода. С ее помощью оценим сопротивление R_Ω нашего цилиндра. Если его высота h , то $S \sim Rh$, значит,

$$R_\Omega \sim \rho \frac{R}{Rh}, \text{ или } R_\Omega \sim \frac{\rho}{h}.$$

Выделяемая в проводнике электрическая мощность равна

$$P \sim \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{R_\Omega}.$$

С учетом предыдущих формул окончательно получаем

$$P \sim \frac{\sigma^2 h}{\gamma^2 D^2 \rho}.$$

Обратим внимание: в этой формуле радиус цилиндра R отсутствует, а присутствует фактически одна переменная — h . Остальные величины характеризуют материал цилиндра. Например, для рельсовой стали $\sigma = 7,5 \cdot 10^8$ Па, $D = 7,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho = 1,2 \cdot 10^{-7}$ Ом·м. Пусть $h = 1$ см, ибо слишком высокий цилиндр будет чересчур тяжелым.

Тогда вычисления дают такой результат:

$$P \sim 24 \text{ нВт}.$$

Получили нановатты. Легко подсчитать, что механический генератор, вращающийся на пределе возможного разрушения, выработает один джоуль электроэнергии за 1,3 года.

Магнитная сила и закон электромагнитной индукции

Е. РОМИШЕВСКИЙ, А. СТАСЕНКО

Лаплас присутствовал на первой публичной демонстрации опыта Ампера. Публика уже расходилась, и Лаплас у выхода стал ждать ассистента... хлопнул его по плечу и, пристально глядя на него, спросил: «А не вы ли это, молодой человек, подталкивали провод?»

М.Льовицкий. История физики

КАСТОЯЩЕМУ ВРЕМЕНИ УЖЕ МИЛЛИАРДЫ ЛЮДЕЙ воспользовались услугами электропоездов, автомобилей, автобусов, самолетов, кораблей, электростанций и т.п., в которых неустанно вращаются роторы электромоторов и генераторов тока. В основе работы этих старательных тружеников лежат фундаментальные законы электромагнетизма, открытые замечательными учеными девятнадцатого века. Вспомним вкратце лишь о тех из них, о которых пойдет речь в этой статье.

Андре Мари Ампер (1775–1836) открыл взаимодействие электрических токов и установил соответствующий закон, разработал теорию магнетизма (1820).

Майкл Фарадей (1791–1867) в 1821 году впервые осуществил вращение магнита вокруг проводника с током, а также, наоборот, проводника с током вокруг магнита, создав, таким образом, принципиальную модель электродвигателя. В этом несложном опыте была наглядно показана связь между электрическими и магнитными явлениями. Через десять лет он уже открыл явление электромагнитной индукции – возникновение тока в замкнутом проводнике при изменении магнитного потока через контур этого проводника.

Эмилий Христианович Ленц (1804–1865) в 1833 году установил правило определения направления индукционного тока (правило Ленца).

Кстати сказать, и Ампер, и Фарадей, и Ленц были членами Петербургской Академии наук.

Хендрик Антон Лоренц (1853–1928) дал выражение для силы, действующей на движущийся заряд в электромагнитном поле (сила Лоренца). Иностраный член Академии наук СССР.

Продemonстрируем «работу» законов, открытых этими физиками, в самом простом случае поступательного движе-

Интuitивно было ясно, что вращающийся цилиндр как источник электричества крайне неэффективен – иначе так получали бы электроэнергию. И все же, как интересно и поучительно подтвердить это физическим расчетом.

Рассмотрим такой пример. В однородном горизонтальном магнитном поле $\vec{B}_z$ поступательно движется вертикальный длинный проводящий стержень длиной l с постоянной скоростью $\vec{v}_x \perp \vec{B}_z$ (рис.1). (Здесь индексы удобно указывают направления соответствующих векторов в декартовой системе координат XYZ. Круг с точкой означает, что ось Z и магнитное поле направлены к нам.) Положительные ионы (к примеру, ионы меди Cu^+) закреплены в узлах кристаллической решетки, а свободные электроны, перемещаясь вверх под действием магнитной

силы Лоренца $\vec{F}_L = e(\vec{v}_x \times \vec{B}_z)$, создают в объеме проводника однородное кулоновское электрическое поле $\vec{E}_K = (\vec{v}_x \times \vec{B}_z)$, уравнивающее действие магнитной силы. (Заметим, что здесь учтен отрицательный заряд электрона, равный $-e$, где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – положительная фундаментальная константа.) В результате между концами стержня возникает постоянная разность потенциалов, равная $E_K l = v_x B_z l$. Таким образом, создается «электромагнитная батарейка» с электродвижущей силой $\mathcal{E}_{\text{эм}} = v_x B_z l$ и сторонней (т.е. не кулоновского происхождения) напряженностью.

А что это за изогнутые линии с боку от стержня? Они нарисованы для того, чтобы подчеркнуть существенное отличие кулоновского поля от сторонних полей: работа по перенесению пробного заряда в кулоновском поле по замкнутому контуру (выделен цветом) равна нулю. Заметим, что электродвижущие силы (ЭДС) и связанные с ними сторонние напряженности в своей основе опять-таки имеют электромагнитный характер, но уже другого (тоже некулоновского) рода.

Теперь используем эту «электромагнитную батарейку» для получения электрического тока и электрической энергии. Для этого будем двигать наш стержень вдоль двух параллельных горизонтальных проводников, находящихся на расстоянии l друг от друга (рис.2). Проводники

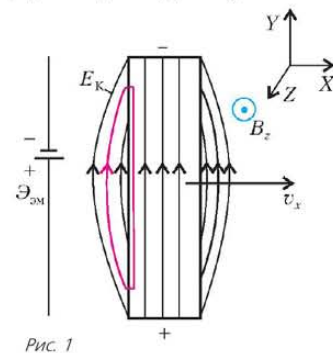


Рис. 1

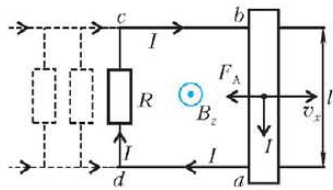


Рис. 2

замкнем на резистор сопротивлением R . Причем двигаться будет только стержень, а проводники и резистор должны быть неподвижными. (Иначе в них тоже будет создаваться «электромагнитная батарея» той же силы, что и возникающая в стержне, но противоположно «направленная», так что тока в замкнутом контуре не будет.) Тогда в замкнутом контуре $abcd$ потечет электрический ток $I = \mathcal{E}_{\text{эм}}/R$, и на сопротивлении R будет выделяться тепловая мощность $I^2 R$.

За счет чего же выделяется тепловая энергия, и справедлив ли здесь закон сохранения энергии?

По движущемуся стержню сверху вниз течет электрический ток I . Значит, на проводник с током, находящийся в однородном магнитном поле $\vec{B}_z$, действует сила Ампера, направленная противоположно направлению движения стержня, т.е. вектору $\vec{v}_x$. Чтобы стержень сохранял постоянную скорость движения v_x , к нему необходимо приложить силу $\vec{F}^*$, равную по величине силе Ампера $F_A = IB_z l$, но направленную противоположно ей. При этом мощность этой силы ($N = F^* v_x = IB_z l v_x = I^2 R$) в точности равна тепловой мощности, выделяющейся на сопротивлении R , что, конечно же, неудивительно. Закон сохранения энергии верен!

Подключим теперь к параллельным проводам, по которым скользит стержень, еще один резистор сопротивлением R (см. рис.2). Тогда, если стержень по-прежнему будет двигаться со скоростью v_x , через него уже потечет электрический ток величиной $2I$. Сила Ампера увеличится в два раза, и в два раза больше станет выделяющаяся на сопротивлениях тепловая мощность. Таким образом, мы получили электрический генератор постоянного тока. Включение нескольких параллельных сопротивлений R во столько же раз увеличит силу Ампера, тормозящую стержень.

Расположим теперь параллельные проводники вертикально (рис.3), и пусть по ним скользит наш проводящий (уже горизонтальный) стержень массой m , замыкающий цепь с

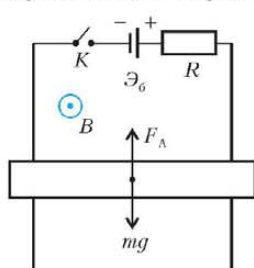


Рис. 3

резистором сопротивлением R и аккумуляторной батареей с электродвижущей силой $\mathcal{E}_0$. Контур пронизывается прежним однородным горизонтальным магнитным полем $\vec{B}$, направленным к нам, и находится в поле тяготения Земли. (Индексы для векторов и их проекций для простоты опустим, так как мы уже разобрались, что куда направлено.) Если замкнуть ключ K и отпустить стержень, то по цепи потечет ток $I = \mathcal{E}_0/R$, направленный по часовой стрелке. Если величина $\mathcal{E}_0$ будет достаточно большой, то сила Ампера, действующая на стержень, будет больше силы тяжести mg , и стержень начнет двигаться вверх с начальным ускорением a , определяемым равенством

$$ma = F_A - mg.$$

Если скорость стержня v , он превращается в «электромагнитную батарейку», имеющую электродвижущую силу $\mathcal{E}_{\text{эм}} = vBl$ и «действующую», по правилу Ленца, против вызывающей ее причины, т.е. против $\mathcal{E}_0$. В конце концов может установиться стационарное состояние (отметим его индексом 0):

$$I_0 Bl = mg, \quad I_0 R = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{\text{эм}} = \mathcal{E}_0 - v_0 Bl, \quad (*)$$

откуда получим постоянную скорость движения стержня:

$$v_0 = \frac{\mathcal{E}_0 Bl - mgR}{(Bl)^2} = \frac{\mathcal{E}_0}{Bl} \left(1 - \frac{mgR}{\mathcal{E}_0 Bl} \right).$$

Если первое равенство выражения (*) умножить на v_0 , а второе – на I_0 , мы опять получим закон сохранения энергии:

$$\mathcal{E}_0 I_0 = \mathcal{E}_{\text{эм}} I_0 + I_0^2 R = mgv_0 + I_0^2 R.$$

Видно, что мощность аккумуляторной батареи расходуется на полезную мощность поднятия груза массой m со скоростью v_0 и на выделяющуюся при этом тепловую мощность. Таким образом, на рисунке 3 фактически изображена принципиальная схема электрического мотора: ведь к нашему проводящему стержню вполне можно прикрепить, например, ведро воды, поднимаемое из колодца.

Итак, полезная (механическая) мощность нашего мотора равна

$$N_{\text{пол}} = \mathcal{E}_{\text{эм}} I_0 = \frac{\mathcal{E}_{\text{эм}} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{\text{эм}})}{R},$$

следовательно, его коэффициент полезного действия равен

$$\text{КПД} = \frac{N_{\text{пол}}}{N_{\text{зат}}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{эм}} I_0}{\mathcal{E}_0 I_0} = \frac{\mathcal{E}_{\text{эм}}}{\mathcal{E}_0},$$

где $N_{\text{зат}}$ – полная мощность, затрачиваемая батареей. На рисунке 4 изображен график зависимости полезной мощности от $\mathcal{E}_{\text{эм}}$, в нашем случае от $\mathcal{E}_{\text{эм}} = vBl$. Это – парабола. Легко видеть, что максимальная полезная мощность мотора N_{max} достигается, когда «электромагнитная» ЭДС $\mathcal{E}_{\text{эм}}$ оказывается вдвое меньше ЭДС включенной в цепь батареи $\mathcal{E}_0$. При этом коэффициент полезного действия мотора составляет $\mathcal{E}_{\text{эм}}/\mathcal{E}_0 = 0,5$, т.е. 50%.

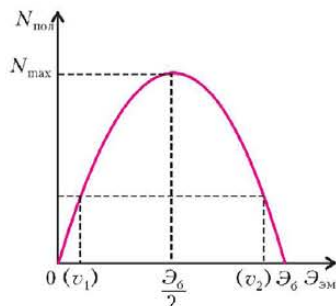


Рис. 4

Это значит, что если мы имеем электрический мотор, в цепи которого содержится батарея с ЭДС $\mathcal{E}_0$ и сопротивлением R , и он поднимает груз массой m , то максимальную скорость поднятия этого груза можно найти так:

$$mgv_{\text{max}} = \mathcal{E}_{\text{эм}} I_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_0 (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0/2)}{2R} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{4R}, \quad \text{и} \quad v_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{4mgR}.$$

По графику рисунка 4 видно, что одну и ту же полезную мощность с одним и тем же мотором можно получить, поднимая быстро ($v_2 > v_1$) легкий груз или медленно – тяжелый груз. Причем поднимать быстро легкий груз значительно выгоднее, потому что коэффициент полезного действия может быть значительно больше и мотор при этом будет греться существенно меньше. Максимально возможная скорость движения бесконечно легкого груза ($mg \rightarrow 0$) достигается, когда $\mathcal{E}_{\text{эм}} = v^* Bl = \mathcal{E}_0$, при этом $I \rightarrow 0$ и КПД $\rightarrow 1$. Эту скорость $v^* = \mathcal{E}_0/(Bl)$ называют скоростью холостого хода мотора.

Вернемся снова к схеме «электромотора» (см. рис.3). Эту схему очень просто превратить в схему «генератора», поменяв полюса батареи. Если в начальный момент замкнуть ключ и отпустить стержень, то вначале сила Ампера будет направлена вниз, и стержень будет падать с ускорением, большим ускорения свободного падения:

$$ma = mg + IBl.$$

Затем ток начнет уменьшаться, изменит свое направление, когда $\mathcal{E}_{\text{эм}} = vBl$ станет больше $\mathcal{E}_0$, и в дальнейшем устано-

вится стационарное состояние:

$$v_{\text{уст}}Bl - \mathcal{E}_0 = I_{\text{уст}}R, \quad mg = I_{\text{уст}}Bl, \quad \text{и} \quad v_{\text{уст}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Bl} \left(1 + \frac{mgR}{\mathcal{E}_0} \right).$$

При этом за счет уменьшения потенциальной энергии стержня в поле тяжести начнет заряжаться батарея и, кроме того, будет выделяться тепловая мощность на сопротивлении. На языке мощностей запишем:

$$mgv_{\text{уст}} = v_{\text{уст}}BlI_{\text{уст}} = \mathcal{E}_0I_{\text{уст}} + I_{\text{уст}}^2R.$$

Рассмотренные примеры убедительно показывают, что такие важные для человечества физические объекты, как электрические генераторы и электрические моторы, являющиеся как бы «родственными» по линии магнитных сил Лоренца и Ампера.

Обобщим теперь полученные результаты. Вернемся к нашему начальному примеру, изображенному на рисунке 2. Параллельные провода и перемычка с резистором сопротивлением R неподвижны. Стержень длиной l движется со скоростью v_x . В данный момент времени t координата стержня равна x . Магнитный поток $\Phi(t)$ через замкнутый контур $abcd$ равен произведению индукции поля B на площадь $lx(t)$ перпендикулярной полю площадки:

$$\Phi(t) = Blx(t).$$

Заметим, что

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv_x.$$

Значит, можно записать, что

$$\mathcal{E}_{\text{эм}} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Почему стоит знак «минус»? В нашем случае магнитный поток увеличивается, так как увеличивается площадь контура $abcd$, а ток в контуре будет течь против часовой стрелки и создавать внутри контура собственное магнитное поле, по направлению противоположное магнитному полю B . Это положение и называется правилом Ленца. Нашу электромагнитную электродвижущую силу $\mathcal{E}_{\text{эм}}$ назвали *электродвижущей силой электромагнитной индукции*, а установленный опытным путем закон

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

— законом электромагнитной индукции Фарадея.

Дальнейшее обобщение закона (это опять-таки установлено опытным путем) говорит о том, что если поток Φ магнитного поля $\vec{B}$ через любую поверхность, опирающуюся на замкнутый контур, зависит от времени, то в этом контуре возникает ЭДС электромагнитной индукции, определяемая законом Фарадея. Причем со временем могут изменяться (в отдельности или одновременно) форма контура, его площадь, ориентация в пространстве относительно магнитного поля $\vec{B}$, а также само магнитное поле $B(t)$, которое в общем случае должно складываться из внешнего магнитного поля и собственного магнитного поля, создаваемого возникающим собственным электрическим током в проводящем контуре.

Если вы запомните предыдущий абзац, то прослышите в школе большим знатоком физики. Чего вам и желаем.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Как шарик о плиту ударился

А. СТАСЕНКО

«Что же тут особенного? — скажет Отличник. — Будем считать удар абсолютно упругим...»

С этого и начнем. Что такое *удар*? И что значит *абсолютно упругий*?

Удар понимают обычно как нечто мгновенное; предполагается, что он приводит к бесконечно быстрому изменению скоростей соударяющихся тел. В частности, при нормальном столкновении шарика с массивной плитой происходит, как сказал бы математик, скачок или разрыв нормальной составляющей скорости: $\Delta v_n = v_{2n} - v_{1n}$. Но поскольку шарик обладает конечной массой m , такой скачок скорости потребовал бы бесконечно большой нормальной силы: $F_n \rightarrow \infty$, которая за бесконечно малый промежуток времени: $\tau \rightarrow 0$ должна привести к конечному приращению импульса:

$$m\Delta v_n = F_n \cdot \tau (\tau = \infty \cdot 0). \quad (1)$$

По сути дела, при этом не интересуются тем, что происходит в течение времени столкновения τ , — важно только то, что

получилось в конце этого процесса. Так что это время может и не быть равным нулю; «мгновенность» удара можно понимать как малость времени τ по сравнению с каким-то другим «большим» отрезком времени, например временем подъема шарика в поле тяжести на высоту h после отскока:

$$\tau \ll \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Но тогда и сила F_n не должна быть бесконечно большой — важно лишь приращение импульса. Кроме того, поскольку удар — это уже *процесс*, длящийся конечное время τ , «внутри» которого сила F_n может как-то изменяться, то можно ввести ее среднее значение $\langle F_n \rangle$ такое, что его произведение на время удара в точности равно тому же приращению импульса (1):

$$m\Delta v_n = \langle F_n \rangle \cdot \tau. \quad (1')$$

А что значит — абсолютно упругий? Это значит, что после соударения кинетическая энергия отскочившего шарика осталась в точности такой же, как до удара (масса плиты считается бесконечно большой). Значит, нормальная составляющая скорости изменит только знак: $v_{2n} = -v_{1n}$. Конечно, это идеализированная модель — где же найти такую плиту и такой шарик, который после падения с высоты h отскочил бы на ту же высоту?

Что же происходит на самом деле при столкновении? Представим себе *упругое* тело массой m в виде двух *жестких* частей массой $m/2$ каждая, скрепленных невесомой пружиной жесткостью k (рис.1). Пусть это составное тело нормально падает на абсолютно жесткую плиту со скоростью

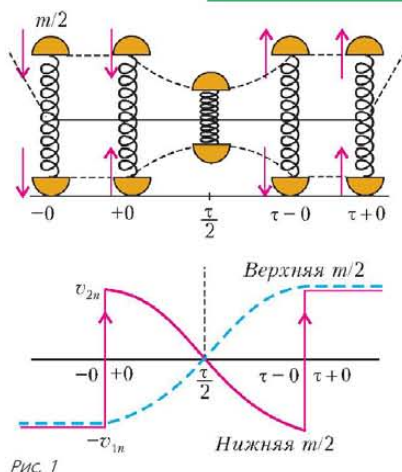


Рис. 1

v_{1n} . В момент времени $t = -0$ нижняя половина приходит в соприкосновение с плитой. Припишем этой половине свойство «абсолютно упруго отражаться» от плиты. Это значит, что в следующее мгновение $t = +0$ нижняя половина изменит знак скорости на противоположный: $v_{2n} = -v_{1n}$, а верхняя половина пока что ничего об этом «не знает» и продолжает двигаться вниз с прежней скоростью $-v_{1n}$. Но поскольку теперь обе половины движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю, но противоположно направленными скоростями, пружина начнет сжиматься, и в некоторый момент времени, обозначим его $\tau/2$, обе половины на мгновение остановятся. Затем пружина начнет их расталкивать и в момент времени $t = \tau - 0$ полностью распрямится, ее расталкивающая сила исчезнет. В то же мгновение «абсолютно жесткая» нижняя половина тела вторично «абсолютно упруго» отразится от «абсолютно жесткой» плиты и в момент времени $t = \tau + 0$ приобретет ту же скорость, что и до соударения, но теперь направленную вверх. А эту же скорость уже имеет и верхняя половина. Таким образом, наше двухполовинное тело станет двигаться вверх, не потеряв ничего из своей первоначальной кинетической энергии.

На рисунке 1 штрихами показано, что траектория тела, подлетающего к плите и отразившегося от нее, может быть криволинейной (например, параболой), но в масштабе времени взаимодействия τ это искривление совершенно незначительно, а сила тяжести mg пренебрежимо мала по сравнению с нормальной силой, вызывающей скачок скорости при соприкосновении с плитой. Заметим, что центр масс этого двойного тела неподвижен во все время столкновения ($0 < t < \tau$).

Итак, через конечный промежуток времени порядка периода колебаний этого устройства $\sqrt{\frac{m}{2k}}$ оно отскочит от плиты со скоростью, равной по модулю скорости падения.

