СОДЕРЖАНИЕ

Том 49, номер 4, 2009 год

Contents

Vol. 49, No. 4, 2009

Simultaneous English language translation of the journal is available from Pleiades Publishing, Ltd.
Distributed worldwide by Springer. *Computational Mathematics and Mathematical Physics* ISSN 0965-5425.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 595–600

УДК 519.614

МАЛОРАНГОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ И ИХ КОМПАКТНЫЕ ФОРМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО УНИТАРНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

М. Гасеми Камалванд*, Х. Д. Икрамов**

*(*Исламская Республика Иран, Хоррамабад, Университет Лорестана;*
***1199992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК)*
e-mail: m_ghasemi98@yahoo.com; ikramov@cs.msu.su
Поступила в редакцию 12.08.2008 г.

Показано, что метод MINRES-CN, предложенный ранее авторами для решения систем линейных уравнений с сопряженно-нормальными матрицами коэффициентов, примени́м и в том случае, если матрица коэффициентов, даже не будучи сопряженно-нормальной, является малоранговым возмущением симметричной матрицы. Если же возмущенная матрица остается сопряженно-нормальной, то рекурсия, лежащая в основе метода, начиная с некоторого шага становится трехчленной. Эти результаты доказаны на языке компактных форм матриц относительно унитарных конгруэнций. Библ. 3.

Ключевые слова: нормальные матрицы, сопряженно-нормальные матрицы, унитарные подобия, унитарные конгруэнции, крыловские подпространства, комплексные симметричные матрицы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, всякая эрмитова матрица может быть приведена к трехдиагональному виду посредством конечной последовательности элементарных унитарных подобий или – более общо – посредством конечного процесса, сохраняющего унитарное подобие и использующего лишь арифметические операции и извлечения квадратных корней. Для краткости процесс этого типа будем называть *конечным ортогональным процессом*.

Пусть теперь A – нормальная матрица, не являющаяся эрмитовой, но имеющая лишь малое число k невещественных собственных значений. К какой компактной форме можно привести такую матрицу, оставаясь в классе конечных ортогональных процессов? Ответ на этот вопрос дает следующий результат, установленный в [1].

Теорема 1. *Нормальная $n \times n$-матрица A посредством конечного ортогонального процесса может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме*

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & & \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \\ & H_{32} & H_{33} & \dots \\ & & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где диагональные блоки $H_{11}, H_{22}, \dots$ квадратные и их порядки в типичном случае даются последовательными натуральными числами $1, 2, \dots$. Если A удовлетворяет уравнению вида

$$g(A, A^*) = 0, \tag{2}$$

где $g(x, y)$ – многочлен степени $m \ll n$, то порядки диагональных блоков H_{ii} в матрице (1), начиная с $i = m$, стабилизируются на значении m.

Пусть

$$\lambda_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

суть невещественные собственные значения матрицы A. Тогда весь спектр этой матрицы принадлежит объединению прямых

$$y = 0 \quad \text{и} \quad x = x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

иначе говоря, вырожденной алгебраической кривой

$$(x - x_1)\ldots(x - x_k)y = 0$$

степени $k + 1$. В таком случае сама матрица A удовлетворяет уравнению (2):

$$g(A, A^*) = (A - x_1 I)\ldots(A - x_k I)A^* = 0.$$

В соответствии со вторым утверждением теоремы 1, порядки диагональных блоков H_{ii} в компактной форме (1) нашей матрицы A должны стабилизироваться на значении $k + 1$.

Однако в данном случае о компактной форме H можно сказать нечто большее. Здесь нам поможет еще один результат из [1].