А еще более сложное тело – упругий шарик – можно представить в виде множества малых масс, соединенных пружинками. При ударе от места контакта по шарiku побежит волна деформации, которая, пройдя его диаметр, отразится в противоположную сторону и, вновь пройдя расстояние, равное диаметру, дойдет до места контакта. Тут-то шарик и отскочит от плиты. Впрочем, и плиту точно так же можно представить состоящей из множества масс (атомов, ионов кристаллической решетки), соединенных «пружинками», обеспечивающими упругость твердого тела (которое теперь уже нельзя назвать абсолютно жестким). И в этом теле тоже побежит волна, унося с собой часть кинети-

ческой энергии шарика. Значит, его скорость после соударения обязательно станет меньше скорости падения.

Но что это мы до сих пор говорим только о нормальном соударении? Ведь тело может падать под любым углом к плоскости, и тогда его скорость в момент соприкосновения может иметь составляющую, направленную вдоль плоскости, или касательную составляющую, или тангенциальную составляющую – кому как нравится, но в любом случае мы будем ее отмечать индексом s .

Пусть в какой-то момент происходит соударение круглого тела (шарика, цилиндра или обруча) с твердой поверхностью. Ситуация совсем не редкая. Например, на соревнованиях по художественной гимнастике можно наблюдать, как Гимнастка отбрасывает в сторону обруч, закрутив его так, что, проскользив некоторое расстояние, но не потеряв полностью вращения, он сам возвращается к хозяйке. Значит, за время скольжения τ_s трение полностью «съело» первоначальный тангенциальный импульс обруча mv_{1s} , после чего началось чистое качение, но поступательная скорость обруча сменила знак. На рисунке 2 условно изображены изменения со временем силы F_s , угловой скорости обруча ω и его поступательной скорости v_s . Конечно, этот пример по-настоящему нельзя назвать соударением – здесь процесс развивается довольно долго, так что зрители успевают полюбоваться еще несколькими движениями Гимнастки.

А вот другой пример: тяжелый авиалайнер садится на взлетно-посадочную полосу, и из-под его шасси летят пыль и дым – буквально дым! – горят покрышки колес, если еще до касания земли не позаботились раскрутить эти сотни килограммов до нужной скорости. Какой? Такой, чтобы уже в момент касания соблюдалось условие качения

$$\omega_1 = \frac{-v_{1s}}{r},$$

где r – радиус колеса (это условие должно быть соблюдено для любого круглого тела – обода, диска, шара).

Но вернемся к шарiku. На рисунке 3 изображены последовательные стадии его взаимодействия с плитой, начиная с момента падения под углом, определяемым условием

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-v_{1n}}{v_{1s}}.$$

Показаны скольжение в течение времени τ_s , последующее качение в течение времени $\tau - \tau_s$ и, наконец, отскок в момент времени $\tau + 0$. Изображен случай, когда время скольжения τ_s меньше времени соприкосновения τ . В частном случае они могут и совпадать.

Следует обратить внимание на знаки величин. Скорость вращения ω считается положительной, если вращение происходит против часовой стрелки. (Математик сказал бы, что векторы, направленные вдоль осей s , n , ω , образуют правую тройку векторов.)

На рисунке 3 зависимости составляющих силы взаимодействия F_n и F_s от времени изображены произвольными

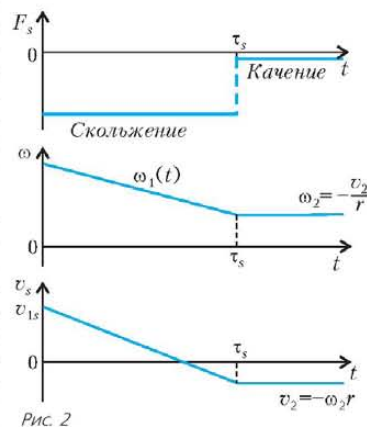


Рис. 2

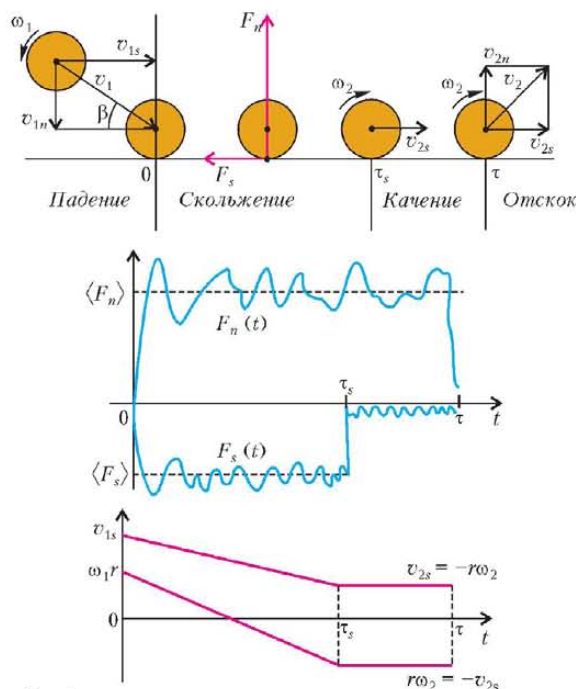


Рис. 3

волнистыми линиями. Мы не интересуемся точным «устройством» этих зависимостей. Нас интересует конечный импульс сил $\langle F_n \rangle \tau$ и $\langle F_s \rangle \tau_s$, где в угловых скобках показаны средние значения сил.

Поскольку шарик не есть точка, а имеет конечный размер, тангенциальная сила (коль скоро она направлена влево) создает крутящий момент, направленный по часовой стрелке и равный $rF_s(t)$. Подобно тому как в поступательном движении в течение времени скольжения происходит изменение тангенциального импульса на величину $\langle F_s \rangle \tau_s$, во вращательном движении произойдет изменение... чего? — момента импульса на величину $r \langle F_s \rangle \tau_s$, т.е. на величину момента импульса силы.

Но напомним, наконец, уравнения:

$$m(v_{2n} - v_{1n}) = (\langle F_n \rangle + mg)\tau, \quad (2)$$

$$m(v_{2s} - v_{1s}) = \langle F_s \rangle \tau_s, \quad (3)$$

$$J(\omega_2 - \omega_1) = r \langle F_s \rangle \tau_s. \quad (4)$$

Их смысл прост: в результате столкновения произошли изменения нормального и тангенциального импульсов шарика, и эти изменения равны импульсам соответствующих сил. Кроме того, произошло изменение угловой скорости. При этом коэффициент J — момент инерции — описывает инертность тела во вращательном движении, подобно тому как m — масса — характеризует инертность в поступательном движении.

Тут надо сказать еще несколько слов. В круглом теле радиусом r его массу можно распределить по-разному. Можно разместить массу на одном и том же расстоянии r от центра. Тогда получим обруч, для которого $J = mr^2$. Можно «размазать» ее по диску, и тогда получим $J = \frac{1}{2}mr^2$. Можно распределить ее равномерно по сфере (как у шарика для пинг-понга), тогда $J = \frac{2}{3}mr^2$. А если заполнить массой

внутренность сферы (т.е. сделать шар), то $J = \frac{2}{5}mr^2$. Вводя безразмерную величину $\gamma = J/mr^2$, получим: для обруча $\gamma = 1$, для сферы $\gamma = \frac{2}{3}$, для диска $\gamma = \frac{1}{2}$, для шара $\gamma = \frac{2}{5}$. Таким образом, из названных тел обруч труднее всего раскрутить до заданной угловой скорости, а шарик — легче всего (при одинаковых значениях массы и радиуса). Им-то мы и интересуемся прежде всего.

Далее, в уравнении (2) на всякий случай учтена и сила тяжести падающего тела — на тот случай, когда она окажется единственной прижимающей силой (Гимнастка с обручем или колесо авиалайнера). Напомним, что при ударе $\langle F_n \rangle \gg mg$, и силой тяжести можно пренебречь.

К записанной системе уравнений Теоретик и Экспериментатор отнесутся по-разному.

Теоретик будет рассуждать так. Пусть заданы все параметры до столкновения (индекс 1): v_{1n} , v_{1s} , ω_1 и характер взаимодействия тел: коэффициент трения μ . Требуется найти параметры после отскока v_{2n} , v_{2s} и ω_2 , составляющие силы $\langle F_n \rangle$ и $\langle F_s \rangle$, время соударения τ и время скольжения τ_s — семь величин. Следовательно, нужны еще какие-то соотношения для замыкания системы уравнений (2)–(4).

Прежде всего можно воспользоваться законом Кулона–Амонтона

$$\langle F_s \rangle = -\mu \langle F_n \rangle$$

(предполагается, что в течение всего времени скольжения тангенциальная сила пропорциональна нормальной). Далее, для времени соударения можно принять оценку

$$\tau \sim 4r \left(\frac{1}{c_{ш}} + \frac{1}{c_n} \right),$$

где $c_{ш}$ и c_n — скорости звука в материалах шарика и плиты. Чем жестче материал, тем больше скорость звука в нем. Например, для стали она порядка 5000 м/с, а для свинца — 1000 м/с. Таким образом, если плита «абсолютно жесткая» и скорость звука в ней бесконечно велика, то время соударения будет определяться временем прохождения волной возмущения диаметра шарика $2r$ «туда и обратно». А если плита «абсолютно мягкая» (например, из пластилина), то $c_n \rightarrow 0$, и шарик никуда не отскочит ($\tau \rightarrow \infty$).

Итак, для определения семи неизвестных имеется всего пять соотношений. Задача все еще не замкнута. Что же делать? Строго говоря, нужно решить сложную проблему нестационарной деформации двух взаимодействующих тел — шарика и плиты, в объеме которой и по поверхности которой при ударе побегут волны, уносящие часть начальной кинетической энергии шарика. Но для этого нужно знать теорию упругости и численные методы математической физики.

Поэтому обратимся к Экспериментатору. На опыте довольно просто можно измерить составляющие скорости v_{1n} , v_{1s} , v_{2n} , v_{2s} при помощи киносъемки или освещая частицу стробоскопическими вспышками. Это так называемый времяпролетный метод. Результаты эксперимента обычно представляются в виде зависимостей от угла падения отношений составляющих скорости после и до падения — так называемых коэффициентов восстановления нормальной и тангенциальной составляющих импульса

$$a_n = \frac{v_{2n}}{-v_{1n}} \quad \text{и} \quad a_s = \frac{v_{2s}}{v_{1s}}.$$

Видно, что первый из них всегда неотрицателен, так как v_{1n} всегда неположительна; второй же может иметь любой знак (например, быть отрицательным в случае Гимнастки с обру-

чем) или быть равным нулю (тогда предварительно закрученное тело отскочит вертикально вверх, так как его тангенциальный импульс будет полностью «съеден» трением).

Эксперименты показывают, что обе эти величины зависят от угла скольжения β . На рисунке 4, а качественно изображен характерный вид этих зависимостей, а вертикальные отрезки показывают, что всякий честный эксперимент дает

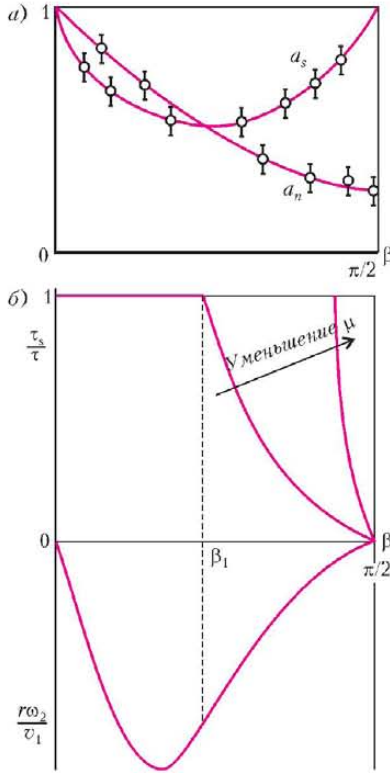


Рис. 4

разброс результатов измерений, зависящий от многих причин (шероховатости плиты, несферичности «шарика», несовершенства измерительного прибора, ..., настройки Экспериментатора). Хотелось бы измерить и угловые скорости ω_1 и ω_2 . Конечно, это можно сделать, например, в случае футбольного мяча, шарика для пинг-понга или для миллиметровых шариков, на которых есть какие-то метки (тут уж нужна будет фото- или киносъемка). Но если частицы имеют микронные размеры? Например, частицы запыленной атмосферы, в которой движется самолет или спускаемый космический корабль?

Разумеется, кое-что можно сказать об угловой скорости и по результатам измерения линейной скорости. Например, из рисунка 4,а видно, что в этих экспериментах падающие шарики не вращались до соударения с поверхностью ($\omega_1 = 0$) – иначе величина a_s была бы больше или меньше единицы или даже отрицательна.

Итак, пусть измерены $v_{1n}, v_{1s}, v_{2n}, v_{2s}$ в функции угла скольжения β . (Желательно, конечно, чтобы и в зависимости от ω_1 , потому что, если шарiku придется вторично столкнуться с плитой, он окажется уже закрученным после первого столкновения. Но это нелегко сделать для микрочастиц.) Нужно найти $\omega_2, \langle F_n \rangle, \langle F_s \rangle, \tau, \tau_s$ – теперь уже пять величин, в отличие от случая с Теоретиком.

Перепишем уравнения (2)–(4), используя введенные коэффициенты восстановления (здесь силу тяжести учитывать не будем):

$$-v_{1n}(1+a_n) = \frac{\langle F_n \rangle}{m} \tau, \quad (2')$$

$$v_{1s}(1-a_s) = -v_{1n}(1+a_n) \frac{\tau_s}{\tau} \mu, \quad (3')$$

$$\omega_2 - \omega_1 = -\frac{1}{\gamma} \frac{v_{2s}}{r} \frac{1-a_s}{a_s}. \quad (4')$$

Помня, что нормальная составляющая скорости падающего тела v_{1n} всегда отрицательна в выбранной системе координат, при ней сохранен знак «минус» (так что $-v_{1n} \geq 0$).

Из (3') можно получить относительное время скольжения:

$$\frac{\tau_s}{\tau} = \frac{v_{1s}}{-v_{1n} \mu} \frac{1-a_s}{1+a_n}.$$

Конечно, оно является функцией угла β , но в любом случае не должно превосходить единицу ($\tau_s \leq \tau$) – не может шарик скользить дольше, чем длится его контакт с плитой!

Правая часть уравнения (4') – тоже известная функция β , следовательно, это уравнение даст приращение угловой скорости $\omega_2 - \omega_1$. Впрочем, если результаты измерений таковы, как на рисунке 4,а, т.е. $a_s \rightarrow 1$ при $\beta \rightarrow \pi/2$, то угловая скорость падающего шарика заведомо равна нулю ($\omega_1 = 0$) – он не вращается перед столкновением. Тогда

$$\omega_2 = -\frac{mr^2}{J} \frac{v_{2s}}{r} \frac{1-a_s}{a_s}.$$

А в конце участка скольжения имеем

$$\omega_2 = -\frac{v_{2s}}{r}.$$

Отсюда

$$\frac{1-a_s}{a_s} = \frac{J}{mr^2} = \gamma, \quad a_s = \frac{1}{1+\gamma}.$$

Для шарика $\gamma = \frac{2}{5}$, так что $a_s = \frac{5}{7}$. Интересно, что высота бортика бильярдного стола делается равной $\frac{7}{5}$ от радиуса шара – это ли не практическое применение законов физики!

Если $\tau_s = \tau$, то из (3') и (4') можно найти соответствующий коэффициент трения, обеспечивающий это условие:

$$\mu_* = \frac{\gamma(\omega_1 r + v_{1s})}{(\gamma+1)(v_{2n} - v_{1n})}.$$

Отсюда видно, что при $\mu_* = 0$ (совсем нет трения) должно выполняться условие $\omega_1 = -\frac{v_{1s}}{r}$, или $\omega_2 = \omega_1, v_{2s} = v_{1s}, a_s = 1$. Вот почему и нужно раскручивать колеса шасси авиалайнера перед посадкой. И вот почему водитель автомобиля, въехав на лед, должен не тормозить и не разгоняться, а сидеть тихо.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть для некоторой пары веществ шарика и плиты экспериментальные данные рисунка 4,а можно аппроксимировать простыми зависимостями

$$a_n = 1 - \frac{3}{4} \sin \beta, \quad a_s = 1 - \frac{1}{2} \sin 2\beta.$$

Тогда получим

$$\frac{\tau_s}{\tau} = \frac{\cos^2 \beta}{\mu \left(2 - \frac{3}{4} \sin \beta \right)} \leq 1.$$

Отсюда видно, что условие совпадения времени скольжения со временем соприкосновения достигается с уменьшением μ при все большем угле β . Далее, из (4') найдем

$$\frac{r\omega_2}{v_1} = -\frac{\sin\beta \cdot \cos^2\beta}{\gamma}, \text{ где } \gamma = \frac{2}{5}.$$

Эти величины качественно показаны на рисунке 4,б. Видно, например, что угловая скорость останется равной нулю в двух случаях: когда $\beta = 0$ (скользящий удар, когда нет прижимающей силы) и когда $\beta = \pi/2$ (нормальное падение, когда нет начальной тангенциальной составляющей скорости).

И тут масса других вопросов возникла в голове Отличника. Ведь уже рисунок 1 содержит намек на то, что для отскока шарика или сам шарик, или плита, или оба этих тела должны деформироваться в процессе взаимодействия. Значит, плечо тангенциальной силы, которое раньше принималось равным

радиусу шарика r , теперь должно быть величиной переменной в процессе взаимодействия. А если падает не однородный шар, а шарик для пинг-понга или теннисный мяч, у которых оболочка и воздушное наполнение обладают различными значениями плотности, модуля упругости и т.п.?

А если падающий «шарик» обладает не совсем сферической поверхностью и плита не совсем плоская, а шероховатая, да еще и волнистая? А если деформации не совсем упругие, а пластические? А если в процессе трения происходит разделение электрических зарядов? А если столкновение происходит в воздухе, который надо успеть вытеснить из области между сближающимися телами, а он тоже обладает инертностью? А если...

«Э, брат, — подумал Отличник, — чтобы во всем этом разобраться, нужно поступить в Московский физико-технический институт, а потом защитить диссертацию на эту тему». И он был прав.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Два тюремщика

И. АКУЛИЧ, В. ЛЕЦКО

*Не найдешь — кого винить? —
Я должен тебя казнить.
Государственное дело!
Ты улавливаешь нить?*

Леонид Филатов

ПРЕЗИДЕНТ АНЧУРИИ МИРАФЛОРЕС, ЗАНЯВ СВОЙ ВЫСОКИЙ пост, первым делом открыл две тюрьмы на 100 посадочных мест каждая. Почему две, а не одну двойной вместимости? Потому что он был сторонником рыночных реформ и считал, что между начальниками этих тюрем (с незатейливыми фамилиями Блэк и Уайт) разовьется здоровая свободная конкуренция, результатом которой будет прогресс и процветание указанных пенитенциарных учреждений. Увы! Слово «свободная» плохо применимо к заведениям такого рода, и вместо рыночной конкуренции развилось социалистическое соревнование, следствием чего явилось стопроцентное заполнение обеих тюрем в кратчайшие сроки.

Результат не заставил себя ждать: оставшаяся на свободе оппозиция, пронохав, что сажать ее уже некуда, обнаглела донельзя и принялась организовывать массовые мероприятия под надуманными лозунгами (марши пустых кастрюль, сковородок и прочего кухонного инвентаря). Чтобы не допустить национальной катастрофы, президент приказал начальникам освободить тюрьмы: либо выгнать, либо казнить всех в них находящихся.

— Лучше, конечно, казнить, — дал он ненавязчивую рекомендацию, — но чтобы все было *по справедливости*. Я не хочу обвинений в немотивированной жестокости. Устройте им

какое-нибудь испытание (как говорят современные игроки-компьютерщики, квест). Не пройдут — кого винить? Только их самих...

И вот начальники тюрем собрались, чтобы обсудить ситуацию и поискать выход.

— Президент ясно дал понять: испытание должно практически гарантированно привести к казни заключенных, но внешне не выглядеть непреодолимым, — задумчиво произнес Уайт. — Что же нам изобрести?

— Идея! — заявил Блэк. — Пусть ищут... самих себя!

— Это как? — не понял Уайт.

— А вот как. Заготовлю сто записок с фамилиями всех заключенных (по одной фамилии на записке) и сто пронумерованных коробок. Перетасую записки, как колоду карт, и положу по одной в каждую коробку. Все эти коробки помещу в отдельную комнату — и милости просим! Пусть они по очереди входят и открывают в любом порядке 99 коробок — т.е. все, кроме одной. И если *каждый* из них сумеет открыть коробку со своей фамилией — то я всех отпущу. Если же *хотя бы один* не найдет себя — то всех казню! Разумеется, после выхода каждого узника из комнаты все открытые им коробки будут закрыты обратно. Ну, и проследим, чтобы они не сумели оставить каких-нибудь пометок и тому подобное.

— Но это ведь все равно, что просто отпустить заключенных на волю без всякого испытания! — воскликнул Уайт. — Я не силен в математике, но даже для меня очевидно, что вероятность не найти своей фамилии всего 0,01.

— Это доказывает, что моя идея хороша! Испытание выглядит совсем легким. На самом же деле шансы узников не слишком велики. Вероятность того, что найти «свою коробку» удастся *всем*, равна $0,99^{100}$, а это не так много.

— В самом деле? Ну-ка, где калькулятор...

— Можно и без него. Обратите внимание:

$0,99^{100} = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100}$, а эта величина, как и вообще значение

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ при достаточно больших n , довольно близка к $1/e$, где $e = 2,718...$ — число Эйлера. Поэтому вероятность выжить для них равна $1/2,718... \approx 0,368$ — заметно меньше половины.

— И все же риск слишком велик! — засомневался осторожный Уайт. — Боюсь, если нам придется выпустить заключен-

ных, мы с вами будем первыми кандидатами на освободившиеся места.

— Пожалуй, вы правы, — согласился Блэк. — Тогда разрешим открывать не по 99, а по 90 коробок. Вероятность того, что все 100 человек найдут себя, составляет $0,9^{100}$, а это ой как мало — меньше 0,00003. Пожалуй, я даже дам им возможность пообщаться между собой. Пусть все видят, какой я гуманный! Разумеется, общаться они будут только до начала испытания.

— А вдруг они придумают какую-нибудь хитрую стратегию?

— А что они могут придумать?! Допустим, изобретут стратегию, при которой какую-то коробку так ни разу никто и не откроет. Тогда их шансы из призрачных станут нулевыми — ведь узник, фамилия которого содержится в этой неоткрытой коробке, до своей фамилии так и не докопается! Поэтому самое выгодное для них — открывать коробки «равномерно-размазанно», чтобы каждая была открыта по 90 раз. Но и эта стратегия не может существенно увеличить шансы заключенных. Давайте-ка оценим, каковы будут шансы на успешное прохождение испытания, скажем, всего двумя первыми узниками в зависимости от разных стратегий.

— А как это сделать?

— Очень просто! Поскольку первый открывает 90 коробок из 100, его шанс найти записку со своей фамилией при любой стратегии будет равен 0,9. Если второй узник откроет те же коробки, что и первый, вероятность того, что оба они выдержат испытание, будет равна $\frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} = \frac{89}{110}$. Это чуть-чуть меньше 0,81 (вероятности успеха при открывании коробок без предварительной договоренности). Предположим теперь, что второй узник среди своих 90 откроет 10 коробок, которые не открывал его предшественник. Для нахождения вероятности успеха при такой стратегии нам придется рассмотреть два случая. Допустим сначала, что коробка с фамилией первого узника не попала в число тех 90, которые открывает второй. Вероятность этого события равна $\frac{10}{90}$, а шансы на успех второго заключенного в этом случае равны $\frac{90}{99}$. С вероятностью $\frac{80}{90}$ коробка с фамилией первого узника попадет в число коробок, открываемых вторым. В этом случае вероятность успеха второго заключенного равна $\frac{89}{99}$. Учитывая, что шансы первого узника на успех $\frac{90}{100}$, окончательно получаем, что вероятность обнаружения «своих коробок» обоими заключенными равна $\frac{90}{100} \cdot \left(\frac{10}{90} \cdot \frac{90}{99} + \frac{80}{90} \cdot \frac{89}{99} \right) = \frac{401}{495}$. Это, конечно, больше, чем $\frac{89}{110}$, но незначительно — всего-то на $\frac{1}{9900}$. Поэтому и при самой оптимальной стратегии узникам ничего не светит! При остальных стратегиях вероятность, естественно, будет лежать в диапазоне между двумя найденными значениями.

— Я восхищен вашими познаниями в математике, коллега!

— Ничего удивительного — в систему исполнения наказаний я попал случайно, а образование у меня математическое. Вот оно и пригодилося.

На следующий день узники тюрьмы Блэка начали игру. Испытание проходило в присутствии бдительной охраны, представителей прессы и наблюдателей от оппозиции (президент Мирафлорес не хотел, чтобы его обвинили в подставке). Разумеется, здесь же были Блэк и Уайт.

Узники один за другим заходили в комнату и, открывая коробки в каком-то замысловатом порядке, рано или поздно находили записку со своей фамилией.

Блэк был спокоен и даже улыбался.

— То, что несколько человек, скорее всего, найдут «свои коробки», мне было очевидно заранее. Но шансы их по-прежнему мизерны, — шепнул он Уайту.

Когда число узников, успешно прошедших испытание, перевалило за второй десяток, улыбка Блэка стала натянутой. По мере того, как число «везучиков» приближалось к сотне, Блэк темнел, как грозовая туча. К тому моменту, когда последний узник успешно прошел испытание, его лицо полностью соответствовало фамилии.

— Невероятно! Кошмарное везение! Преступники! Бандиты! Уголовники! Им удалось попасть в тысячные доли процента!

— У моих этот фокус не пройдет, — набылчился Уайт. — Пусть открывают по 70 коробок, и баста! Нечего с ними либеральничать!

— Но это же не испытание, а прямое убийство! Их шансы что-то порядка 10^{-16} , — сказал Блэк, тыча одеревеневшими пальцами в клавиши калькулятора.

— Ничего. Пополоскают мое имя в оппозиционной прессе и забудут. Это лучше, чем сесть в свое же заведение. Вы ведь в курсе, у меня тут не курорт!

...И вот наступил «день икс» для узников тюрьмы, возглавляемой Уайтом. Оба начальника вновь оказались соседями на этом представлении.

Первый узник действовал не менее затейливо, чем бывшие заключенные тюрьмы Блэка. Открыв очередную коробку, он внимательно читал лежавшую там записку, на несколько секунд замирал, закатывая глаза к потолку, и уверенно шел к другой коробке, как правило, не соседней с предыдущей. Наконец, в тридцать второй по счету коробке он с торжествующей улыбкой обнаружил записку со своей фамилией.

— Рано радуется, — злобно прошептал Уайт, — шансов, что остальным 99 заключенным тоже повезет, почти нет.

— Ошибаетесь, коллега! — ехидно заметил Блэк. — Готов спорить на что угодно, что остальные тоже пройдут испытание.

— Ах, так? Тогда предлагаю пари. Если мои заключенные «срежусь», вы отплатите мне все свое имущество. Все равно в тюрьме оно вам ни к чему. Если же и мне придется выпустить своих заключенных, то я готов отдавать вам сахар и масло из своей пайки (президент в приватном разговоре намекнул мне, что при таком исходе нас поместят в одну камеру). Я понимаю, что условия пари несколько неравные. Но вы сами предложили спорить на *что угодно*.

К удивлению Уайта, Блэк согласился на такие условия. Но он был просто поражен, когда Блэк вышел победителем!

Примерно через месяц после описываемых событий господа Блэк & Уайт коротали вечер в тесноватой, но все-таки отдельной камере-«двушке». Из уважения к прежним заслугам к ним больше никого не подсадили.

— Расскажите, как все-таки вам удалось догадаться, что мои заключенные выдержат испытание, уже после визита первого из них? — спросил Уайт, с отвращением отхлебывая из кружки пресный тюремный чай.

— На самом деле я понял все гораздо раньше, когда внимательно понаблюдал за тем, как открывали коробки узники моей тюрьмы. Они знали, что все коробки с их фамилиями пронумерованы числами от 1 до 100. Тогда они и себе присвоили номера от 1 до 100.

— Но что это даст?

— Это позволяет организовать, скажем так, «кольцевую схему». Каждый из них сначала открывал коробку, номер

которой равен его собственному номеру. Затем он открыл коробку, номер которой совпадает с номером того узника, фамилию которого он увидел в первой коробке. Фамилия узника в этой коробке указывала номер коробки, которую следовало открыть на третьем шаге. И так далее. До чего мы, в конце концов, доберемся, временно допустив, что узнику разрешается раскрыть хоть все коробки? Рано или поздно в очередной коробке встретится его собственная фамилия и, таким образом, получившееся «кольцо» замкнется. Оно может, в частном случае, содержать даже всех узников (хотя может и лишь одного). Если не все узники оказались в таком «кольце», выберем любого «незадействованного» и повторим те же операции. Получится второе кольцо, потом третье и так далее, пока узники не кончатся. Так что в итоге все узники окажутся «укомплектованы» в кольца. В университете нам рассказывали, что это называется разложением перестановки в произведение независимых циклов. Жаль, что я поздно про это вспомнил!

— А я вообще не знал...

— На этом, — продолжил повествование Блэк, — и была основана стратегия узников. Она оказывается весьма эффективной, даже если узникам разрешено открывать не более 70 коробок. Если все имеющиеся кольца состоят не более чем из 70 узников каждое, то каждый узник, сделав не более 70 ходов, непременно наткнется на свою фамилию! И вероятность выхода всех узников на волю с головой на плечах просто-напросто равна вероятности того, что все циклы оказались не длиннее 70 человек!

— И какова же эта вероятность?

— Подсчитать нетрудно. Для начала найдем вероятность того, что образовался цикл ровно из k человек, где $k > 70$. Понятно, что если такой цикл есть, то других циклов длиной свыше 70 человек быть не может. Количество способов выбрать k человек из 100 равно, как известно из комбинаторики, $\frac{100!}{k!(100-k)!}$. Восклицательный знак в данном случае — не признак громкости, а произведение всех натуральных чисел от единицы до заданного числа (называется «факториал»). При этом k человек, попавших в цикл, можно упорядочить $(k-1)!$ способами...

— А это почему?

— Поясняю. Из тех k человек, что попали в цикл, выберем того, у которого *наименьший* номер. Следующим за ним по циклу может быть любой из остальных $(k-1)$ членов этого цикла, а следующим — один из $(k-2)$ остальных, и так далее. Итого, получаем

$$(k-1) \times (k-2) \times \dots \times 2 \times 1 = (k-1)!$$

способов. Остальных же $(100-k)$ человек, не попавших в цикл, можно, естественно, упорядочить $(100-k)!$ способами. Таким образом, способов образовать цикл ровно из k человек имеется

$$\frac{100!}{k!(100-k)!} \times (k-1)! \times (100-k)! = \frac{100!}{k}.$$

Всего же есть $100!$ способов упорядочить всех 100 узников. Окончательно вероятность образования кольца ровно из k узников равна $\frac{100!}{k} : 100! = \frac{1}{k}$. Очень просто!

— Но подождите, тогда вероятность того, что образовался цикл, состоящий *не менее чем* из 71 узника, равна сумме $\frac{1}{71} + \frac{1}{72} + \dots + \frac{1}{100}$. Ничего себе — просто! Как же я это подсчитаю? Тридцать дробей на бумажке складывать? Каль-

куляторы-то у нас отобрали. Оставили только вот «Четырехзначные математические таблицы»...

— Ничего, и этого хватит. Еще Эйлер доказал, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N}$ довольно близка к $\ln N + C$, где $C = 0,577\dots$ — постоянная Эйлера, причем чем больше N , тем точнее это равенство. Поэтому мы можем записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{71} + \frac{1}{72} + \dots + \frac{1}{100} &= \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{70}\right) \approx \\ &\approx (\ln 100 + C) - (\ln 70 + C) = \ln\left(\frac{100}{70}\right) \approx \ln 1,428 \approx 0,357. \end{aligned}$$

Значит, вероятность того, что не найдется ни одного столь длинного цикла (и, следовательно, что все узники найдут свои фамилии), равна примерно $1 - 0,357 = 0,643$ — почти две третьих! Между прочим, в моей тюрьме, с разрешением открывать 90 коробок (ну я и лопух!), эта вероятность была еще больше, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{91} + \frac{1}{92} + \dots + \frac{1}{100} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \\ &- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{90}\right) \approx \ln\left(\frac{100}{90}\right) \approx 0,105, \end{aligned}$$

то она равнялась примерно $1 - 0,105 = 0,895$. Результат налицо: мы оба в этой камере!

— Но при испытании в моей тюрьме вы подозрительно быстро — сразу после визита первого узника — определили, что в разложении перестановки нет циклов длиннее 70. Каким образом?

— Элементарно! Я увидел, что и в вашей тюрьме узники додумались до кольцевой стратегии. Первый из них обнаружил свою фамилию в тридцать второй по счету коробке. Значит, в перестановку входит цикл длины 32. Но тогда в ней не могут содержаться циклы, длина которых превышает 68 и уж тем более 70.

— А как же понимать восклицания о фантастическом везении ваших заключенных? — поинтересовался Уайт.

— Признаюсь честно, я лукавил. Все-таки куда приятнее делить нары со знакомым интеллигентным человеком. А то подсадят к какому-нибудь злодею... К тому же, я очень люблю сладкий чай. В общем, кое-какая польза от знания математики все же есть, — философски заметил Блэк, намазывая на кусок хлеба вторую порцию масла.

Уайт голодными глазами отслеживал его движения.

— И вообще, — отеческим тоном добавил Блэк, — как говорит народная мудрость, в тюрьме только первые десять лет плохо, потом привыкаешь. Только, пожалуйста, не умирайте здесь раньше меня. Мне без вашего сахара с маслом будет очень нелегко.

Примечание. Авторы благодарны датскому специалисту в области информатики Петеру Бро Милтерсену, по мотивам задачи которого написана данная статья, а также петербургскому математику Михаилу Митрофанову, познакомившему авторов с этой задачей.

Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия

А. ЧЕРНОУЦАН

ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ РЕДКО удается решить, ограничиваясь вторым законом Ньютона и кинематикой, не выходящей за рамки равноускоренного движения. Исключение – движение заряженной частицы в однородном электрическом поле или по окружности вокруг кулоновского центра. В остальных случаях, когда расстояние между заряженными частицами меняется, необходимо использовать закон сохранения энергии.

Начнем с задач, в которых рассматривается движение *одной* заряженной частицы во внешнем электрическом поле одного или нескольких неподвижных зарядов. Здесь удобно применять теорему о кинетической энергии:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{эл},$$

где работа электрического поля выражается через разность потенциалов:

$$A_{эл} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Если принять потенциал на бесконечности равным нулю, то в начальной и конечной точках движения частицы его надо вычислять с помощью принципа суперпозиции:

$$\varphi = \sum_i k \frac{Q_i}{r_i},$$

где суммирование ведется по всем неподвижным зарядам Q_i (источникам поля), r_i – расстояние от i -го заряда до той точки, где вычисляется потенциал, а $k = 9 \cdot 10^9$ Дж · м/Кл² – электрическая постоянная.

Однако в качестве первого примера мы рассмотрим заряженную частицу в однородном электрическом поле, но в такой ситуации, где без энергии не обойтись.

Задача 1. Шарик массой 5 г и зарядом 2 мКл подвешен на нити длиной 1 м в горизонтальном электрическом поле

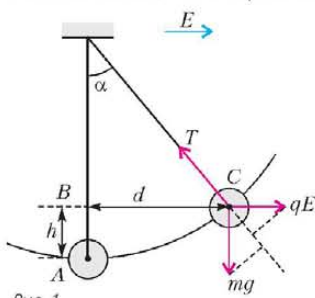


Рис. 1

с напряженностью 20 В/м. Шарик сначала удерживают в нижнем положении, а затем отпускают. Найдите натяжение нити в тот момент, когда шарик поднимется на 20 см выше начального положения.

Решение. Запишем второй закон Ньютона в проекции на радиальное

направление (рис.1):

$$T - mg \cos \alpha - qE \sin \alpha = m \frac{v^2}{l},$$

где $\cos \alpha = (l - h)/l = (1 - 0,2)/1 = 0,8$, $\sin \alpha = 0,6$. Квадрат скорости найдем с помощью теоремы о кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = A_{эл} + A_{грав}.$$

Каждую из работ – электрической и гравитационной сил – можно вычислить в лоб, заменив истинную траекторию на ломаную ABC (напомним, что работа каждой из этих сил не зависит от траектории):

$$A_{эл} = qE \cdot BC = qEd = qEl \sin \alpha,$$

$$A_{грав} = -mg \cdot AB = -mgh = -mgl(1 - \cos \alpha).$$

Окончательно получаем

$$T = mg(3 \cos \alpha - 2) + 3qE \sin \alpha = 92 \text{ мН}.$$

Заметим, что работу электрического поля можно было выразить через разность потенциалов с использованием формулы для разности потенциалов в однородном поле:

$$A_{эл} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q \cdot Ed = qE \cdot BC,$$

а работу силы тяжести – через разность потенциальных энергий:

$$A_{грав} = W_1 - W_2 = -mgh.$$

Задача 2. Возле поверхности шара радиусом 6 см, равномерно заряженного зарядом 4 нКл, находится частица массой 30 мг и зарядом 2 нКл. Частицу освобождают. Найдите скорость частицы в тот момент, когда она удалится от поверхности шара на расстояние, равное его радиусу.

Решение. Поскольку поле вне равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, находящегося в его центре, то потенциалы поля шара в начальной и конечной точках движения составляют

$$\varphi_1 = k \frac{Q}{R} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = k \frac{Q}{2R}.$$

Подставляя потенциалы в теорему о кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

найдем

$$v = \sqrt{\frac{kqQ}{mR}} = 20 \text{ см/с}.$$

Задача 3. Два точечных заряда по 10 нКл каждый закреплены на расстоянии 4 см друг от друга. Посередине между зарядами помещают заряженную частицу массой 2 мг и зарядом 36 нКл и отпускают. Какую скорость приобретет частица на большом расстоянии от зарядов?

Решение. Сначала ответим на вопрос, который часто возникает у внимательных школьников: почему частица вообще куда-то должна улечь, если она находится в положении равновесия? Дело в том, что это состояние *неустойчивого* равновесия – при небольшом смещении в сторону (рис.2) равнодействующая кулоновских сил будет направлена от точки равновесия, т.е. частица начнет разгоняться и улетит на бесконечность.

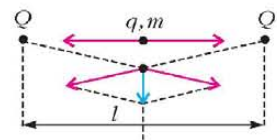


Рис. 2

Теперь – собственно решение. Потенциал в начальной точке движения равен

$$\varphi_1 = 2 \cdot k \frac{Q}{l/2},$$

а в конечной (на бесконечности) он нулевой:

$$\varphi_2 = 0.$$

Поэтому теорема о кинетической энергии имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = q \left(k \frac{4Q}{l} - 0 \right),$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{8kqQ}{ml}} = 18 \text{ м/с}.$$

Задача 4. По тонкому закреплённому кольцу радиусом 6 см равномерно распределён заряд 40 нКл. В центр кольца помещают частицу с зарядом 12 нКл и массой 9 мг и отпускают. Чему будет равна скорость частицы на большом расстоянии от кольца?

Решение. Отметим сразу, что в этой задаче, как и в предыдущей, движение начинается из точки неустойчивого равновесия. Конечный потенциал (на большом расстоянии) равен нулю:

$$\varphi_2 = 0,$$

а для вычисления начального потенциала (в центре кольца) надо применить принцип суперпозиции, разбив кольцо на маленькие кусочки, которые можно считать точечными зарядами. Потенциал центра кольца (как любой точки на его оси) вычисляется просто благодаря тому, что расстояния до всех точечных зарядов одинаковы:

$$\varphi_1 = \sum_i k \frac{\Delta Q_i}{R} = \frac{k}{R} \sum_i \Delta Q_i = k \frac{Q}{R}.$$

Заметим, что φ_1 не зависит от того, как распределён заряд Q по кольцу – равномерно или неравномерно. Подставляя потенциалы в теорему о кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = q \left(k \frac{Q}{R} - 0 \right),$$

получаем

$$v = \sqrt{\frac{2kqQ}{mR}} = 4 \text{ м/с}.$$

В последующих задачах удобнее применять не теорему о кинетической энергии, а закон сохранения механической энергии. Такой подход оказывается особенно разумным в тех случаях, когда в движении одновременно участвуют несколько заряженных частиц. Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов имеет вид

$$W_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}},$$

а потенциальная энергия системы нескольких зарядов равна сумме всех энергий парных взаимодействий:

$$W = \sum_{i < j} W_{ij}.$$

В этих формулах за ноль принята потенциальная энергия системы в состоянии, когда все заряды удалены друг от друга на очень большое расстояние.

Чтобы лучше почувствовать понятие потенциальной энергии системы зарядов, разберём простой пример на ее вычисление.

Задача 5. Четыре одинаковых заряда по 2 мкКл каждый расположены на прямой линии. Расстояние между соседними зарядами 60 см. Какую работу надо совершить, чтобы разместить эти заряды в вершинах правильного тетраэдра с ребром 60 см?

Решение. Для четырех зарядов 1–4 можно выделить шесть пар (рис.3): 1–2, 2–3, 3–4, 1–3, 2–4 и 1–4. Начальная энергия системы равна

$$W_{\text{нач}} = 3 \cdot k \frac{q^2}{l} + 2 \cdot k \frac{q^2}{2l} + k \frac{q^2}{3l} = \frac{13}{3} k \frac{q^2}{l},$$

а конечная энергия составляет

$$W_{\text{кон}} = 6 \cdot k \frac{q^2}{l}.$$

Работа внешних сил равна изменению энергии системы:

$$A = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \frac{5}{3} k \frac{q^2}{l} = 100 \text{ мДж}.$$

Теперь рассмотрим несколько задач на закон сохранения энергии.