Теорема 2. *Пусть нормальная $n \times n$-матрица A представлена в виде*

$$A = \tilde{H} + \tilde{S}, \quad \text{где} \quad \tilde{H} = \tilde{H}^*, \quad \tilde{S} = -\tilde{S}^*. \tag{3}$$

Если

$$k = \operatorname{rank} \tilde{S} < \frac{n-1}{2},$$

то блоки H_{ii} в матрице (1), *начиная с $i = k + 1$, имеют порядок* 1. *Иначе говоря, нижняя часть матрицы H, начинающаяся с* $(k + 1)$*-й блочной строки, является обычной трехдиагональной матрицей.*

Для нашей нормальной матрицы A косоэрмитова матрица $\tilde{S}$ в разложении (3) имеет ровно k ненулевых собственных значений и, следовательно, ранг k. Согласно теореме 2, компактная форма H матрицы A должна иметь трехдиагональный “хвост”.

Рассмотрим теперь матрицу A вида (3), где $\tilde{S}$ – по-прежнему косоэрмитова матрица ранга $k \ll n$. Отличие от ситуации, описываемой теоремой 2, состоит в том, что A уже не обязана быть нормальной матрицей (т.е. матрицы $\tilde{H}$ и $\tilde{S}$ в (3) не обязаны коммутировать). Оказывается, что и такую матрицу можно привести к блочно-трехдиагональной форме (см. [2]).

Теорема 3. *Пусть A – матрица вида* (3), *где косоэрмитова матрица $\tilde{S}$ имеет ранг $k \geq 1$. Тогда посредством конечного ортогонального процесса A может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме* (1), *в которой порядки всех диагональных блоков H_{ii} не превосходят числа $k + 1$.*

Вместо унитарных подобий будем теперь говорить об унитарных конгруэнциях, т.е. преобразованиях вида

$$A \longrightarrow U^{\mathrm{T}}AU, \quad UU^* = I.$$

Такие преобразования не сохраняют свойство матрицы быть нормальной, однако они сохраняют свойство сопряженной нормальности, выражаемое равенством

$$AA^* = \overline{A^*A}.$$

Сопряженно-нормальными являются, в частности, симметричные матрицы. Они играют в теории унитарных конгруэнций такую же роль, какую эрмитовы матрицы выполняют относительно унитарных подобий. Например, всякую симметричную матрицу можно привести к трехдиагональному виду посредством конечного ортогонального процесса, если под последним понимать теперь эквивалент конечной последовательности элементарных унитарных конгруэнций.

Теорема 1 также имеет соответствие в теории унитарных конгруэнций (см. [3]).

Теорема 4. *Сопряженно-нормальная $n \times n$-матрица A посредством конечного ортогонального процесса может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме* (1), *где диагональные блоки $H_{11}, H_{22}, \ldots$ квадратные и их порядки в типичном случае даются последовательными натуральными числами* $1, 2, \ldots$.

Цель настоящей статьи в том, чтобы установить конгруэнтные аналоги теорем 2 и 3. Это будет сделано в разд. 4 после того как в разд. 2 мы напомним конструкцию обобщенного процесса Ланцоша, лежащего в основе доказательства обеих теорем. В разд. 3 обсуждается связь между задачами приведения к компактным формам посредством, соответственно, унитарных подобий и унитарных конгруэнций. Эта связь используется в разд. 4.

2. ОБОБЩЕННЫЙ ПРОЦЕСС ЛАНЦОША

Одним из методов приведения эрмитовой матрицы A к трехдиагональному виду является алгоритм Ланцоша. Суть этого алгоритма состоит в ортонормализации степенной последовательности

$$x,\ Ax,\ A^2x,\ A^3x,\ \ldots, \tag{4}$$

где x – заданный или произвольно выбранный начальный вектор. Если с матрицей A связать линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в $\mathbb{C}^n$, то матрица этого оператора относительно построенного в алгоритме ортогонального базиса и будет искомой трехдиагональной формой.

Если A – нормальная, но неэрмитова матрица, то вместо (4) следует рассматривать *обобщенную степенную последовательность*

$$x,\ Ax,\ A^*x,\ A^2x,\ AA^*x,\ A^{*2}x,\ A^3x,\ \ldots. \tag{5}$$

Удобно рассматривать последовательность (5) как состоящую из сегментов длины, соответственно, 1, 2, 3, 4, …. Сегмент с номером k, называемый k-м слоем, можно описать как совокупность векторов вида $u = W_k(A, A^*)x$, где $W_k(s, t)$ пробегает множество одночленов степени k от (коммутирующих) переменных s и t. Символ $W_0(s, t)$ обозначает пустое слово, так что $W_0(A, A^*)x$ есть попросту вектор x.