Задача 6. Две частицы массой 2 мг и зарядом 10 нКл каждая находятся на расстоянии 5 см друг от друга, а посередине между ними закреплён точечный заряд 60 нКл. Частицы одновременно отпускают. Чему будет равна скорость частиц после их разлета на большое расстояние?

Решение. Из соображений симметрии ясно, что конечные скорости частиц одинаковы. Потенциальная энергия в конечном состоянии равна нулю, а в начальном состоянии составляет (рис.4)

$$W_{\text{нач}} = 2 \cdot k \frac{qQ}{r/2} + k \frac{q^2}{r}.$$

Закон сохранения энергии запишем в виде

$$0 + k \frac{q(4Q + q)}{r} = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} + 0,$$

откуда найдем

$$v = \sqrt{\frac{kq(4Q + q)}{mr}} = 15 \text{ м/с}.$$

Заметим, что эту задачу можно решать и с помощью теоремы о кинетической энергии. Для вычисления работы электрических сил надо использовать тот факт, что она не зависит от способа переноса частиц из начального состояния в конечное, и перенести частицы на бесконечность по очереди – сначала одну, а потом другую (попробуйте сделать это сами). Наоборот, некоторые из разобранных ранее задач можно решать через закон сохранения энергии. Например, в задаче 3 этот закон запишется так:

$$0 + 2 \cdot k \frac{qQ}{l/2} + k \frac{Q^2}{l} = \frac{mv^2}{2} + k \frac{Q^2}{l}$$

(видно, что поскольку заряды Q не сдвигаются с места, то энергию их взаимодействия можно не учитывать – она все равно сокращается). Выбор метода определяется удобством для данной конкретной задачи и вашим вкусом.

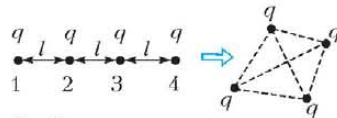


Рис. 3

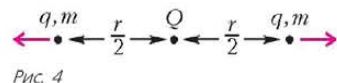


Рис. 4

Энергетический подход можно также с успехом применять в задачах, где кроме электрической присутствуют другие консервативные силы (сила тяжести, как в задаче 1, или сила упругости) или сила трения, действие которой приводит к переходу механической энергии во внутреннюю.

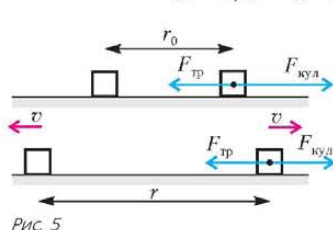
Задача 7. Два небольших тела массой 100 г и зарядом 10 мкКл каждое удерживают на горизонтальной плоскости на расстоянии 1 м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость равен $0,1$. Тела одновременно освобождают. Найдите максимальную скорость тел в процессе движения.

Решение. Если на движущиеся тела действуют силы трения, то часть механической энергии системы переходит во внутреннюю:

$$k \frac{q^2}{r_0} = k \frac{q^2}{r} + 2 \cdot \frac{mv^2}{2} + \Delta W_{\text{вн}},$$

причем увеличение внутренней энергии равно работе сил трения, взятой с противоположным знаком (или по модулю):

$$\Delta W_{\text{вн}} = F_{\text{тр}}(r - r_0) = \mu mg(r - r_0).$$



Максимальная скорость тел достигается в тот момент, когда их ускорения равны нулю (рис. 5), т.е. обращаются в ноль равнодействующая сил кулоновской и силы трения:

$$k \frac{q^2}{r^2} = \mu mg,$$

откуда находим расстояние между телами в этот момент:

$$r = \sqrt{\frac{kq^2}{\mu mg}} = 3\text{ м}.$$

Из первых двух равенств получаем

$$mv^2 = k \frac{q^2}{r_0} - k \frac{q^2}{r} - \mu mg(r - r_0).$$

Можно найти интересующую нас скорость непосредственно из этой формулы, но если сначала подставить $kq^2 = \mu mgr^2$, то формула упрощается:

$$mv^2 = \mu mg \frac{(r - r_0)^2}{r_0},$$

или

$$v = \sqrt{\frac{\mu g}{r_0}}(r - r_0) = 2\text{ м/с}.$$

Задача 8. Два одинаковых шарика заряжены одинаковыми зарядами $0,5\text{ мкКл}$, соединены пружиной жесткостью 6 Н/м и находятся на гладком горизонтальном столе. Вначале шарики удерживают на расстоянии 10 см друг от друга, при этом пружина не деформирована. Затем шарики одновременно отпускают. Найдите максимальное расстояние между шариками в процессе дальнейшего движения.

Решение. В этом случае надо учитывать как энергию кулоновского взаимодействия, так и энергию упругой деформации. Закон сохранения энергии запишем в виде

$$k \frac{q^2}{l_0} = k \frac{q^2}{l} + \frac{\chi(l - l_0)^2}{2},$$

где χ – жесткость пружины. После преобразований, сокра-

щая на $(l - l_0)$, приходим к квадратному уравнению

$$l^2 - l_0 l - \frac{2kq^2}{\chi l_0} = 0,$$

положительный корень которого равен

$$l = \frac{l_0}{2} + \sqrt{\frac{l_0^2}{4} + \frac{2kq^2}{\chi l_0}} = 15\text{ см}.$$

Задача 9. Два маленьких шарика соединены недеформированной пружиной длиной 20 см и жесткостью 200 Н/м . После сообщения шарикам зарядов одного знака длина пружины в новом положении равновесия стала вдвое больше. Какую работу надо совершить для возвращения пружины в прежнее состояние?

Решение. В новом положении равновесия равнодействующая кулоновской силы и силы упругости равна нулю:

$$k \frac{q^2}{(2l_0)^2} = \chi l_0.$$

Работа внешних сил равна изменению энергии:

$$A = k \frac{q^2}{l_0} - \left(k \frac{q^2}{2l_0} + \frac{\chi l_0^2}{2} \right).$$

Подставляя сюда из первого равенства $kq^2 = 4\chi l_0^3$, получаем

$$A = \frac{3\chi l_0^3}{2} = 12\text{ Дж}.$$

Задача 10. На высоте 3 м над землей закреплен заряд -4 мкКл , а под ним на высоте $2,2\text{ м}$ находится частица массой $0,9\text{ г}$ и зарядом 1 мкКл . Какую минимальную скорость надо сообщить частице вертикально вниз, чтобы она достигла поверхности земли?

Решение. В начальный момент действующая на частицу сила кулоновского притяжения больше, чем сила тяжести.

На первый взгляд, надо записать закон сохранения энергии, связывающий начальное состояние частицы с конечным, в котором она достигнет поверхности земли с нулевой скоростью. Однако такой подход может привести к неверному результату. Необходимо сначала проверить, где находится точка А, в которой сила кулоновского притяжения сравняется с силой тяжести (рис.6). Дело в том, что эта точка является точкой неустойчивого равновесия – до нее равнодействующая сил тормозит частицу, а после нее сила тяжести становится больше кулоновской силы и частица начинает разгоняться. Если точка А ближе, чем поверхность земли, то нужно частице сообщить скорость, которая позволит ей достичь точки А, а дальше она полетит сама.

Точку А найдем так:

$$k \frac{|Q|q}{(H - h_0)^2} = mg, \text{ откуда } h_0 = H - \sqrt{\frac{k|Q|q}{mg}} = 1\text{ м}.$$

Видно, что точка А находится над поверхностью земли.

Запишем теперь закон сохранения энергии, считая, что в точке А скорость частицы обратится в ноль:

$$k \frac{qQ}{H - h_1} + mgh_1 + \frac{mv^2}{2} = k \frac{qQ}{H - h_0} + mgh_0.$$

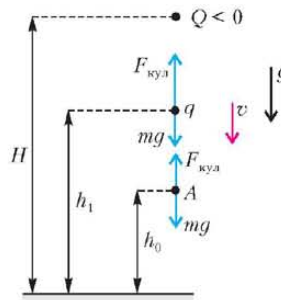


Рис. 6

Подставив сюда из первого равенства $kqQ = -mg(H - h_0)^2$ и проведя преобразования, для искомой скорости получим

$$v = \sqrt{\frac{2g}{H - h_1}}(h_1 - h_0) = 6 \text{ м/с.}$$

Заметим, что в точке A полная потенциальная энергия максимальна, поэтому, чтобы достигнуть поверхности земли, надо преодолеть потенциальный барьер, вершина которого находится в точке A .

Чтобы проиллюстрировать важность анализа потенциальных кривых для понимания свойств системы, разберем такую задачу.

Задача 11. На пружине жесткостью 5 Н/м подвешен в поле тяжести шарик массой 100 г . На шарик и на верхний конец пружины нанесены разноименные заряды, подобранные таким образом, что если пружина не деформирована, то кулоновская сила равна силе тяжести. Шарик удерживают в этом положении равновесия, а затем отпускают. Уйдет ли шарик из этого положения? Если да, то на сколько он отклонится? Длина недеформированной пружины 10 см .

Решение. Если описанное положение равновесия (пружина не деформирована, сила тяжести уравновешена кулоновской силой) устойчиво, то шарик останется на месте. Посмотрим, как изменяется потенциальная энергия в зависимости от смещения x из положения равновесия (рис.7):

$$\Delta W_n = -mgx + \frac{\chi x^2}{2} + k \frac{qQ}{l_0 + x} - k \frac{qQ}{l_0}.$$

По условию, $mg = k|qQ|/l_0^2$. Тогда

$$\Delta W_n = -mgx + \frac{\chi x^2}{2} + \frac{mg l_0 x}{l_0 + x} = \frac{\chi x^2}{2} - \frac{mg x^2}{l_0 + x}.$$

Видно, что при $\chi > 2mg/l_0$ потенциальная энергия в точке $x = 0$ имеет минимум, т.е. равновесие устойчивое (рис.8, а). Если же $\chi < 2mg/l_0$, то равновесие неустойчивое (рис. 8, б).

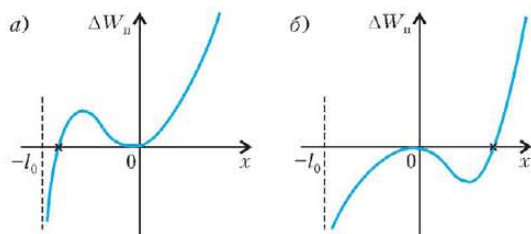


Рис. 8

Теперь запишем закон сохранения энергии, предполагая, что шарик сместился на x и остановился:

$$k \frac{qQ}{l_0} = k \frac{qQ}{l_0 + x} - mgx + \frac{\chi x^2}{2}.$$

После подстановки $kqQ = -mg l_0^2$ проведем преобразования и получим ответ:

$$x = \frac{2mg}{\chi} - l_0 = 30 \text{ см.}$$

При $\chi > 2mg/l_0$ ответ получается отрицательным, но он не имеет смысла — искомая точка (она отмечена на рисунке 8, а крестиком) недостижима, так как находится по другую

сторону потенциального барьера. При $\chi < 2mg/l_0$ получаем один положительный ответ (см. рис. 8, б). Действительно, если шарик сместится вверх, то он никогда не остановится и «упадет» на верхний заряд.

В заключение рассмотрим задачу, где закон сохранения энергии надо применять совместно с законом сохранения импульса.

Задача 12. Две частицы, имеющие массы 2 г и 3 г и заряды 3 мкКл и -12 мкКл , удаляются друг от друга. В некоторый момент они находятся на расстоянии 10 м и имеют одинаковые скорости 3 м/с . Найдите наибольшее расстояние между частицами в процессе движения.

Решение. Наибольшее расстояние соответствует моменту, когда скорости частиц будут равны по модулю и направлены в одну сторону (относительная скорость частиц равна нулю). Скорость частиц в этом состоянии найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2) u.$$

Выразив скорость u и подставив ее в закон сохранения энергии

$$k \frac{q_1 q_2}{r_0} + \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} = k \frac{q_1 q_2}{r} + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2},$$

найдем максимальное расстояние:

$$r = \left(\frac{1}{r_0} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{2v^2}{k q_1 q_2} \right)^{-1} = 30 \text{ м.}$$

Упражнения

1. Шарик массой 5 г и зарядом 2 мкКл подвешен на нити в горизонтальном электрическом поле напряженностью 20 В/м , направленной слева направо. Шарик с нитью отводят вправо до горизонтального положения и отпускают. Найдите натяжение нити в тот момент, когда она впервые составит с вертикалью угол α такой, что $\cos \alpha = 0,8$.

2. По тонкому кольцу радиусом 4 см равномерно распределен заряд 50 нКл . На оси кольца на расстоянии 3 см от его центра помещают частицу с зарядом -18 нКл и массой 1 мг и отпускают. Найдите скорость частицы в тот момент, когда она будет пролетать через центр кольца.

3. В вершинах острых углов ромба закреплены заряды по 7 нКл , а в вершинах тупых углов находятся две частицы массой 2 мг и зарядом 2 нКл каждая. Частицы одновременно отпускают, и они приходят в движение. Чему будут равны скорости частиц после их разлета на большее расстояние? Сторона ромба 3 см , а его острый угол 60° .

4. Три одинаковых шарика, несущих одинаковые заряды 2 мкКл , соединены попарно тремя одинаковыми пружинами и удерживаются на расстоянии 5 см друг от друга. Шарiki отпускают, и они приходят в движение. Найдите жесткость каждой пружины, если в начальном положении они не деформированы, а максимальное расстояние между шариками в процессе движения в три раза больше начального.

5. Два небольших тела массой 50 г каждое, заряженные одинаковыми зарядами 10 мкКл , находятся на горизонтальной плоскости на расстоянии 2 м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость равен $0,1$. Тела одновременно освобождают. На каком расстоянии друг от друга тела остановятся?

6. В поле тяжести закреплен точечный заряд -10 мкКл , а под ним на расстоянии 5 м находится частица массой 9 г и зарядом 4 мкКл . Какую минимальную вертикальную скорость надо сообщить частице, чтобы она долетела до закрепленного заряда?

XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по математике

Четвертый (федеральный окружной) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике проходил с 22 по 27 марта 2008 года в городах Кисловодск (Северо-Западный, Центральный и Южный федеральные округа) и Уфа (Приволжский, Уральский, Сибирский и Дальневосточный федеральный округ).

Заключительный, пятый этап олимпиады проходил с 19 по 25 апреля 2008 года в Кисловодске. Знаменитый курорт России радушно принял 206 школьников России — дипломантов IV этапа и победителей Московской и Санкт-Петербургской олимпиад, а также команды школьников из Болгарии и Китая — стран, с которыми продолжается многолетнее плодотворное сотрудничество в области математики и математических соревнований. По результатам олимпиады помимо дипломов были вручены специальные призы. Эти награды достались самому юному участнику Дмитрию Крачуну (Санкт-Петербург), десятикласснику Григорию Борову (Санкт-Петербург) и Дмитрию Крепцеву (Кострома) — за решение трудной комбинаторной задачи 8, одиннадцатикласснику Виктору Кривошеину (Киров) — за полное решение сложной комбинаторной задачи 8, а также выступавшему за 10 класс Светозару Станкову из Болгарии, набравшему максимально возможное количество баллов. Опрос, проведенный среди участников, выявил задачи, наиболее понравившиеся школьникам. Первые три места в конкурсе задач заняли задачи 7, 2 и 8 для 9 класса, 7, 4 и 3 для 10 класса, 6, 8 и 7 для 11 класса. На закрытии олимпиады приятной неожиданностью для жюри стало награждение авторов лучших задач представителями «школьного жюри».

Ниже приводятся условия задач IV и V этапов олимпиады, а также список дипломантов V (заклучительного) этапа XXXIV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Окружной этап

9 класс

1. Числа a , b , c таковы, что $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2008$ и $a \neq b$. Найдите значение выражения $c^2(a+b)$.

В.Сендеров

2. В клетках квадрата 5×5 изначально были записаны нули. Каждую минуту Вася выбирал две клетки с общей стороной и либо прибавлял по единице к числам в них, либо вычитал из них по единице. Через некоторое время оказалось, что суммы чисел во всех строках и столбцах равны. Докажите, что это произошло через четное число минут.

И.Богданов

3. Дан выпуклый шестиугольник $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, все стороны которого равны. Каждую его вершину отразили симметрично относительно прямой, проходящей через две соседние вершины. Полученные точки обозначили через $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5$

и P'_6 соответственно. Докажите, что треугольники $P_1P'_3P'_5$ и $P'_2P'_4P'_6$ равны.

Л.Емельянов

4. Даны положительные рациональные числа a, b . Один из корней трехчлена $x^2 - ax + b$ — рациональное число, в несократимой записи имеющее вид m/n . Докажите, что знаменатель хотя бы одного из чисел a и b (в несократимой записи) не меньше $n^{2/3}$.

И.Богданов

5. Дано натуральное число $n > 1$. Для каждого делителя d числа $n+1$ Петя разделил число n на d с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь — остаток. (Например, при делении числа 17 на 6, $17 = 6 \cdot 2 + 5$, т.е. неполное частное равно 2, а остаток — 5.) Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

С.Берлов

6. См. задачу M2101 «Задачника «Кванта».

7. Дан треугольник ABC , в котором $AB > BC$. Касательная к его описанной окружности в точке B пересекает прямую AC в точке P . Точка D симметрична точке B относительно точки P , а точка E симметрична точке C относительно прямой BP . Докажите, что четырехугольник $ABED$ — вписанный.

В.Филимонов

8. 300 бюрократов разбиты на три комиссии по 100 человек. Любые два бюрократы либо знакомы друг с другом, либо незнакомы. Докажите, что найдутся два таких бюрократы из разных комиссий, что в третьей комиссии есть либо 17 человек, знакомых с обоими, либо 17 человек, незнакомых с обоими.

С.Берлов, М.Мурашкин

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись такие точки M и N , отличные от вершин, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC . Докажите, что PA является биссектрисой угла MPN .

А.Грибалко

3. В очереди к стоматологу стоят 30 ребят: мальчиков и девочек. Часы на стене показывают 8:00. Как только начинается новая минута, каждый мальчик, за которым стоит девочка, пропускает ее вперед. Докажите, что перестановки в очереди закончатся до 8:30, когда откроется дверь кабинета.

М.Мурашкин

4. Последовательность (a_n) задана условиями $a_1 = 1000000$, $a_{n+1} = n \left[\frac{a_n}{n} \right] + n$. Докажите, что в ней можно

выделить бесконечную подпоследовательность, являющуюся арифметической прогрессией.

М. Мурашкин

5. На острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из них есть хотя бы один друг. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды утром каждый житель произнес либо фразу «Все мои друзья – рыцари», либо фразу «Все мои друзья – лжецы», причем каждую из фраз произнесли ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное число пар друзей, один из которых рыцарь, а другой лжец.

М. Мурашкин

6. См. задачу M2102 «Задачника «Кванта».

7. На бесконечной в обе стороны ленте бумаги выписаны все целые числа, каждое ровно по одному разу. Могло ли оказаться, что между любыми двумя числами не стоит их среднее арифметическое?

Д. Храмцов, Л. Емельянов, И. Богданов, С. Волчѣнков

8. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Пусть P – произвольная точка на большей дуге DE окружности ω , F – точка, симметричная точке A относительно прямой DP , M – середина отрезка DE . Докажите, что угол FMP – прямой.

Д. Скробот

11 класс

1. Даны два квадратных трехчлена, имеющих корни. Известно, что если в них поменять местами коэффициенты при x^2 , то получатся трехчлены, не имеющие корней. Докажите, что если в исходных трехчленах поменять местами коэффициенты при x , то получатся трехчлены, имеющие корни.

И. Агаханов, И. Богданов

2. По окружности отметили 40 красных, 30 синих и 20 зеленых точек. На каждой дуге между соседними красной и синей точками поставили цифру 1, на каждой дуге между соседними красной и зеленой – цифру 2, а на каждой дуге между соседними синей и зеленой – цифру 3. (На дугах между одноцветными точками поставили 0.) Найдите максимальную возможную сумму поставленных чисел.

И. Агаханов, И. Богданов, П. Кожевников

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон BC , AC , AB в точках A' , B' , C' соответственно. Точки K и L на окружности ω таковы, что $\angle AKB' + \angle BKA' = \angle ALB' + \angle BLA' = 180^\circ$. Докажите, что прямая KL равноудалена от точек A' , B' , C' .

И. Богданов, И. Макаров

5. См. задачу 4 для 10 класса.

6. На диагонали BD вписанного четырехугольника $ABCD$ выбрана такая точка K , что $\angle KCB = \angle ADC$. Пусть I и I' – центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X . Докажите, что точки A , X , I , D лежат на одной окружности.

А. Гаврилюк

7. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ таковы, что

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0 \text{ и } \frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1.$$

Докажите, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1.$$

М. Исаев

8. Имеются три комиссии бюрократов. Известно, что для каждой пары бюрократов из разных комиссий среди членов оставшейся комиссии есть ровно 10 бюрократов, которые знакомы с обоими, и ровно 10 бюрократов, которые незнакомы с обоими. Найдите общее число бюрократов в комиссиях.