Суть *обобщенного процесса Ланцоша* состоит в ортонормализации последовательности (5). С этим процессом связаны такие обозначения и терминология: подпространство

$$\mathcal{L}_m(A, x) = \operatorname{span}\{W(A, A^*)x : \deg W \le m\} \tag{6}$$

называется m-м *обобщенным подпространством Крылова*. Размерность подпространства (6) обозначается через l_m. Число $\omega_m = l_m - l_{m-1}$ $(m \ge 1)$ называется шириной m-го слоя; мы полагаем $\omega_0 = 1$.

Разумеется, последовательность (5) не строится в явном виде (как не строится в явном виде степенная последовательность (4) в классическом алгоритме Ланцоша). Неявное построение этой последовательности, сочетаемое с ее ортогонализацией, происходит так: пусть уже найден ортонормированный базис $q_1, \ldots, q_{l_m}$ подпространства $\mathcal{L}_m(A, x)$, причем последние его векторы $q_{l_{m-1}+1}, \ldots, q_{l_m}$ получены за счет векторов из m-го слоя последовательности (5). Тогда (в том или ином порядке) строятся векторы $Aq_{l_{m-1}+1}, \ldots, Aq_{l_m}$, $A^*q_{l_{m-1}+1}, \ldots, A^*q_{l_m}$, подвергаемые ортогонализации к текущей ортонормальной системе.

Из этого описания легко выводятся следующие свойства обобщенных крыловских подпространств (см. [1, разд. 2]):

1) если $x \in \mathcal{L}_m$, то

$$Ax \in \mathcal{L}_{m+1}, \quad A^*x \in \mathcal{L}_{m+1};$$

2) если $q_l \in \mathcal{L}_m \backslash \mathcal{L}_{m-1}$, то

$$Aq_l \perp \mathcal{L}_{m-2}, \quad A^*q_l \perp \mathcal{L}_{m-2}.$$

Как и выше, свяжем с A линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в n-мерном пространстве. Предположим, что в результате применения обобщенного процесса Ланцоша к A и начальному вектору x получен ортонормированный базис $q_1, \ldots, q_n$. Тогда из свойств 1) и 2) следует, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет блочно-трехдиагональную форму (1), причем порядки n_i диагональных блоков H_{ii} определяются числами ω_i:

$$n_i = \omega_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

В частности, n_1 всегда равно единице.

Идея обобщенного процесса Ланцоша применима и к анормальной матрице A. Существенное отличие от нормального случая состоит в том, что A и A^* более не коммутируют. Поэтому k-й слой обобщенной степенной последовательности следует теперь определить как совокупность векторов вида $u = W_k(A, A^*)x$, где $W_k(s, t)$ – произвольный многочлен степени k от *некоммутирующих* переменных s и t. В результате вместо оценки

$$\omega_i \le i + 1, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

справедливой для любой нормальной матрицы, имеет место лишь неравенство

$$\omega_i \le 2^i, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Если это неравенство реалистически отображает ситуацию с конкретной матрицей A, то применение обобщенного процесса Ланцоша к такой матрице едва ли оправданно. Однако для некоторых классов анормальных матриц числа ω_i независимо от индекса i можно ограничить небольшой константой. Один из таких классов и описывается теоремой 3.

3. ПРИВЕДЕНИЕ ПОСРЕДСТВОМ УНИТАРНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

Блочно-трехдиагональная матрица (1), построенная в предыдущем разделе с помощью обобщенного процесса Ланцоша, унитарно подобна исходной матрице A. В настоящем разделе мы обсудим вопрос о приведении к компактным формам посредством унитарных конгруэнций.

Начнем со случая сопряженно-нормальной матрицы A. Сопоставим ей матрицу удвоенного порядка

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{A} \\ A & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(Черта над символом матрицы или вектора обозначает поэлементное сопряжение.) Легко проверить, что матрица (7) нормальна в обычном смысле.

Фиксируем ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^n$, которому сопоставим вектор удвоенной размерности

$$v = \begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Рассмотрим обобщенную степенную последовательность, порождаемую матрицей $\hat{A}$ и вектором (8):

$$\begin{gathered} v, \hat{A}v = \begin{pmatrix} \bar{A}\bar{x} \\ Ax \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^*v = \begin{pmatrix} A^*\bar{x} \\ A^{\mathrm{T}}x \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^2v = \begin{pmatrix} A_Lx \\ A_R\bar{x} \end{pmatrix}, \\ \hat{A}\hat{A}^*v = \begin{pmatrix} \bar{A}A^{\mathrm{T}}x \\ AA^*\bar{x} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^{*2}v = \begin{pmatrix} A^*A^{\mathrm{T}}x \\ A^{\mathrm{T}}A^*\bar{x} \end{pmatrix}, \quad \ldots. \end{gathered} \tag{9}$$

Символами A_L и A_R обозначены матрицы $\bar{A}A$ и $A\bar{A}$. Верхние половины векторов (9) образуют последовательность

$$x, \bar{A}\bar{x}, A^*\bar{x}, \bar{A}Ax, \bar{A}A^{\mathrm{T}}x, A^*A^{\mathrm{T}}x, \bar{A}A\bar{A}\bar{x}, \ldots. \tag{10}$$

Разобьем эту последовательность на слои, считая k-м слоем совокупность векторов, отвечающих k-му слою последовательности (9). Аналогично, m-му подпространству $\mathcal{L}_m(\hat{A}, v)$ сопоставим подпространство $\tilde{\mathcal{L}}_m(A, x)$, образованное верхними половинами векторов $z \in \mathcal{L}_m(\hat{A}, v)$. Размерность $\tilde{\mathcal{L}}_m(A, x)$ обозначим через $\tilde{l}_m$, а число $\tilde{\omega}_m = \tilde{l}_m - \tilde{l}_{m-1}$ $(m \ge 1)$ назовем шириной m-го слоя в (10). Очевидно, что

$$\tilde{\omega}_m \le \omega_m, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где ω_m – ширина m-го слоя в (9).

Теперь мы проведем своеобразный процесс ортогонализации последовательности (10). По аналогии с обобщенным алгоритмом Ланцоша этот процесс можно описать так: пусть уже найден ортонормированный базис $q_1, \ldots, q_{\tilde{l}_m}$ подпространства $\tilde{\mathcal{L}}_m(A, x)$, причем последние его векторы $q_{\tilde{l}_{m-1}+1}, \ldots, q_{\tilde{l}_m}$ получены за счет векторов из m-го слоя в (10). Тогда (в том или ином порядке) строятся векторы $Aq_{\tilde{l}_{m-1}+1}, \ldots, Aq_{\tilde{l}_m}, A^{\mathrm{T}}q_{\tilde{l}_{m-1}+1}, \ldots, A^{\mathrm{T}}q_{\tilde{l}_m}$. Каждый из них ортогонализуется к текущей ортонормальной системе, составленной из сопряженных векторов $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots$. Если результатом полной ортогонализации является ненулевой вектор, то он нормируется и после повторного сопряжения превращается в очередной вектор q_j.