М. Мурашкин, С. Берлов, И. Богданов

Заключительный этап

9 класс

1. Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз?

И. Агаханов, И. Богданов

2. Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что если $-2 \leq a + b + c \leq 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0; 2]$.

Д. Терѣшин

3. См. задачу M2107 «Задачника «Кванта».

4. В НИИЧАВО работают несколько научных сотрудников. В течение 8-часового рабочего дня сотрудники ходили в буфет, возможно по несколько раз. Известно, что для каждых двух сотрудников суммарное время, в течение которого в буфете находился ровно один из них, оказалось не менее x часов ($x > 4$). Какое наибольшее количество научных сотрудников могло работать в этот день в НИИЧАВО (в зависимости от x)?

Д. Терѣшин

5. Расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски назовем минимальное число ходов в пути короля между этими клетками. На доске отмечены три клетки, попарные расстояния между которыми равны 100. Сколько существует клеток, расстояния от которых до всех трех отмеченных равны 50?

И. Богданов

6. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Точка K – середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC . Оказалось, что прямая KY делит отрезок AK пополам. Чему может быть равен угол BAC ?

С. Берлов

7. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x , то можно дописать на нее число $2x + 1$ или $\frac{x}{x+2}$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала.

А. Храбров

8. В нашем распоряжении имеются 3^{2k} неотличимых по виду монет, одна из которых фальшивая – она чуть легче настоящей. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а один сломан (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, т.е. может быть как верным, так и искаженным в любую сторону, причем на разных взвешиваниях – искаженным по-разному). При этом неизвестно,

какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как определить фальшивую монету за $3k + 1$ взвешиваний?

К. Кнон

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.
2. См. задачу M2103 «Задачника «Кванта».
3. См. задачу M2105 «Задачника «Кванта».
4. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}$ и $b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$. Докажите, что $a_{2008} < 5$.

М. Мурашкин

5. Найдите все такие тройки действительных чисел x, y, z , что $1 + x^4 \leq 2(y - z)^2$, $1 + y^4 \leq 2(z - x)^2$, $1 + z^4 \leq 2(x - y)^2$.

Н. Агаханов, И. Богданов

6. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 , H – точка пересечения высот, O – центр описанной окружности, B_0 – середина стороны AC . Прямая BO пересекает сторону AC в точке P , а прямые BH и A_1C_1 пересекаются в точке Q . Докажите, что прямые HB_0 и PQ параллельны.

А. Полянский

7. См. задачу M2106 «Задачника «Кванта».

8. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести одну горизонтальную и одну вертикальную прямую

так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих двух прямых.

Р. Карасев

11 класс

1. См. задачу 2 для 9 класса.

2. Пете и Васе подарили одинаковые наборы из N гирь, в которых массы любых двух гирь различаются не более чем в 1,25 раз. Пете удалось разделить все гири своего набора на 10 равных по массе групп, а Васе удалось разделить все гири своего набора на 11 равных по массе групп. Найдите наименьшее возможное значение N .

П. Кожевников

3. См. задачу M2108 «Задачника «Кванта».

4. Каждую грань тетраэдра можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что весь тетраэдр можно поместить в шар радиуса $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Р. Карасев

5. Числа от 51 до 150 расставлены в таблицу 10×10 . Может ли случиться, что для каждой пары чисел a, b , стоящих в соседних по стороне клетках, хотя бы одно из уравнений $x^2 - ax + b = 0$ и $x^2 - bx + a = 0$ имеет два целых корня?

И. Богданов, О. Подлипский

6. См. задачу M2104 «Задачника «Кванта».

7. См. задачу M2109 «Задачника «Кванта».

8. См. задачу M2110 «Задачника «Кванта».

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Матдинов Марсель – Оренбург, гимназия 1,
Мокин Василий – Саратов, ФТЛ 1,
Медведь Никита – Москва, лицей «Вторая школа»,
Тыщук Константин – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бондаренко Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 10 классам –

Брагин Владимир – Снежинск, гимназия 127,
Гусев Даниил – Дзержинск, школа 2,
Бочкарев Михаил – Пермь, школа 9,
Царьков Олег – Москва, лицей «Вторая школа»;

по 11 классам –

Григорьев Сергей – Санкт-Петербург, лицей 533,
Волков Владислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бойкий Роман – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бабичев Дмитрий – Долгопрудный, ФМЛ 5.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Савенков Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Егоров Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Бернштейн Антон – Новосибирск, гимназия 1,
Кушниц Андрей – Иркутск, лицей 2,
Устинов Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Беляков Сергей – Омск, лицей 64,

Исаак Евгений – Курган, школа 38,
Пахарева Алексей – Ульяновск, гимназия 79;

по 10 классам –

Черкашин Данила – Санкт-Петербург, лицей 533,
Глюз Борис – Майкоп, гимназия 22,
Гусев Антон – Омск, лицей 64,
Ярославцев Иван – Москва, СУНЦ МГУ,
Антропов Александр – Пермь, школа 146,
Нижибицкий Евгений – Краснодар, школа 75,
Погорелов Дмитрий – Нижний Новгород, лицей 165 им. 65-летия ГАЗ,
Нечаев Станислав – Иркутск, гимназия 25,
Шабалин Филипп – Киров, ФМЛ;

по 11 классам –

Кевер Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Ардинацев Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Омельяненко Виктор – Белгород, лицей 38,
Поляков Владимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Кривошеин Виктор – Киров, ФМЛ,
Распопов Алексей – Ростов-на-Дону, ФМЛ 33,
Ромаскевич Елена – Москва, Московская гимназия на Юго-Западе 1543,
Кудык Никита – Омск, гимназия 117,
Фоминых Егор – Красноярск, школа 7,
Горин Евгений – Киров, ФМЛ,
Амиров Сергей – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Бажов Иван – Екатеринбург, гимназия 9.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Ерохин Станислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
 Меньщиков Андрей – Курган, школа 38,
 Николаев Семен – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
 Мифтахов Азат – Нижнекамск, лицей-интернат 24,
 Горбачева Ирина – Краснодар, школа 64,
 Голова Анна – Краснодар, школа 74,
 Калинин Иван – Москва, лицей «Вторая школа»,
 Климовский Иосиф – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
 Лысенко Николай – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
 Малясова Виктория – Ростов-на-Дону, Экономический лицей 14,
 Хараджиев Олег – Набережные Челны, гимназия 26,
 Бояров Игорь – Тольятти, лицей 51,
 Горбань Степан – Оренбург, гимназия 1,
 Ивлев Федор – Москва, Московская гимназия на Юго-Западе 1543,
 Сербина Дарья – Курган, гимназия 47,
 Балицкий Алексей – Железногорск Курганской обл., школа 11,
 Козачинский Александр – Москва, лицей «Вторая школа»,
 Максимова Марина – Краснодар, школа 42,
 Павленко Роман – Набережные Челны, гимназия 26,
 Печина Анна – Долгопрудный, ФМШ 5,
 Степанов Борис – Екатеринбург, гимназия 9;

по 10 классам –

Новожилов Игорь – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
 Курьянов Александр – Ярославль, школа 33,
 Лукьянец Евгений – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Соколов Вячеслав – Санкт-Петербург, гимназия 261,
 Аксенов Виталий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
 Гильман Михаил – Санкт-Петербург, лицей 533,
 Дедовик Юлия – Королев, лицей 4,
 Кондакова Елизавета – Москва, лицей «Воробьевы горы» 1525,
 Орлов Олег – Пермь, школа 146,
 Адуенко Александр – Брянск, гимназия 1,
 Сочнев Сергей – Майкоп, гимназия 22;

по 11 классам –

Архипов Дмитрий – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,
 Салихов Камилль – Казань, гимназия 102,
 Калачев Глеб – Москва, лицей «Вторая школа»,
 Котельский Артем – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
 Мазурик Александр – Анапа, школа 7,
 Милованов Алексей – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
 Селищев Виталий – Барнаул, школа 100,
 Атласова Мария – Якутск, РЛИ,
 Екимов Александр – Ижевск, ИЕГЛ «Школа-30»,
 Кац Дмитрий – Красноярск, ОУГ 13,
 Леонтьева Любовь – Уфа, гимназия 93,
 Титов Иван – Екатеринбург, гимназия 9,
 Филькин Евгений – Майкоп, гимназия 22,
 Кузнецов Тимофей – Новосибирск, лицей 130 им. академика М.А.Лаврентьева,
 Палецких Алексей – Санкт-Петербург, лицей 533,
 Сластенин Александр – Санкт-Петербург, школа 627,
 Харитонов Михаил – п. Удельная Московской обл., Удельнинская гимназия.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов,
 П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

XLII Всероссийская олимпиада школьников по физике

С 21 по 27 апреля 2008 года в Академгородке на базе Новосибирского государственного университета (НГУ) прошел заключительный этап Всероссийской физической олимпиады школьников. На него были приглашены призеры окружного этапа олимпиады текущего года и дипломанты трех степеней заключительного этапа олимпиады прошлого года. Всего в заключительном этапе олимпиады приняли участие 218 школьников.

Как обычно, олимпиада проходила в два тура – теоретический и экспериментальный. Задачи теоретического тура были разработаны Центральной методической комиссией, а задания экспериментального тура подготовили преподаватели и сотрудники НГУ.

Ниже приводятся условия задач и список призеров заключительного этапа олимпиады.

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. График скорости частицы

На рисунке 1 изображена зависимость скорости v частицы от времени t . Масштабы по осям заданы в условных едини-

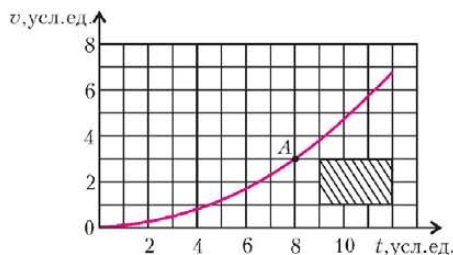


Рис. 1

цах. Известно, что площадь заштрихованного на рисунке прямоугольника равна 12 м, а ускорение частицы в точке A равно $a_A = 1,5 \text{ м/с}^2$.

Определите из этих данных:

- 1) масштабы по осям;
- 2) скорость частицы v_A в точке A;
- 3) путь, пройденный частицей от начала движения до достижения скорости v_A .

С.Козел

Задача 2. Разгон автомобиля

Автомобиль стартует с ускорением a_0 . Из-за сопротивления воздуха ускорение падает по мере увеличения скорости v по закону $a \sim (v_0 + v)^{-1}$, где v_0 — известный коэффициент.

1) Постройте график, изображающий связь между a и v , выбрав координаты так, чтобы он являлся отрезком прямой линии.

2) Через какое время t_0 после начала движения автомобиля достигается скорости v_0 ?

3) Определите зависимость скорости v от времени t и постройте (качественно) график $v(t)$.

В.Слободянин

Задача 3. Электрический мостик

Два идеальных амперметра (внутреннее сопротивление которых равно нулю) включены в цепь (рис.2). Сопротивления резисторов равны

$R_1 = 3 \text{ кОм}$, $R_2 = 3R_1$, $R_3 = 2R_1$ соответственно. Сопротивление переменного резистора R_x может принимать любые значения от нуля до бесконечности. Напряжение источника постоянного тока $U = 81 \text{ В}$.

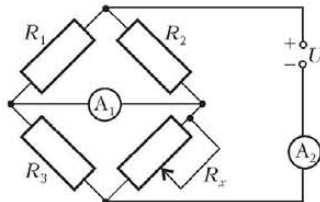


Рис. 2

Вычислите, при каких значениях сопротивления R_x :

1) сила тока I , протекающего через амперметр A_1 , минимальна и чему она равна;

2) сила тока I , протекающего через амперметр A_1 , максимальна и чему она равна;

3) сила тока I_0 , протекающего через амперметр A_2 , вдвое меньше $I_{\max}$ (см. пункт 2).

В.Слободянин

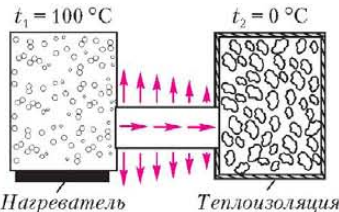


Рис. 3

Задача 4. Передача тепловой энергии

Имеются два сосуда. В первом из них находится кипящая вода ($t_1 = 100^\circ\text{C}$). Во втором теплоизолированном сосуде находится смесь воды и льда ($t_2 = 0^\circ\text{C}$). Сосуды соединены ме-

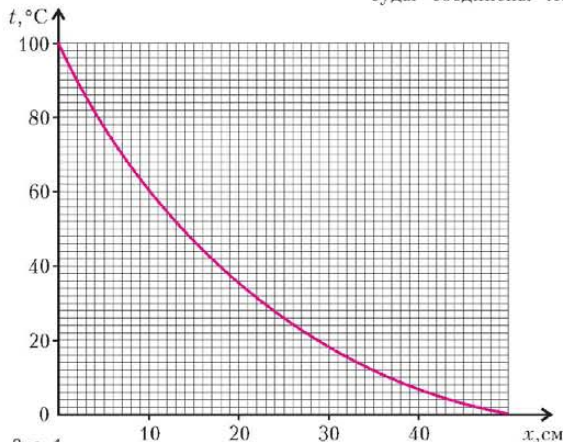


Рис. 4

таллическим стержнем длиной $L = 50 \text{ см}$, по которому тепловая энергия от кипящей воды передается таящему льду (рис.3). Стержень не теплоизолирован, и поэтому часть тепловой энергии рассеивается в окружающее пространство. Стрелками на рисунке указаны направления тепловых потоков. На приведенном графике (рис.4) показано распределение температуры вдоль стержня.

1) Определите графически, какая доля тепловой энергии, поступающей в левый конец стержня от сосуда с кипящей водой, рассеивается в окружающее пространство.

2) Во сколько раз быстрее растает весь лед во втором сосуде, если поверхность стержня покрыть теплоизолирующим слоем?

Примечание. Тепловой поток через слой вещества толщиной Δx пропорционален разности температур Δt между поверхностями, ограничивающими слой: $\Delta Q = \Delta t / \Delta x$.

С.Козел

10 класс

Задача 1. Колесо с ребордой

По рельсам катится с постоянной скоростью вагонетка. Радиус ее колеса равен r , а радиус реборды (бортика, выступающего за обод колеса и предохраняющего колесо от схода с рельса) существенно больше. В некоторый момент времени скорости двух диаметрально противоположных точек A и B обода равны по модулю v_A и v_B соответственно (рис.5).

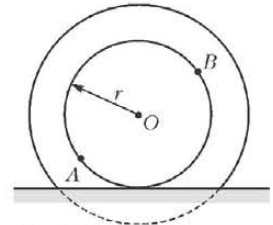


Рис. 5

1) С какой скоростью v_0 катится колесо?

2) В тот же момент времени скорость некоторой точки C , находящейся на реборде, направлена вертикально и равна v_C . Однозначно ли определяется положение этой точки?

3) Чему равна проекция ускорения a_{Cy} этой точки на вертикальную координатную ось?

В.Слободянин

Задача 2. Шайба на наклонной плоскости

На наклонной плоскости находится небольшая шайба массой m (рис.6). К шайбе прикреплен один конец легкой пружины жесткостью k и длиной L (в недеформированном состоянии). Другой конец пружины закреплен в некоторой точке O . Угол α наклона плоскости и коэффициент трения μ шайбы о плоскость связаны соотношением $\alpha = \mu$.

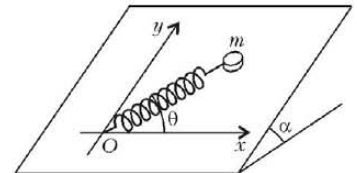


Рис. 6

Определите области, в которых шайба находится в состоянии равновесия, границы областей и изобразите их качественно на плоскости xu в двух случаях:

1) пружина подчиняется закону Гука как при растяжении, так и при сжатии;

2) пружина подчиняется закону Гука только при растяжении (например, пружина заменена легкой резинкой).

С.Козел

Задача 3. Сложный конденсатор

Сложный конденсатор состоит из четырех одинаковых пластин площадью $S = 1 \text{ м}^2$ каждая, расположенных па-

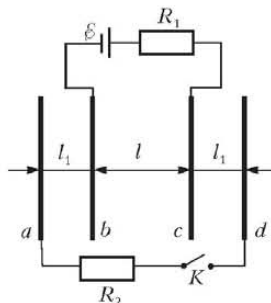


Рис. 7

параллельно друг другу (рис. 7). Расстояние между средними пластинами b и c равно $l = 2$ см. Расстояние между пластинами a и b , c и d равно $l_1 = l/2$. Пластины b и c подключены к идеальному источнику напряжения с $\varepsilon = 120$ В через резистор R_1 . В начальном состоянии ключ K разомкнут.

1) Нарисуйте эквивалентную схему сложного конденсатора после замыкания ключа K и найдите его емкость C .

2) Какое количество теплоты Q выделится на резисторах R_1 и R_2 (в сумме) при замыкании ключа K ?

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Указание. Воспользуйтесь законом сохранения энергии.

С.Козел

Задача 4. Минимальная скорость протона

1) Тонкое кольцо радиусом $R = 5$ см однородно заряжено зарядом $Q = +10^{-8}$ Кл (рис.8,а). Какую минимальную скорость $v_{\min}$ нужно сообщить

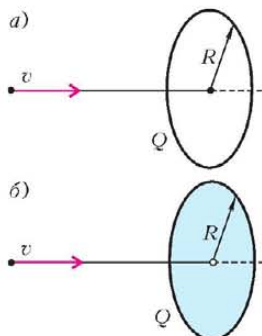


Рис. 8

протону, находящемуся вдали от кольца, чтобы он пролетел по оси кольца через его центр?

2) Пусть теперь заряд $Q = +10^{-8}$ Кл равномерно распределен по поверхности тонкого диска радиусом $R = 5$ см (рис.8,б). В центре диска имеется небольшое отверстие. Какую минимальную скорость нужно сообщить протону в этом случае, чтобы он пролетел через отверстие в диске?

Элементарный заряд $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса про-

тона $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

М.Соболев

Задача 5. Смесь воздуха и пара

См. задачу Ф2099 «Задачника «Кванта».

11 класс

Задача 1. Груз с пружинами

См. задачу Ф2096 «Задачника «Кванта».

Задача 2. Вращение заряженного цилиндра

См. задачу Ф2100 «Задачника «Кванта».

Задача 3. Заряженный мыльный пузырь

См. задачу Ф2097 «Задачника «Кванта».

Задача 4. Использование энергии морских волн

Первое устройство, вырабатывающее электричество для бакена за счет энергии морских волн, было создано в 1964 году. Схема бакена показана на рисунке 9. Воздух сначала засасывается при опускании поршня через клапан K_2 , затем сжимается и выпускается в рабочую полость через клапан K_1 .

Когда поверхность воды опускается, клапан K_1 закрыт, а клапан K_2 открыт. За один раз засасывается $V_1 = 0,233$ м³ воздуха при давлении $p_1 = 1,0 \cdot 10^5$ Па и температуре $t_1 = 7$ °С.

Когда поверхность воды начинает подниматься, клапан K_2 закрывается, и воздух адиабатически сжимается поршнем до давления $p_2 = 6,0 \cdot 10^5$ Па. После этого открывается клапан K_1 , и поршень продолжает двигаться вверх до тех пор, пока весь воздух не будет вытолкнут в рабочую полость. При этом воздух в рабочей полости приводит в движение турбину и генератор, вырабатывающий электричество. После открытия клапана K_1 давление воздуха над поршнем остается приблизительно неизменным.

Пренебрегая массой поршня и трением между поршнем и стенкой, определите, какую работу за один цикл совершает вода при подъеме поршня. Воздух можно считать идеальным двухатомным газом.

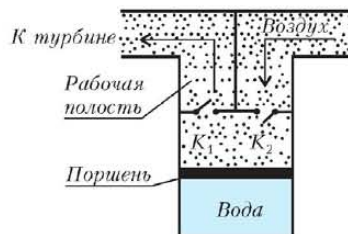


Рис. 9

Фольклор

Задача 5. Оптическая система

См. задачу Ф2101 «Задачника «Кванта».

Экспериментальный тур

9 класс

Задача 1. Найти «конфету»

В одной коробке к дну прилипла «конфета», другая такая же коробка пуста. Не открывая коробок, найдите ту, что с конфетой, определите как можно точнее положение центра конфеты и укажите его крестиком на крышке с миллиметровой. Обоснуйте и опишите свои действия.

Оборудование: скотч (тонкая клейкая лента), ножницы, нитки, стол, карандаш, линейка, две коробки с наклеенной миллиметровой бумагой.

Задача 2. Линейка и нить

Используя только предложенное оборудование, определите как можно точнее площадь всей поверхности отрезка деревянной линейки с кривым краем.

Оборудование: отрезок линейки, отрезок нити, скотч.

Примечание: используйте лишь отрезок имеющейся нити.