Можно показать, что подпространства $\tilde{\mathcal{L}}_m$ обладают свойствами, аналогичными свойствам обобщенных крыловских подпространств (см. свойства 1) и 2) в разд. 2):

а) если $x \in \tilde{\mathcal{L}}_m$, то

$$Ax \in \overline{\tilde{\mathcal{L}}}_{m+1}, \quad A^{\mathrm{T}}x \in \overline{\tilde{\mathcal{L}}}_{m+1};$$

б) если $q_l \in \tilde{\mathcal{L}}_m \setminus \tilde{\mathcal{L}}_{m-1}$, то

$$Aq_l \perp \overline{\tilde{\mathcal{L}}}_{m-2}, \quad A^{\mathrm{T}}q_l \perp \overline{\tilde{\mathcal{L}}}_{m-2}.$$

Символ $\overline{\mathcal{M}}$ по отношению к подпространству $\mathcal{M}$ означает подпространство

$$\overline{\mathcal{M}} = \{x \in \mathbb{C} | \bar{x} \in \mathcal{M}\}.$$

Предположим, что применение описанного выше процесса к сопряженно-нормальной матрице A и начальному вектору x порождает ортонормированный базис $q_1, \ldots, q_n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$. Определим унитарную матрицу

$$Q = (q_1 \ldots q_n).$$

Тогда из свойств а) и б) вытекает матричное равенство

$$AQ = \overline{Q}H, \tag{12}$$

где H – матрица вида (1), порядки диагональных блоков которой определяются числами $\tilde{\omega}_i$. Переписывая (12) в виде

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = H,$$

заключаем, что матрицы A и H унитарно конгруэнтны.

Если отказаться от сопряженной нормальности матрицы A, то соответствующая ей матрица (7) не будет нормальной. Однако все рассмотренные выше построения и определения сохраняют смысл с тем отличием, что ширина i-го слоя в последовательности (9) в общем случае увеличивается до 2^i. Остается в силе и соотношение (11) между шириной слоя в (9) и шириной соответствующего слоя в последовательности (10).

4. МАЛОРАНГОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

Декартово разложение (3) не сохраняется унитарными конгруэнциями. Поэтому в теории унитарных конгруэнций используется другое представление матрицы A, а именно

$$A = S + K, \quad S = S^{\mathrm{T}}, \quad K = -K^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

Для краткости будем называть (13) SSS-разложением A (от Symmetric-Skew-Symmetric decomposition). SSS-разложение сохраняется унитарными конгруэнциями в том смысле, что

$$\tilde{A} = U^{\mathrm{T}}AU = \tilde{S} + \tilde{K},$$

где

$$\tilde{S} = U^{\mathrm{T}} S U = \tilde{S}^{\mathrm{T}} \quad \text{и} \quad \tilde{K} = U^{\mathrm{T}} K U = -\tilde{K}^{\mathrm{T}}.$$

Мы можем теперь сформулировать и доказать аналоги теорем 2 и 3. Напомним, что конечный ортогональный процесс понимается теперь как эквивалент конечной последовательности элементарных унитарных конгруэнций.

Теорема 5. *Пусть в SSS-разложении сопряженно-нормальной $n \times n$-матрицы A кососимметричная компонента K имеет ранг $k < n/2$. Тогда в блочно-трехдиагональной форме* (1) *все блоки H_{ii}, начиная с $i = 2k + 1$, имеют порядок* 1.

Доказательство. Перейдем от матрицы A к соответствующей матрице $\hat{A}$. Подставляя в (7) SSS-разложение (13), получаем

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & S^* \\ S & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -K^* \\ K & 0 \end{pmatrix} = \hat{H} + \hat{K}, \tag{14}$$

что является декартовым разложением нормальной матрицы $\hat{A}$. При этом

$$\operatorname{rank} \hat{K} = 2 \operatorname{rank} K = 2k < n$$

и неравенство

$$2k < \frac{2n-1}{2} = n - \frac{1}{2}$$

также выполнено, поскольку k и n – целые числа. Итак, матрица $\hat{A}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2, а потому

$$\omega_i \le 1, \quad i = 2k+1, \quad 2k+2, \quad \ldots.$$

В силу (11),

$$\tilde{\omega}_i \le 1, \quad i = 2k+1, \quad 2k+2, \quad \ldots,$$

что доказывает теорему.

Теорема 6. *Пусть A – матрица вида* (13), *где кососимметричная матрица K имеет ранг $k \ge 1$. Тогда посредством конечного ортогонального процесса A может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме* (1), *в которой порядки всех диагональных блоков H_{ii} не превосходят числа* $2k + 1$.