10 класс

Задача 1. Отношение ускорений

Одна цилиндрическая банка пуста, другая заполнена жидкостью. Не используя часов, найдите отношение ускоре-



ний банок при скатывании по наклонной доске. Проверьте, зависит ли это отношение от наклона доски.

Оборудование: пустая стеклянная банка и банка с жидкостью, портновский сантиметр, скотч, доска, бруски для изменения наклона доски и ловли банок.

Примечание: на доске разрешается сделать разметку карандашом.

Задача 2. Найти невидимое

У термометра открыта шкала в диапазоне от 30 до 50 °С. Нагрейте его в стакане с горячей водой до температуры чуть выше 50 °С, вытрите и вытрите. Положите его на салфетку. Проведите необходимые измерения так, чтобы установить зависимость скорости изменения показаний $\Delta T/\Delta t$ термометра от его показаний, т.е. от температуры T . Постройте график зависимости $\Delta T/\Delta t$ от T . Определите температуру воздуха в аудитории (обоснуйте способ и найдите значение).

Оборудование: термометр с частично заклеенной шкалой, стакан, источник горячей воды в аудитории, салфетки, секундомер.

11 класс

Задача 1. Лампа накаливания

На цоколе лампы от карманного фонарика указаны номинальные значения напряжения U_n и тока I_n . Рассчитайте по ним ее номинальное сопротивление R_n . Переключив мультиметр в режим измерения сопротивления, непосредственно определите сопротивление лампы R_0 . Найдите отношение сопротивлений R_n/R_0 и объясните, почему они так заметно отличаются.

Переключите один мультиметр в режим измерения тока, а другой – в режим измерения напряжения и снимите вольт-

амперную характеристику лампы (зависимость тока I через лампу от поданного на нее напряжения U) с помощью предлагаемого оборудования. Определите силу тока при $U = U_n$ и сопротивление лампы. Определите сопротивление $R_{\min}$ лампы при предельно малой силе тока и сравните его с R_0 . Если они отличаются друг от друга, то объясните, в чем причина этого различия.

Постройте график зависимости мощности лампы P от ее сопротивления R .

При температуре T , много большей комнатной температуры T_k (по шкале Кельвина), сопротивление нити накала $R = R_k T/T_k$, где R_k – сопротивление при комнатной температуре. Оцените, исходя из измерений, температуру нити накала при номинальном напряжении. Найдите мощность лампы при этой температуре и при температуре, меньшей на 30%.

Оборудование: лампочка от карманного фонарика, батарейка, два мультиметра, переменное сопротивление, соединительные провода, миллиметровая бумага.

Задача 2. Толщина стекла

Стекланный брусок с приклеенной на одну грань фольгой находится в оболочке, исключающей прямое измерение толщины. Противоположная грань покрыта полупрозрачным скотчем, в котором имеется небольшое отверстие. Используя предложенное оборудование, определите толщину стекла и его показатель преломления. Оцените погрешности.

Оборудование: стекланный брусок в оболочке, лазерная указка, карандаш, миллиметровая бумага, измерительный циркуль, скотч.

Примечание: у лазерных указок ограничен срок непрерывной работы, поэтому включайте их лишь на время измерений.

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Антоненко Даниил – Ростов-на-Дону, лицей 11,
Лавров Петр – Пермь, школа 3,
Горностаев Дмитрий – с. Шокша (Республика Мордовия),
Шокшинская школа,
Тарасов Артем – Киров, ФМЛ,
Стройнов Евгений – Рязань, лицей 52;

по 10 классам –

Бычин Андрей – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Бычина Ольга – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Дорошенко Андрей – Омск, школа 92,
Дубов Александр – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
Кравчук Петр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Мосунова Дарья – Саратов, лицей 15,
Старков Григорий – Ноябрьск, школа 7,
Трегубов Дмитрий – Киров, ФМЛ;

по 11 классам –

Голстикова Александра – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,
Ефимов Сергей – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Самойлов Леонид – Саратов, ФТЛ 1,
Мельников Игорь – Челябинск, лицей 39,
Зеленев Андрей – Киров, ФМЛ,
Пошакинский Александр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ».

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Смирнов Михаил – Саратов, лицей 3,

Кононов Яков – Улан-Удэ, Российская гимназия 59,
Матвеев Филипп – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сергеев Александр – Москва, лицей «Вторая школа»,
Коновалов Александр – Долгопрудный, школа 5,
Артамонов Дмитрий – Саратов, лицей 15,
Давыдов Иван – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Карелина Любовь – Екатеринбург, гимназия 9,
Николаев Егор – Йошкар-Ола, Политехнический лицей-интернат,
Усов Роман – Москва, лицей «Вторая школа»;

по 10 классам –

Григорьевых Данил – Ижевск, лицей 29,
Костарев Илья – Санкт-Петербург, лицей 533,
Кудряшова Нина – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
Землянов Владислав – Урай, гимназия,
Крупин Илья – Кирово-Чепецк, гимназия 1,
Усманова Динара – Миасс, лицей 6,
Берсенева Никита – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Власюк Александр – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Корольков Андрей – Химки, лицей 11,
Левдик Павел – Озёрск Челябинской обл., лицей 39,
Либерзон Даниил – Киров, ФМЛ,
Матросов Михаил – Нововоронеж, школа 2,
Сафошкин Алексей – Рязань, гимназия 2;

по 11 классам –

Матвеев Харитон – Москва, лицей 1581,
Кусков Дмитрий – Владимир, гимназия 23,
Макарова Мария – Москва, лицей 1557,
Фейсханов Рустем – Москва, лицей 1557,

Шульчевский Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
 Михайлов Александр – Челябинск, лицей 31,
 Тамбова Александра – Уфа, гимназия 93,
 Дроздук Ирина – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
 Кокшаров Григорий – Пермь, школа 146,
 Толстов Иван – Вологда, Вологодский многопрофильный
 лицей,
 Каплунович Петр – Челябинск, лицей 31,
 Пахомов Антон – Самара, ФТЛ 1,
 Алтеев Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
 Буслав Павел – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
 Черников Юрий – Дубна, лицей «Дубна».

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Казеев Никита – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
 Ковалев Кирилл – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,
 Гордиенко Екатерина – Москва, Центр образования «Пять-
 десят седьмая школа»,
 Анашкин Виктор – Бийск, Бийский лицей Алтайского края,
 Иванов Владимир – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
 Костина Елена – Киров, школа 21,
 Рыков Андрей – Снежинск, гимназия 127,
 Светогоров Александр – Обнинск, гимназия,
 Томас Павел – Новосибирск, лицей 130 им. академика
 М.А.Лаврентьева,
 Бормотов Виталий – Кумертау, школа 3,
 Домбровский Андрей – Москва, школа 1268,
 Маргаритов Артемий – Ярославль, школа 33 им. К.Марк-
 са,
 Офенгейм Дмитрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,

Фролов Федор – Вологда, Вологодский многопрофильный
 лицей;

по 10 классам –

Алюшин Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
 Буддашев Иван – Челябинск, лицей 31,
 Лисицкий Дмитрий – Белорецк, Белорецкая школа,
 Захаров Дмитрий – Жуковский, гимназия 1,
 Соболев Антон – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
 Мельников Михаил – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
 Толмачев Лев – Москва, школа 192,
 Гудименко Софья – Владивосток, школа 14,
 Киян Сергей – Тамбов, лицей 14,
 Унучек Дмитрий – Химки, лицей 12;

по 11 классам –

Плешаков Руслан – Владивосток, школа 25,
 Шалашугина Елена – Екатеринбург, СУНЦ УрГУ,
 Шевцов Сергей – Саратов, ФТЛ 1,
 Трихин Петр – Москва, ФМШ 5,
 Семенов Станислав – Саров, лицей 15,
 Байдасов Марат – Нижний Новгород, лицей 40,
 Фролов Владимир – Вологда, Вологодский многопрофиль-
 ный лицей,
 Барсков Кирилл – Омск, лицей 64,
 Лобанов Святослав – Уфа, гимназия 105,
 Маслов Ярослав – Новокузнецк, гимназия 44,
 Степанов Евгений – Москва, СУНЦ МГУ,
 Теретенков Александр – Пенза, гимназия 44,
 Щукин Вадим – Москва, лицей «Вторая школа».

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(с.м. «Квант» №4)

1. Одно из возможных решений для левого треугольника показано на рисунке 1. Для правого треугольника этого сделать нельзя, так как сумма цифр 45 нечетна, а сумма чисел любой пифагоровой тройки четна.

2. 210.
 Один из способов подсчета состоит в следующем. Разобьем все «несчастные счастливые» билеты на две пары симметричных групп. К первой паре отнесем билеты с номерами вида 666!?? и ??!666, где знак «?» обозначает любую цифру, а «!» – любую цифру, кроме цифры 6. Ко второй паре отнесем билеты с номерами вида !666! и !?666!. Подсчет в парах произведем отдельно.

В первой паре, последовательно придавая знаку «!» значения 0, 1, ..., 9, кроме цифры 6, будем искать количества билетов, у которых суммы двух оставшихся неопределенных цифр равны, соответственно, 18, 17, 16, ..., 9, кроме 12. Таковых набирается 48. Значит, всего билетов в первой паре 96. Аналогично поступаем с билетами второй пары – таких билетов набирается 114.

3. Указание. Рассмотрите два числа из тройки a, b, c , дающие один и тот же остаток при делении на 4.

4. 45°.

Пусть Q – точка окружности, диаметрально противоположная точке K (рис.2). Поскольку угол QAK – прямой, то $AQ \parallel LM$, откуда

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CQ}$ как дуги между параллельными хордами. Но в силу симметрии чертежа относительно диагонали квадрата $\overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{QD}$, поэтому $\overset{\frown}{DQ} = \overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{AQ} = 45^\circ$.

5. В южном полушарии стрелки часов наверняка вращались бы в противоположную сторону, т.е. «против часовой стрелки».

Объясним, почему в наших часах стрелки вращаются «по часовой стрелке». Первыми часами были солнечные. В механических часах было выбрано такое же направление вращения стрелок, как и направление вращения тени от штырька в солнечных часах.

В северном полушарии тень от штырька вращается «по часовой стрелке» (проверьте это на опыте), вот почему в этом же направлении вращаются и стрелки наших часов.

А в южном полушарии тень от штырька вращается «против часовой стрелки» (убедитесь в этом путем рассуждений). Поэтому, если бы изобретатель стрелочных часов жил в южном полушарии, он бы наверняка выбрал именно это направление вращения.

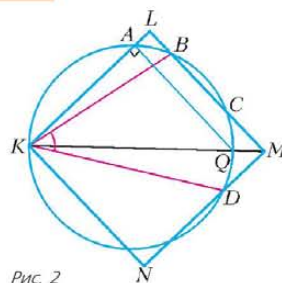


Рис. 2

ЛЕТНИЙ ТУРНИР ИМЕНИ А.П.САВИНА
«МАТЕМАТИКА 6–8»

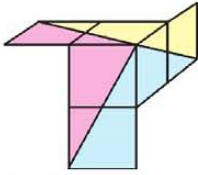


Рис. 3

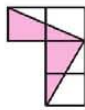


Рис. 4

7. Да, можно (см. рис. 3).
8. 80° .

По свойствам серединных перпендикуляров $MA = MB$, $MC = MD$, поэтому $\triangle AMD = \triangle BMC$ по трем сторонам, и $\angle MAD = \angle MBC$. Обозначим $\angle MAB = \angle MBA = x$. За-

метим еще, что точки C и D лежат по одну сторону прямой AB . Для расположения точки M есть два случая.

Случай 1. Пусть точка M и точка C лежат по разные стороны прямой AB (рис. 4).

На первый взгляд, $\angle MAD = \angle MAB + \angle DAB$ и $\angle MBC = \angle MBA + \angle CBA$. Однако углы в левых частях равны, а суммы не равны: $\angle MAB + \angle DAB = x + 85^\circ < x + 115^\circ = \angle MBA + \angle CBA$. Как так, ведь стороны-то совпадают? Мы забыли, что луч AB (или луч BA) не обязан лежать внутри угла, и значит, сумма может быть не равна углу, а дополнять его до 360° . Обе суммы дополнять не могут, так как тогда они снова должны быть равны между собой. Значит, одна сумма равна углу, а другая угол дополняет. При этом дополняющая сумма больше: углы у нас меньше 180° , а дополняющая сумма больше 180° . Итак, $\angle MAD = 85^\circ + x$, значит, и $\angle MBC = 85^\circ + x$. Подставляя это в равенство $\angle MBC + \angle MBA + \angle CBA = 360^\circ$, получим уравнение $(85^\circ + x) + x + 115^\circ = 360^\circ$, откуда $x = 80^\circ$.

Рис. 4

Случай 2. Пусть точки M , C и D лежат по одну сторону от прямой AB . Тогда $\angle MAD$ равен разности (в том или ином порядке) углов $\angle MAB$ и $\angle DAB$, т.е. $\angle MAD = 85^\circ - x$ или $\angle MAD = x - 85^\circ$. Аналогично, $\angle MBC = 115^\circ - x$ или $\angle MBC = x - 115^\circ$. Единственная возможность равенства углов: $115^\circ - x = x - 85^\circ$, откуда $x = 100^\circ$. Это не подходит, так как мы ищем угол при основании равнобедренного треугольника, а он острый. Значит, такое расположение точки M невозможно.

17. Пусть мы хотим представить число $m < N = p_1 p_2 \dots p_l$. Докажем индукцией по N . База: $N = 6$. Тогда $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 3 + 1$, $5 = 3 + 2$. Переход от $N_1 = p_1 p_2 \dots p_k$ к $N_2 = p_1 p_2 \dots p_k p_{k+1}$. Если $m < N_1$, то число можно представить в виде суммы различных делителей N_1 (являющихся также и делителями числа N_2) по предположению. Если $m \geq N_1$, то $m = p_{k+1} s + d$, где $d < p_{k+1}$, $s < p_1 p_2 \dots p_k$. Поскольку $p_{k+1} < p_1 p_2 \dots p_k$ (докажем потом), то и $d < p_1 p_2 \dots p_k$, поэтому и s и d мы можем представить в виде суммы различных делителей числа N_1 по предположению. Домножив почленно на p_{k+1} представление для s и сложив его с представлением для d , получим представление для m . В нем все слагаемые различны: внутри группы они и были различны, а слагаемые из разных групп различны, поскольку после домножения слагаемые из группы для s все делятся на p_{k+1} , а из группы для d — не делятся.

Осталось показать, что $N_1 = p_1 p_2 \dots p_k > p_{k+1}$. Рассмотрим число $p_1 p_2 \dots p_k - 1$. Оно взаимно просто с $p_1, p_2, \dots, p_k$. Поэтому у $N_1 - 1$ есть простой делитель, отличный от $p_1, p_2, \dots, p_k$ и, значит, не меньший p_{k+1} . Тем более $N_1 > p_{k+1}$.

18. При $v \geq 3,5$ м/с.

Пусть есть кошка, способная бегать со скоростью до 3,5 м/с. Посадим ее в точку K , середину отрезка OC , и поставим сторожить проход через точки O и C (рис. 5). А именно, если мышка извне отрезков, выходящих из O или C (т.е. с ломаной $DEFAB$), попытается пройти через одну из этих точек, то кошка ее перехватит. Например, как только мышка через точку E двинется к O , кошка тоже двинется к O с вдвое меньшей скоростью, чем мышка. Если же мышка двинется назад к E , то и кошка — назад к K . Посадим теперь вторую кошку в O , и пусть она идет к мышке кратчайшим путем. Тогда, как бы медленно ни двигалась вторая кошка, мышка сначала будет вытеснена на периметр шестиугольника, а если она попала на ломаную BCD — то с этой ломаной на ломаную $DEFAB$. Далее, идя по периметру, вторая кошка рано или поздно вытеснит мышку с периметра на какой-то из отрезков, выходящих из O или C , и мышка на таком отрезке окажется зажатой между двумя кошками и будет поймана. Попытки «сбежать» на такой отрезок раньше ничего мышке не дадут, потому что первая кошка не позволит покинуть отрезок с другой стороны, и мышке придется вернуться на контур.

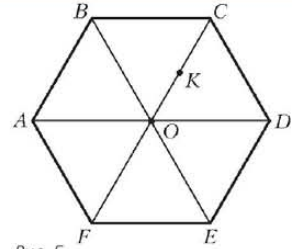


Рис. 5

Теперь пусть мышка бегает более чем вдвое быстрее любой кошки. Покажем, как она сможет убежать от кошек сколь угодно долго. Назовем вершины шестиугольника и его центр развилками: из каждой выходит не менее 3 коридоров. Пусть мышка сидит в некоторой развилке X и к ней по какому-нибудь коридору приближается кошка. Есть еще два коридора, которые сходятся в X : обозначим их XY и XZ . Если Y и Z связаны коридором, то пусть P — середина этого коридора. Добавим к XY половинки коридоров, выходящих из Y , а к XZ — половинки коридоров, входящих из Z , получим две «метелки», у которых общей точкой может быть только P (на рисунке 6 мышка сидит в B , кошка приближается по коридору AB , метелки насажены на отрезки BO и BC и обозначены красным и синим цветом соответственно). По крайней мере на одной из двух метелок нет другой кошки (исключая, быть может, точку P). Тогда мышка должна бежать к соответствующей развилке Y или Z , куда ни вторая, ни, тем более, первая кошка за это время добежать не успеют. Далее мышка продолжает убежать от кошек тем же способом.

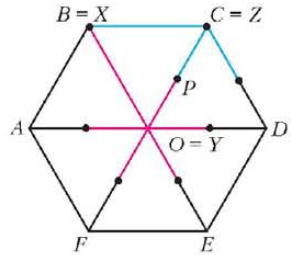


Рис. 6

29. 4949 королей.

30. Для треугольника решение очевидно, поэтому рассмотрим многоугольник с более чем 3 сторонами. Пусть B — одна из вершин многоугольника.

Рассмотрим группу из всех разбиений, где нет ни одной выходящей из B диагонали. Пусть A и C — соседние с B вершины. Заметим, что если в группе есть разбиение без диагонали AC , то можно провести и AC : ведь если нет диагоналей из B , то AC никого не пересечет. Значит, можно всю группу разбить на пары разбиений, где набор проведенных диагоналей отличается только на AC . Но тогда в каждой паре в одном разбиении четное число многоугольников, а в другом — нечетное. Следовательно, в группе тех и других разбиений поровну.

Проведем теперь произвольный набор выходящих из B диагоналей и рассмотрим группу из всех разбиений, которые можно получить, добавляя к этому набору любые диагонали, кроме выходящих из B . Если в набор вошли не все возможные диагонали из B , то добавить ничего нельзя, и вся группа состоит из одного разбиения. Если же не все, то среди частей разбиения есть многоугольник с более чем 3 сторонами. Как и выше, отметим в нем соседние с B вершины A и C , и разобьем всю группу на пары, где набор проведенных диагоналей отличается только на AC . Снова получим, что в каждой группе поворну разбиений на четное и на нечетное число многоугольников.

Остался только случай, когда в набор вошли все возможные диагонали из B . Тогда добавить ничего нельзя, и именно на это единственное разбиение отличаются количества способов разбить на четное и нечетное число многоугольников.

31. Пусть в треугольнике ABC (рис.7) углы B и C — острые, M и N — середины сторон AB и AC , D и E — такие точки на стороне BC , что $DMNE$ — прямоугольник, O — точка пересечения его диагоналей. Выберем на отрезке DE такую точку H , что $BD = DH$. Поскольку $DE = MN =$

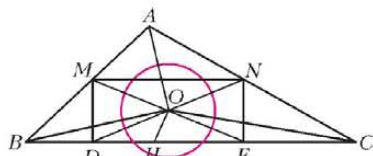


Рис. 7

$= BC/2$, то $HE = EC$. Разобьем треугольник ABC на треугольники BOH , COH , AOC и AOB . Их медианы OD , OE , ON и OM равны между собой как половинки диагоналей прямоугольника. Точки пересечения медиан каждого треугольника удалены от точки O на $2/3$ длины медианы и поэтому лежат на окружности с центром O .

32. Через 35 минут.

То что общая дорожка составляет только часть пути джентльменов (рис.8), создает неприятную для решения нерегулярность встреч. Можно, конечно, учесть это с помощью дополнительных неравенств, но этот хлопотливый метод не для Холмса. В его духе привлечь подставное лицо и попросить подыграть. Итак, попросим садовника погулять вокруг

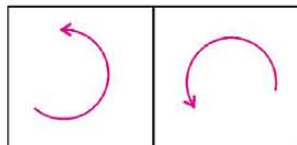


Рис. 8

газона Холмса симметрично Ватсону относительно общей стороны. Тогда садовник будет ходить вокруг газона по часовой стрелке и встречаться с Холмсом регулярно, через равные промежутки времени. А поскольку по общей дорожке садовник и Ватсон идут бок о бок, то Ватсон встречается с Холмсом тогда и только тогда, когда садовник встречается с Холмсом на общей дорожке.