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, перейдем от A к (вообще говоря, анормальной) матрице $\hat{A}$. В ее декартовом разложении (14) косоэрмитова компонента $\hat{K}$ по-прежнему имеет ранг $2k$. Таким образом, выполнены условия теоремы 3, откуда получаем

$$\omega_i \le 2k+1, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Снова применяя (11), имеем

$$\tilde{\omega}_i \le 2k+1, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

что доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elsner L., Ikramov Kh.D.* On a condensed form for normal matrices under finite sequences of elementary unitary similarities // Linear Algebra Appl. 1997. V. 254. P. 79–98.
2. *Дана М., Икрамов Х.Д.* Еще раз о решении систем линейных уравнений, матрицы которых являются малоранговыми возмущениями эрмитовых матриц // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 2005. Т. 334. С. 68–77.
3. *Икрамов Х.Д.* О приведении комплексных матриц к компактным формам посредством унитарных конгруэнций // Матем. заметки. 2007. Т. 82. № 4. С. 550–559.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 601–610

УДК 519.65

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ЛАГЕРРА В ЗАДАЧЕ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА[1)]

© 2009 г. М. М. Кабардов, В. М. Рябов

(198504 С.-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр-т, 28, СПбГУ, матем.-механ. ф-т)

e-mail: riabov@VR1871.spb.edu

Поступила в редакцию 24.04.2008 г.
Переработанный вариант 20.10.2008 г.

При численном обращении преобразования Лапласа искомая функция-оригинал разыскивается в виде ряда по многочленам Лагерра. Для ускорения сходимости ряда применяется метод Эйлера–Кноппа. Указаны способы выбора оптимального значения параметра преобразования как на вещественной оси, так и в комплексной плоскости. Библ. 14. Фиг. 4. Табл. 1.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, обращение преобразования Лапласа, ряд Лагерра, метод Эйлера–Кноппа, ускорение сходимости.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существуют различные методы обращения преобразования Лапласа (см., например, [1]). Так, часто используется разложение оригинала в ряд по специальным функциям, например по многочленам Лагерра. Такой подход был разработан в [2] и [3] и получил развитие у многих авторов (см., например, [4]–[9]). В настоящее время имеются различные варианты реализации этой схемы в зависимости от критериев выбора произвольных параметров, приемов ускорения сходимости и т.д.

В настоящей статье рассматривается метод обращения преобразования Лапласа, основанный на представлении оригинала в виде ряда Лагерра, который затем суммируется методом Эйлера–Кноппа с целью ускорения сходимости. В [7]–[9] предложены способы выбора параметра суммирования Эйлера–Кноппа в нескольких частных случаях расположения особенностей изображения Лапласа. При этом выбор параметра p суммирования ограничен условием $p < 1$, $p \in \mathbb{R}$.

Здесь изучается вопрос выбора оптимального значения параметра p в общем случае, когда он принимает комплексные значения.

Итак, пусть

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \quad \operatorname{Re} s > \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Оригинал представим в виде ряда по многочленам Лагерра $L_k(\cdot)$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(bt), \tag{2}$$

где b – положительный параметр, $b > 2\lambda$. Подставив разложение (2) в (1), найдем

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^\infty e^{-st} L_k(bt)dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(s-b)^k}{s^{k+1}}. \tag{3}$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00285).

Преобразованием $z = (s - b)/s$ полуплоскость $\operatorname{Re} s \geq b/2$ отображается на круг $|z| \leq 1$. Пусть $sF(s)$ регулярна в бесконечности. Тогда из представления (3) следует, что функция

$$\varphi(z) = \frac{b}{1-z}F\left(\frac{b}{1-z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

регулярна в некотором круге $|z| < |z_0|$ с радиусом $|z_0| > 1$, где z_0 – наименьшая по модулю особенность функции $\varphi(z)$. Преобразование Эйлера–Кноппа последнего ряда имеет вид

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(p)\frac{z^k}{(1-pz)^{k+1}}, \quad A_k(p) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-p)^{k-j}a_j. \tag{4}$$

Найдем множество значений параметра p, при которых область сходимости преобразованного ряда содержит круг сходимости исходного. Это свойство преобразования ряда будем называть регулярностью, а множество соответствующих значений параметра p обозначим через M.