Итак, поскольку скорости Холмса и садовника относятся как 6:5, то и между очередными встречами с садовником Холмс успевает пройти $6/11$ периметра квадрата, а садовник $5/11$. С точки зрения движения по дорожке квадрат можно считать кругом. Отмеряя от произвольной точки по $6/11$ периметра, мы отметим ровно 11 точек встреч, которые разбивают круг на 11 равных частей. Назовем P_1 точку какой-нибудь их встречи и обозначим еще 10 точек $P_2, \dots, P_{11}$, шагая от точки P_1 против часовой стрелки по $1/11$ круга. Встречи Холмса и садовника происходят через равные промежутки времени T последовательно в точках $P_1, P_7, P_2, P_8, P_3, P_9, P_4, P_{10}, P_5, P_{11}, P_6, P_1$ и т.д.

Общая дорожка составляет ровно четверть круга. На нее могут попасть 2 или 3 отмеченные точки (4 точки уже не помес-

тятся, так как расстояние между крайними $3/11 > 1/4$, а для 2-й точки всегда найдется место, поскольку первая разделила дорожку на два промежутка и один из промежутков будет не короче $1/8 > 1/11$). Если на общей дорожке лежат какие-то три последовательные точки (пусть P_1, P_2 и P_3), то встречи в этих точках (а, значит, и с Ватсоном) происходят через промежутки времени $2T, 2T, 7T, 2T, 2T, 2T, \dots$. Поэтому $2T = 10$ мин, и следующая встреча случится через $5T = 35$ мин. Если же на общей дорожке лежат две последовательные точки (пусть P_1, P_2), то встречи в этих точках происходят через промежутки времени $2T, 9T, 2T, 9T, 2T, 9T, \dots$. Это противоречит двум встречам подряд через равные промежутки времени, поэтому такой случай невозможен.

33. Не обязательно.

Это может быть, например, Г-образный шестиугольник G , составленный из 1004 кирпичей: прямоугольников размера $1 \times \sqrt{502}$ (рис.9).

Заметим, что из двух таких G составляется большой прямоугольник размера $1004 \times 2\sqrt{502}$, подобный кирпичу (с коэффициентом $2\sqrt{502}$). Зна-

чит, каждый кирпич разрезается на 2 шестиугольника, подобных G . Итого, G можно разрезать на $2 \cdot 1004 = 2008$ многоугольников, подобных исходному G .

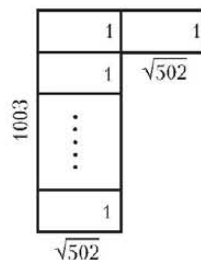


Рис. 9

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Загрязненный снег больше поглощает солнечной энергии, чем отражает, а чистый снег — наоборот.
2. Чтобы поглощались «боковые» лучи, идущие от посторонних источников света.
3. Кожа нечищеного сапога бугристая и рассеивает свет. Вязкое вещество ваксы сглаживает шероховатости и укладывает торчащие ворсинки кожи. Растирание щеткой уменьшает неровности и превращает поверхность из матовой в блестящую.
4. Заливая неровности, образуемые красками, лак делает поверхность картины зеркальной. В этом случае, смотря на нее с удачно выбранной позиции, можно избежать отраженных бликов и помех от рассеянного красками света, благодаря чему цвета картины выигрышают в насыщенности.
5. Лучшее рассеивает свет чертежная бумага, поскольку в этом случае свет рассеивается более мелкими неровностями поверхности.
6. Волокна, из которых состоит бумага, рассеивают свет, хотя они и прозрачны. Масло же заполняет поры между волокнами, и рассеяние света уменьшается.
7. Шероховатая поверхность сухого материала способствует рассеянию отраженного света. Если материал смочить, то, во-первых, уменьшается шероховатость, а во-вторых, в тонкой пленке воды свет испытывает многократное полное внутреннее отражение и поглощается.
8. Размеры неровностей на поверхности металлического листа велики по сравнению с длиной волны света, но малы по сравнению с длинами радиоволн.
9. Свинец и соли свинца хорошо поглощают рентгеновские лучи.
10. Матовый плафон, не изменяя величины светового потока, уменьшает яркость нити накала лампочки.
11. Голубая часть спектра излучения нити рассеивается на матовой поверхности плафона сильнее, чем красная.
12. В этих случаях предметы освещаются лишь небесным светом, цвет которого голубой за счет рассеяния света в атмосфере.

13. В обоих случаях световые лучи испытывают преломление и отражение на множестве случайно расположенных кристалликов или капелек, что приводит к полному рассеянию света, причем примерно с одинаковой интенсивностью для всех длин волн, из-за чего снег, туман и облака воспринимаются белыми.

14. Крупные частицы – песок, ил, пузырьки воздуха – способны рассеивать более длинные (зеленые) волны.

15. На темном фоне мы наблюдаем дым в рассеянном свете, а наиболее сильно рассеивается свет синей части спектра. На фоне светлого неба дым виден в проходящем свете, в котором относительная доля синей составляющей спектра по той же причине уменьшается.

16. Проникающее в парник солнечное излучение поглощается землей, а инфракрасное излучение земли не пропускается из парника стеклом.

17. Мясо, а главным образом содержащаяся в нем вода, поглощает высокочастотное излучение, которое проникает в него на глубину порядка нескольких сантиметров.

18. Из-за рассеяния в земной атмосфере коротковолновой части спектра Земля из космоса (как и небо над нами) имеет голубой цвет.

19. На Луне нет атмосферы и практически нет рассеяния света. На Марсе из-за частых пылевых бурь атмосфера насыщена мельчайшими частицами красного, как и почва планеты, цвета.

20. Когда звезда видна у горизонта, свет от нее проходит почти в 40 раз больший путь в атмосфере, чем когда она находится в зените, и испытывает большее поглощение. Кроме того, собственное свечение атмосферы по той же причине больше у горизонта, чем вблизи зенита.

21. В сумерках освещение вызывается солнечным светом, рассеянным атмосферой на большой высоте – там, где Солнце пока еще не скрылось за горизонт. Из-за отсутствия на Луне атмосферы на ней нет и сумерек.

22. Луна отражает всего около 7% падающего на нее света, а Земля – около 40%.

23. Даже яркие звезды на фоне рассеянного атмосферой солнечного света не видны. Радиоастрономам же не мешает рассеянное радиоизлучение Солнца, поскольку оно очень мало.

Микроопыт

Насыщенный голубой цвет кристалликов медного купороса при их дроблении сменится на белесый светло-бирюзовый из-за сильного рассеяния падающего на них света – в измельченных кристалликах свет не проникает на большую глубину и поэтому мало поглощается.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1. $T = 112 \text{ Н}$. 2. $v = 9 \text{ м/с}$. 3. $v = 3 \text{ м/с}$.
4. $\chi = 96 \text{ Н/м}$. 5. $l = 9 \text{ м}$. 6. $v_{\min} = 6 \text{ м/с}$.

XXXIV ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Заключительный этап

9 класс

1. Существуют.

Подходят, например, числа $\underbrace{1, \dots, 1}_{10 \text{ чисел}}, 4, 4, 4, 250$.

2. Обозначим $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Пусть x_1, x_2, x_3 – его корни; тогда $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Заметим, что $P(1) = 1 + a + b + c$, поэтому $-1 \leq (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \leq 1$.

Этого не может быть, если все три числа $1 - x_1, 1 - x_2, 1 - x_3$ по модулю больше 1. Значит, для какого-то корня, пусть x_1 , имеем $|1 - x_1| \leq 1$, или $0 \leq x_1 \leq 2$, что и требовалось.

4. Пусть в НИИЧАВО в тот день работали n человек. По условию, для каждой пары сотрудников время, когда в буфете присутствовал ровно один из них, не меньше x . Суммируя все эти промежутки времени по всем парам, получим число

$$S \geq \frac{n(n-1)}{2}x.$$

Отметим моменты, когда в буфет кто-то входил или из него кто-то выходил. Рабочий день разбился на m промежутков с длинами $t_1, \dots, t_m$. Пусть на промежутке с номером i в буфете находилось k_i человек. Тогда этот промежуток будет посчитан ровно для тех пар сотрудников, в которых ровно один присутствует в буфете; таких пар $k_i(n - k_i)$. Поэтому этот промежуток внесет в S вклад $t_i k_i(n - k_i)$. Заметим, что выражение $k(n - k)$ достигает максимума при $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, т.е. вклад не больше $t_i \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$. Поскольку $t_1 + \dots + t_m = 8$, то, суммируя, получаем, что

$$8 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \geq S \geq \frac{n(n-1)}{2}x.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть n четно, $n = 2l$. Тогда получаем $8l^2 \geq l(2l-1)x$, т.е.

$$(2x-8)l \leq x, \quad l \leq \frac{x}{2x-8}, \quad n \leq 2 \left\lfloor \frac{x}{2x-8} \right\rfloor.$$

2. Если же $n = 2l + 1$, то получаем $8l(l+1) \geq l(2l+1)x$, т.е.

$$(2x-8)l \leq 8-x, \quad l \leq \frac{8-x}{2x-8},$$

$$n \leq 2 \left\lfloor \frac{8-x}{2x-8} \right\rfloor + 1 = 2 \left\lfloor \frac{x}{2x-8} \right\rfloor - 1.$$

Таким образом, в любом случае $n \leq 2 \left\lfloor \frac{x}{2x-8} \right\rfloor$.

Покажем, что эта оценка достигается. Положим

$n = 2l = 2 \left\lfloor \frac{x}{2x-8} \right\rfloor$. Рассмотрим все способы отметить l сотрудников из $n = 2l$; пусть число таких способов равно K . Разобьем 8-часовой интервал на K отрезков, каждый длиной $\frac{8}{K}$ часов. Каждому отрезку сопоставим группу из l человек; пусть в течение этого отрезка времени ровно эти l человек и находились в буфете. Из симметрии ясно, что для любых двух сотрудников время, в течение которого ровно один из них был в буфете, одно и то же – пусть оно равно y . Тогда в подсчете, сделанном выше, все неравенства обратятся в равенства, и мы получим $8l(2l-l) = S = \frac{2l(2l-1)}{2}y$. Отсюда

$$y = \frac{8l}{2l-1} \geq x \quad (\text{последнее неравенство равносильно}$$

$$l \leq \frac{x}{2x-8}), \quad \text{что и требовалось.}$$

Замечание. При $x \leq 4$ число сотрудников может быть каким угодно.

5. Одна.

Рассмотрим произвольные две клетки. Пусть разница абсцисс их центров равна $x \geq 0$, а разница ординат $y \geq 0$. Тогда ясно, что король может дойти от одной из этих клеток до другой за $\max(x, y)$ ходов и не может за меньшее число, т.е. расстояние между этими клетками равно $\max(x, y)$. Будем обозначать расстояние между A и B через $\rho(A, B)$.

Пусть отмечены клетки A, B, C . Тогда для каждой пары этих

клеток существует координата, в которой они различаются ровно на 100. Для двух пар клеток это будет одна и та же координата; для определенности пусть это пары (A, B) и (A, C) , различающиеся по горизонтали. Тогда абсциссы точек B и C либо различаются на 200, либо совпадают. Первый случай невозможен, так как расстояние между B и C равно 100. Значит, их абсциссы совпадают, а поэтому ординаты отличаются на 100. Тогда (с точностью до симметрии) можно считать, что клетки имеют координаты $B(0, 0)$, $C(0, 100)$, $A(100, x)$ (при этом, естественно, $0 \leq x \leq 100$, иначе $\rho(A, B)$ или $\rho(A, C)$ больше 100).

Рассмотрим точку X , отстоящую от точек A, B и C на 50. Ее абсцисса должна быть равна 50, иначе $\rho(X, B) > 50$ или $\rho(X, A) > 50$. Аналогично, ордината точки X равна 50, иначе $\rho(X, B) > 50$ или $\rho(X, C) > 50$. Значит, координаты X равны $(50, 50)$, причем, как нетрудно видеть, эта клетка подходит. Таким образом, искомая клетка ровно одна.

6. 120°.

Пусть отрезки XU и AI пересекаются в точке S (рис.10). Как известно, $KI = KA$, т.е. высота KT треугольника AKI является его медианой. Так как $XU \perp AI$, то $XU \parallel KT$, а поскольку

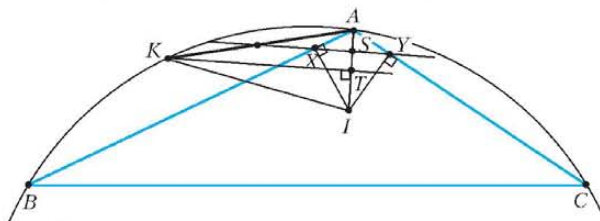


Рис. 10

ку XU делит сторону AK пополам, то XU — средняя линия в треугольнике AKT . Значит, $AS/SI = 1/3$; при этом XS — высота в прямоугольном треугольнике AXI , откуда $AS/SI = (AX/XI)^2$, $\tan \angle XAI = XI/AX = \sqrt{3}$, $\angle XAI = 60^\circ$, и $\angle BAC = 2\angle XAI = 120^\circ$.

7. Можно считать, что «лишних» чисел на доску не выписывалось, т.е. все числа «участвовали» в получении числа 2008. Заметим, что все выписанные числа положительны.

Пусть в некоторый момент на доске написано рациональное

число, в несократимой записи имеющее вид $x = \frac{p}{q}$. Тогда можно дописать число $2x + 1 = \frac{2p+q}{q}$ или $\frac{x}{x+2} = \frac{p}{p+2q}$.

Заметим, что если какая-нибудь из этих дробей сократима, то только на 2. Действительно,

$$\text{НОД}(2p+q, q) = \text{НОД}(2p, q) \leq 2\text{НОД}(p, q) = 2 \quad \text{и}$$

$$\text{НОД}(p, p+2q) = \text{НОД}(p, 2q) \leq 2\text{НОД}(p, q) = 2.$$

Поэтому сумма числителя и знаменателя в несократимой записи нового числа равна либо

$$(2p+q)+q = p+(p+2q) = 2(p+q) \quad \text{либо} \quad \frac{2(p+q)}{2} = p+q.$$

Таким образом, сумма числителя и знаменателя в несократимой записи либо не изменяется, либо удваивается. Так как в конце она оказалась равной $2008 + 1 = 2009$, то удваиваться она не могла, и изначально она тоже была равна 2009. Так как исходное число было натуральным, то его знаменатель был равен 1, а числитель, соответственно, $2009 - 1 = 2008$, что и требовалось.

8. Будем обозначать фальшивую монету ФМ.

Пусть ФМ находится среди 3^d монет. Заметим, что если мы положим на чашки исправных весов по 3^{d-1} монет, то при

любом исходе взвешивания число монет, которые могут оказаться фальшивыми, окажется равным 3^{d-1} .

Лемма. Из 3^{2k} монет за $3k$ взвешиваний можно либо найти фальшивую, либо найти три монеты, среди которых находится фальшивая, и при этом найти одни исправные веса.

Доказательство. Индукция по k .

База при $k = 1$. Расположим монеты в виде квадрата 3×3 . Занумеруем его строки и столбцы цифрами от 1 до 3, а монеты — парами этих цифр соответственно; например, монета в первой строке и втором столбце получит номер 12.

Сравним монеты первой и второй строчек на первых весах; затем сравним монеты первого и второго столбца на вторых весах. Предположим, что первые и вторые веса исправны. Тогда в любом случае эти взвешивания позволяют однозначно определить ФМ. Можно считать, что это монета 11. Тогда, если сломаны первые веса, то ФМ находится в первом столбце, а если вторые — то в первой строке.

Третьим взвешиванием на последних весах сравним $12 + 13$ с $21 + 31$. Если веса в равновесии, то ФМ может оказаться только 11; зато мы не знаем, какие веса сломаны. Пусть одна из чаш оказалась легче (например, $12 + 13$). Это означает, что показания третьих весов противоречат показаниям вторых, а тогда первые веса — исправные, и мы нашли три монеты (лежащие в первой строке), среди которых обязана быть ФМ.

Переход. Пусть $k > 1$, и у нас есть 3^{2k} монет. Объединим их в группы по 9 штук, назвав каждую *новой монетой*. По предположению индукции, мы можем за $3k - 3$ взвешивания выяснить либо фальшивую среди этих $3^{2(k-1)}$ новых монет, либо найти исправные веса и три новые монеты, среди которых есть фальшивая.

В первом случае, пользуясь утверждением базы индукции для этих 9 монет (составляющих найденную новую монету), мы можем за 3 взвешивания сделать требуемое.

Во втором мы получили исправные веса и 27 кандидатов на фальшивую монету. Тогда за следующие 3 взвешивания на исправных весах мы уменьшим количество кандидатов до 9, до 3 и до 1, т.е. найдем фальшивую. Переход, а вместе с ним и лемма, доказаны.

Теперь легко получить решение задачи. Сделаем $3k$ взвешиваний согласно лемме. Если мы уже нашли фальшивую монету, то мы совершили требуемое. Иначе мы нашли исправные веса и 3 монеты, среди которых есть фальшивая. Тогда за последнее взвешивание на этих весах мы из этих 3 монет найдем фальшивую.

Замечание. Улучшив процедуру, можно добиться даже меньшего числа взвешиваний. Например, можно показать, что из $3^{n(n+1)}$ монет фальшивая находится за $(n+1)^2$ взвешиваний.

10 класс

4. Заметим, что $a_n, b_n > 0$.

Докажем индукцией по n , что $\frac{1}{a_n+1} - \frac{1}{b_n+1} = \frac{1}{6}$. База при

$n = 1$ очевидна: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Пусть при некотором n это верно.

Тогда имеем

$$\frac{1}{a_{n+1}+1} - \frac{1}{b_{n+1}+1} = \frac{b_n}{1+a_n+b_n+a_nb_n} - \frac{a_n}{1+a_n+b_n+a_nb_n} = \frac{b_n-a_n}{(1+a_n)(1+b_n)} = \frac{1}{a_n+1} - \frac{1}{b_n+1}.$$

Переход доказан.

Итак, при любом n мы получили $\frac{1}{a_n+1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{b_n+1} > \frac{1}{6}$, т.е.

$a_n + 1 < 6$ и $a_n < 5$, что и требовалось.

5. $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$, $(0, -1, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$.

Пусть для определенности $x \geq y \geq z$.

Поскольку $0 \leq (x^2 - 1)^2 = (x^4 + 1) - 2x^2$, мы имеем

$2x^2 \leq 1 + x^4 \leq 2(y - z)^2$, откуда получаем $|x| \leq y - z$ и, аналогично, $|z| \leq x - y$. Тогда $|z| + |x| \leq (x - y) + (y - z) = x - z$. Это возможно только если $x \geq 0$, $z \leq 0$, при этом неравенство обращается в равенство. Значит, и все промежуточные неравенства также обращаются в равенства, т.е. $2x^2 = 1 + x^4$, $2z^2 = 1 + z^4$, откуда $x^2 = z^2 = 1$ и $x = 1$, $z = -1$. Кроме того,

$|x| = y - z$, откуда $y = 0$.

Проверка показывает, что этот ответ подходит.

6. Пусть точка O_1 — середина отрезка BH (рис.11). Так как $\angle BAH = \angle B_0C_1H = 90^\circ$, то O_1 является центром окружности, проходящей через точки A_1 , B , C_1 и H .

Так как прямоугольные треугольники BAA_1 и BCC_1 подобны, то

$AB/A_1B = CB/C_1B$. Отсюда следует, что треугольники

A_1BC_1 и ABC подобны. Заметим, что BQ и BP , а также BO_1 и BO — пары соответствующих отрезков в подобных треугольниках A_1BC_1 и ABC , откуда $BO_1/BO = BQ/BP$, следовательно, $OO_1 \parallel PQ$.

Пусть B' — точка описанной окружности треугольника ABC , диаметрально противоположная точке B ; тогда O — середина отрезка BB' и $\angle BAB' = \angle BCB' = 90^\circ$. Имеем: $\angle ACB' = \angle BCB' - \angle BCA = 90^\circ - \angle BCA = \angle A_1AC$, откуда $AA_1 \parallel CB'$. Аналогично, $CC_1 \parallel AB'$. Таким образом, $AHC'B'$ — параллелограмм и B_0 — его центр, а значит, лежит на диагонали HB' . В треугольнике BHB' отрезок OO_1 является средней линией, поэтому $OO_1 \parallel HB_0$. Итак, $OO_1 \parallel HB_0 \parallel PQ$.

8. Рассмотрим конечное множество прямых $V = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$, содержащих горизонтальные стороны данных прямоугольников и конечное множество прямых $H = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$, содержащих вертикальные стороны прямоугольников. Будем считать, что $h_1, h_2, \dots, h_k$ занумерованы снизу вверх, а $v_1, v_2, \dots, v_l$ занумерованы слева направо. Пару прямых (h, v) , где $h \in H$, $v \in V$, назовем *удачной*, если все прямоугольники, не пересекающие ни h , ни v (если такие найдутся), расположены ниже h и левее v . Удачные пары существуют, например пара (h_k, v_l) . Среди всех удачных пар выберем пары (h_m, v) , в которых h_m самая низкая, а среди всех удачных пар вида (h_m, v) выберем пару (h_m, v_n) , в которой v_n самая левая. Если каждый данный прямоугольник пересекает h_m или v_n , то пара (h_m, v_n) — искомая. Пусть это не так; тогда найдется прямоугольник Π , расположенный ниже h_m и левее v_n . Поскольку пара прямых (h_{m-1}, v_n) не является удачной, найдется прямоугольник Π_1 , не пересекающий v_n , нижняя сторона которого лежит на h_m (иначе все прямоугольники, пересекающие h_m или v_n , пересекают также h_{m-1} или v_n). Если бы Π_1 лежал правее v_n , пара прямоугольников Π и Π_1 не удовлетворяла бы условию. Следовательно, Π_1 находится левее v_n . Аналогично, так как пара прямых (h_m, v_{n-1}) не является удачной, найдется прямоугольник Π_2 , не пересекающий h_m , левая сторона которого лежит на v_n , причем Π_2 находится ниже h_m . Но тогда пара прямоугольников Π_1 и Π_2 не удовлетворяет условию — противоречие.

11 класс

2. 50 гирь.

Пусть набор состоит из 20 гирь массой 50 г и 30 гирь массой 40 г. В этом случае Петя может разделить все гири на 10

групп, в каждой из которых две гири массой 50 г и три гири массой 40 г; а Вася может разделить все гири на 5 групп, в каждой из которых 4 гири массой по 50 г, и на 6 групп, в каждой из которых 5 гирь по 40 г. Таким образом, значение $N = 50$ возможно.

Предположим, что $N < 50$ и Пете с Васей удалось разложить гири на группы нужным образом. Тогда в одной из Петиних групп не более 4 гирь, а в одной из Васиных групп также не более 4 гирь.

Лемма. Пусть имеются две группы гирь равной суммарной массы, состоящие из k и l гирь, где $k < l$. Тогда $k \geq 4$, причем в случае $k = 4$ имеем $l = 5$, и в каждой из групп массы гирь равны.

Доказательство. Пусть m — масса самой легкой гири в группе из l гирь, тогда масса второй группы не меньше $lm \geq (k+1)m$, а масса первой группы не больше $1,25km$, откуда $k+1 \leq 1,25k$, и $k \geq 4$. Если $k = 4$, то в указанных выше оценках неравенства обращаются в равенства, поэтому $l = k+1 = 5$, в группе из 5 гирь все гири одинаковой массы $m = 4x$, а в группе из 4 гирь все гири массой $5x$. Лемма доказана.

1) Предположим, что среди Петиних групп найдутся две группы с разным количеством гирь. Тогда из леммы следует, что в нескольких Петиних группах по 4 гири массы $5x$, а в остальных Петиних группах по 5 гирь массы $4x$. Общая масса всех гирь тогда равна $200x$, что невозможно, так как 200 не делится на 11, а суммарная масса в каждой Васиной группе должна быть целым кратным x .

2) Предположим, что в 10 Петиних группах равное число гирь. Тогда $N \leq 10$.

Если среди Васиных групп найдутся две группы с разным количеством гирь, то из леммы следует, что в каждой из Васиных групп не менее 4 гирь, откуда $N \geq 44 \Rightarrow N \geq 50$ (так как $N \leq 10$) — противоречие.

Если же в 11 Васиных группах равное число гирь, то

$N \leq 11 \Rightarrow N \leq 110 \Rightarrow N \geq 110$ — противоречие.

4. Заметим, что наименьший круг, содержащий тупоугольный треугольник, — это его описанный круг; для тупоугольного же треугольника это круг, построенный на его наибольшей стороне как на диаметре.

Пусть описанная сфера Ω нашего тетраэдра $ABCD$ имеет центр O и радиус R . Предположим, что O лежит вне тетраэдра или на его границе. Рассмотрим ближайшую к O точку X тетраэдра. Возможны два случая.

1. X лежит внутри некоторой грани (скажем, ABC). Тогда X является центром описанной окружности ω треугольника ABC , этот треугольник остроугольный, поэтому радиус ω есть $r \leq 1$. При этом точки D и O лежат в разных полупространствах относительно ABC , и сфера с центром в X и радиусом r содержит сферическую шапочку сферы Ω , содержащую $ABCD$. Значит, эта сфера содержит и $ABCD$.

2. X лежит на ребре AB . Тогда проекция O_1 точки O на плоскость ABC лежит вне граней; более того, X является ближайшей к O_1 точкой треугольника ABC . Поэтому O_1 и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB , угол ACB тупой, и точка C лежит в шаре, построенном на AB как на диаметре (радиус этого шара по условию не превосходит 1). Аналогично, D лежит в этом шаре, поэтому шар содержит весь тетраэдр.

В обоих случаях тетраэдр поместился в шар радиуса 1.

Нам осталось разобрать только случай, когда O лежит внутри тетраэдра. В этом случае сумма объемов пирамид $ABCO$, $ABDO$, $ACDO$ и $BCDO$ равна V_{ABCD} , поэтому один из них не превосходит $V_{ABCD}/4$; пусть это объем пирамиды $ABCO$. Пусть луч DO пересекает плоскость ABC в точке D_1 ; тогда

$$\frac{1}{4} \geq \frac{V_{ABCO}}{V_{ABCD}} = \frac{OD_1}{DD_1}, \text{ поэтому } OD_1 \leq \frac{1}{3} OD = \frac{R}{3}.$$

Рассмотрим ближайшую к O точку X на границе тетраэдра. Она не может лежать на ребре тетраэдра, потому что угол между одной из граней и отрезком OX будет острым. Значит, она лежит внутри одной из граней (скажем, ABC), является центром ее описанной окружности, и по доказанному выше

$OX \leq \frac{R}{3}$. Тогда радиус описанной окружности этой грани не менее $\sqrt{R^2 - (R/3)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$. Так как по условию он не больше

1, то $R \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$, и мы нашли шар требуемого радиуса, содержащий тетраэдр.

5. Нет, не может.

Предположим, что такое возможно. Пусть a – простое число, $77 < a \leq 150$, а b – число, стоящее в соседней по стороне клетке. Если уравнение $x^2 - bx + a = 0$ имеет два целых корня, то по теореме Виета их произведение равно a , а сумма равна $b > 0$. Значит, эти корни 1 и a , и $b = 1 + a$. Если же уравнение $x^2 - ax + b = 0$ имеет два целых корня x_1 и x_2 , то $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = b$; если при этом $x_1, x_2 \geq 2$, то $b = x_1(a - x_1) \geq 2(a - 2)$, так как функция $t(a - t)$ возрастает при $t \leq a/2$; значит, $b \geq 2a - 4 > 150$, что невозможно. Следовательно, в этом случае один из корней равен 1, и $b = 1 \cdot (a - 1) = a - 1$.

Итак, для таких простых значений a возможны лишь два варианта числа, стоящего в соседней клетке: $b = a - 1$ и $b = a + 1$. Значит, у клетки с числом a только две соседних, и она – угловая. Однако существуют хотя бы 5 простых чисел a , находящихся между 77 и 150 (например, 79, 83, 89, 97, 101); все они не могут стоять в углах, так как углов всего 4. Противоречие.

XLII ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Теоретический тур

9 класс

- 1) Масштаб по оси скорости 2 м/с, а по оси времени 1 с;
2) $v_A = 6$ м/с; 3) $s \approx 16$ м.
- 1) Это график зависимости a^{-1} от v ; 2) $t_0 = \frac{3}{2} \frac{v_0}{a_0}$;
3) $v = -v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a_0 v_0 t}$.
- 1) $I_{\min} = 0$ при $R_x = 6R_1 = 18$ кОм;
2) $I_{\max} = \frac{U}{R_1} = 27$ мА при $R_x = 0$; 3) $R_x = \frac{10}{3} R_1 = 10$ кОм.
- 1) Рассеивается 84%; 2) в 2,5 раза.

10 класс

- 1) $v_0 = \frac{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}}{2}$; 2) таких точек две: слева и справа от мгновенной оси вращения; 3) $a_{Cy} = \frac{v_A^2 + v_B^2}{4r}$.
- См. рис.12: 1) $x = L \cos \theta - \frac{A}{2} \sin 2\theta$, $y = L \sin \theta -$

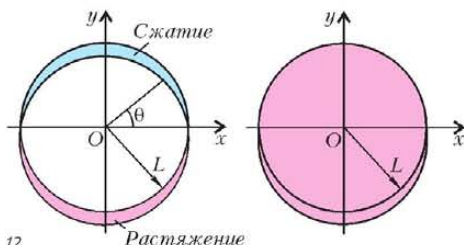


Рис. 12

$-A \sin^2 \theta$, где $A = \frac{2mg}{k} \sin \alpha$,

$0 \leq \theta \leq \pi$ при сжатии и $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ при растяжении; 2) вся область внутри окружности радиусом L плюс область растяжения, как в случае 1).

3. 1) См. рис.13: $C = \frac{2\epsilon_0 S}{l} = 0,89$ нФ;

2) $Q = \frac{\epsilon^2 \epsilon_0 S}{2l} \approx 3,2$ мкДж.

4. 1) $v_{\min 1} = \sqrt{\frac{Qe}{2\pi\epsilon_0 R m_p}} = 5,9 \cdot 10^5$ м/с;

2) $v_{\min 2} = \sqrt{2} v_{\min 1} = 8,3 \cdot 10^5$ м/с.

11 класс

4. $A = A_1 + A_2$; $A_1 = \frac{5}{2} v R (T_2 - T_1)$, где $v = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$ и $T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/7}$; $A_2 = p_1 V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{5/7}$; окончательно, $A \approx 45,4$ кДж.

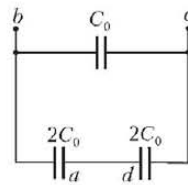


Рис. 13

журнал © Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, А.В.Жуков,
С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,
А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,
phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

МАТЕМАТИКА ТУРНИРОВ

Существует немало систем для проведения шахматных турниров: олимпийская (ее также называют кубковой или нокаут-системой), швейцарская, круговая, матчевая и другие. Каждая из них имеет свои математические особенности. Соответственно, придумано немало интересных задач и головоломок, связанных с турнирами.

В Кубке число участников n обычно представляет собой степень двойки, $n = 2^k$, и он разыгрывается в k этапов — после каждого число соискателей сокращается вдвое. Так, в Кубок мира приглашаются 128 сильнейших гроссмейстеров планеты, и за 7 этапов ($128 = 2^7$) определяется его обладатель. Хотя в кубковой системе есть случайный элемент, победителем всегда становится достойный кандидат. Например, чемпион мира по «классике» Виспи Ананд, выигравший это звание в 2007 году по круговой системе, в 2000 году был чемпионом мира ФИДЕ, который тогда проводился по нокаут-системе.

На каждом этапе Кубка мира шахматисты играют по две партии с классическим контролем (в финале — четыре), при равном счете в тай-брейке они переходят на быстрые шахматы и блиц. В 2007 году обладателем Кубка стал Гата Камский, в конце 2008 он должен встретиться с экс-чемпионом мира Весселином Топаловым. А в 2009 году победитель этого матча и победитель матча-реванша на первенство мира Ананд — Крамник в поединке между собой разыграют очередной титул шахматного короля.

В 2008 году по нокаут-системе уже в четвертый раз прошел чемпионат мира среди женщин — правда, на старт у шахматисток всегда выходят 64 участницы. Новой чемпионкой мира стала Александра Костенюк.

Пусть теперь количество участников n не является степенью двойки, и $2^k < n < 2^{k+1}$. Тогда число этапов равно $k + 1$, причем победитель сыграет либо $k + 1$ матч, либо k (во втором случае ему повезло с жеребьевкой, он без игры прошел во второй круг).

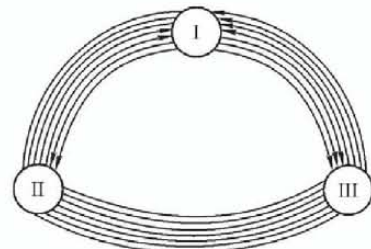
Преимущество кубковой системы заключается в большом числе участников, которые одновременно играют в турнире (точнее, стартуют в нем). Тем же достоинством обладает и швейцарская система, но здесь проигравшие не выбывают, а играют до конца. После каждого тура участники разби-

ваются на группы с одинаковым числом очков (например, после первого тура образуются три группы: 1 очко, 0,5 очка и 0), и в следующем туре по жеребьевке встречаются партнеры из одной группы (или из соседних).

Самая распространенная и объективная турнирная система — круговая, когда все играют друг с другом. Чтобы элемент случайности свести к минимуму, турнир часто проводится в два круга, при этом партнеры играют одну партию белыми и одну черными. Например, в 2007 году в Мехико 8 сильнейших гроссмейстеров разыграли корону по круговой системе, чемпионом мира стал Ананд.

Задача. Три шахматиста целый день провели за доской, причем каждые двое сыграли друг с другом одинаковое число партий, — получился многокруговой турнир. Стали думать, кто выступил лучше всех. Первый сказал: «У меня больше побед, чем у каждого из вас». Второй уточнил: «А у меня меньше поражений, чем у каждого из вас». Когда же подсчитали очки, оказалось, что третий набрал больше всех очков. Возможно ли такое?

Хотя ситуация кажется нереальной, ответ положительный. Таблицу составить несложно, но еще проще нарисовать соответствующий граф. Здесь каждые два игрока провели по семь партий. Первый у второго две выиграл и столько же проиграл. С третьим он три выиграл и четыре проиграл. Все остальные встречи закончились вничью. Итак, у первого больше всех побед — пять и при этом 6,5 очков. У второго меньше всех поражений — два и 7 очков, у третьего четыре победы и три поражения, но больше всех очков — 7,5, он и вышел победителем.



Задача. В турнире участвуют десять человек. Могут ли какие-либо трое из них набрать на 4 очка больше, чем остальные?

Трое шахматистов могут набрать самое большое 24 очка (3 между собой и 21 очко в других партиях), остальные семеро, проведя между собой

$7 \times 6/2 = 21$ партию, наберут вместе не меньше 21 очка.

Итак, разрыв в 4 очка невозможен.

Задача. По окончании супертурнира пять его участников расположились по местам следующим образом: 1. Каспаров, 2. Крамник, 3. Ананд, 4. Корчной, 5. Карпов (обошлось без дележа мест). Во время банкета делились впечатлениями:

— Не думал, что я один обойдусь без поражений, — удивился Крамник.

— Лишь мне не удалось выиграть ни разу, — сокрушался Карпов.

Можно ли по этой информации восстановить турнирную таблицу?

Типичная логическая задача, в которой по неполным данным надо разобраться в ситуации. Всего в турнире разыгрывалось 10 очков. Каспаров набрал не более 3 (у него есть поражение), но и не менее 3, иначе порядок мест был бы таким: Каспаров — 2,5, Крамник — 2, Ананд — 1,5, Корчной — 1, Карпов — 0,5. Сумма равна 7,5 вместо 10. Значит, правильный вариант другой: Каспаров — 3, Крамник — 2,5, Ананд — 2, Корчной — 1,5, Карпов — 1, в сумме 10 очков.

№	Участники	1	2	3	4	5	О	М
1	Каспаров		0	1	1	1	3	I
2	Крамник	1		1/2	1/2	1/2	2,5	II
3	Ананд	0	1/2		1	1/2	2	III
4	Корчной	0	1/2	0		1	1,5	IV
5	Карпов	0	1/2	1/2	0		1	V

Каспаров сыграл четыре партии и одну проиграл, значит, три остальные выиграл. Крамник не проиграл ни разу, а выиграл одну (по условию), т.е. одолел как раз Каспарова. В остальных партиях он набрал 1,5 очка (всего 2,5) — сделал три ничьи.

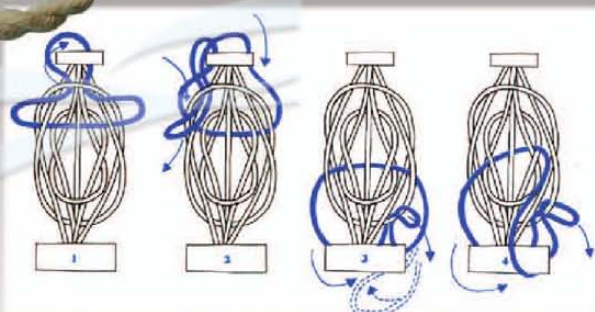
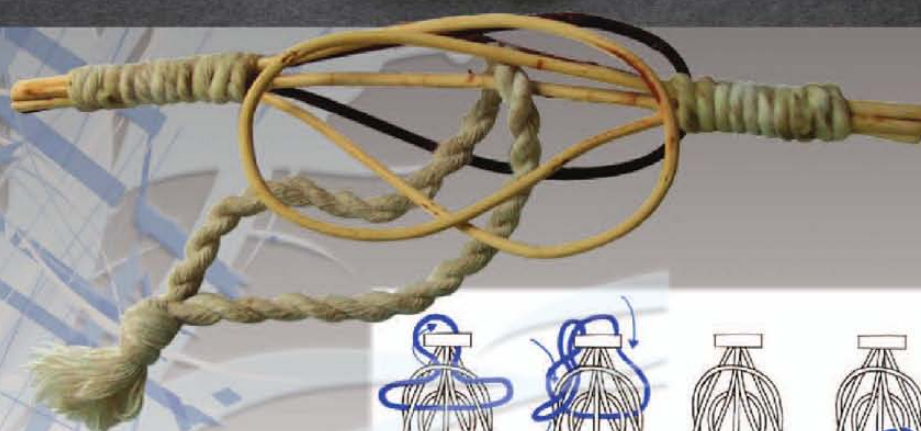
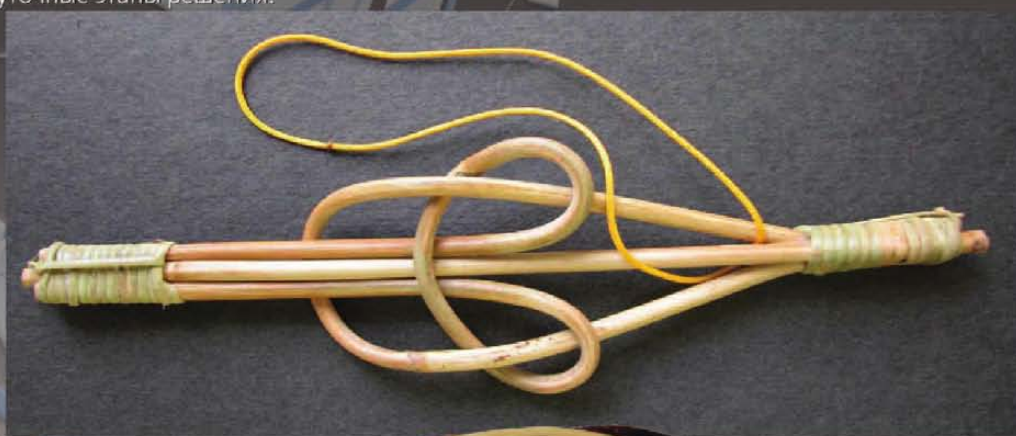
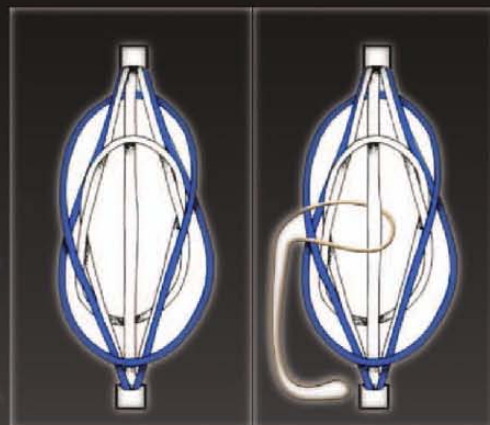
Ананд против Корчного и Карпова набрал 1,5 очка. Возможны два варианта: 1) Ананд выиграл у Карпова и сыграл вничью с Корчным, тогда у Корчного с Карповым мирный исход, и у Корчного все ничьи — это противоречит признанию Карпова; 2) Ананд выиграл у Корчного и сыграл вничью с Карповым, Корчной выиграл у Карпова, набрал 1,5 очка — и все сошлось.

Е. Гук

История происхождения большинства старинных головоломок загадочна, длинна и запутана. Не является исключением и головоломка "Пять петель", с которой вы сегодня познакомитесь.

На фотографиях представлены малайзийский и русский варианты головоломки. Они несколько отличаются друг от друга, но их объединяет общее для народных головоломок свойство: обе игрушки легко изготовить в домашних условиях. В качестве материала подойдет любая проволока. Размеры головоломки можно выбрать произвольно, лишь бы в вашем варианте соблюдались пропорции приведенной здесь схемы. При сборке будьте внимательны – проверьте по схеме правильность расположения центрального стержня и веревочной петли. Сделать головоломку легко, гораздо труднее ее решить, т.е. отцепить веревочную петлю от центрального стержня. Для облегчения задачи на приведенных схемах показаны промежуточные этапы решения.

ПЯТЬ ПЕТЕЛ



Коллекция Коллекция Коллекция

Коллекция Коллекция Коллекция
ГОЛОВОЛОМКИ

(Продолжение – на с. 27 внутри журнала)