2. РЕГУЛЯРНОСТЬ МЕТОДА ЭЙЛЕРА–КНОППА

Положим

$$A(p) = \varlimsup_{k\to\infty}|A_k(p)|^{1/k}.$$

Тогда область сходимости преобразованного ряда определяется неравенством

$$A(p)\left|\frac{z}{1-pz}\right| < 1.$$

По теореме 2 из [7, с. 129] находим $A(p) = \max_j |1/z_j - p|$, и неравенство преобразуется к виду

$$\max_j\left|\frac{1}{z_j} - p\right|\left|\frac{z}{1-pz}\right| < 1,$$

где z_j – особенности функции $\varphi(z)$. Пусть $t = 1/z$ и запишем наше неравенство в виде $|t - p| > A(p)$. В плоскости t оно определяет внешность круга с центром в точке p, содержащего все точки $t_j =$ $= 1/z_j$. Чем меньше радиус $A(p)$ этого круга, тем больше площадь соответствующего круга в плоскости z.

Ряд $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сходится в круге $|z| < |z_0|$, а ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(p)\frac{z^k}{(1-pz)^{k+1}}$$

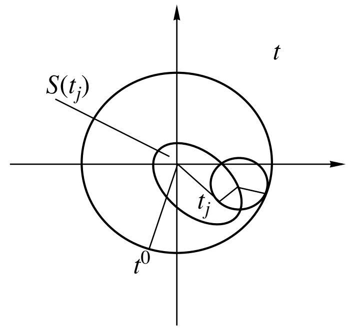
сходится в круге $|1/z - p| > A(p)$. Нужно найти значения p, при которых выполняется включение $\{|1/z - p| > A(p)\} \supset \{|z| < |z_0|\}$. Очевидно, это те значения, которые удовлетворяют неравенству $A(p) + |p| \leq 1/|z_0|$. Это неравенство определяет непустое множество, так как при $p = 0$ оно справедливо для $A(p) = 1/|z_0|$.

Если z_0 – единственная (комплексная) особенность функции $\varphi(z)$, то множество M есть отрезок $[0, 1/z_0]$, $\min_M A(p)$ достигается при $p = 1/z_0$.

Если все особенности функции $\varphi(z)$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и z_0 (z_0 – наименьшая по модулю особенность функции $\varphi(z)$), то $M = [0, a]$, где $a = (1/z_0 + 1/z_1)/2$, z_1 определяется из условия $|1/z_0 + 1/z_1| = \max_j |1/z_0 + 1/z_j|$; $\min_M A(p)$ достигается при этом на $p = a$. В частности, если $\varphi(z)$ имеет особенности в диаметрально противоположных точках z_0 и $-z_0$, а все остальные лежат на прямой $0z_0$ с выкинутым отрезком $[-z_0, z_0]$, то $M = \{0\}$.

Пусть $t^0 = \operatorname{argmax}_j |t_j|$, $t_j = s_j/(s_j - b)$, s_j – особенности функции $sF(s)$.

Рассмотрим следующую конструкцию. В плоскости t возьмем точку t_j и построим замкнутое множество $S(t_j)$, содержащее начало координат, граница которого состоит из центров окружно-



Фиг. 1.

стей, касающихся окружности $|t| = |t^0|$ и проходящих через точку t_j. Как видно из фиг. 1, это есть замыкание внутренности эллипса с фокусами 0 и t_j и большой осью $[\xi_j, \eta_j]$, где

$$\xi_j = \left(1 + \left|\frac{t^0}{t_j}\right|\right)\frac{t_j}{2}, \quad \eta_j = \left(1 - \left|\frac{t^0}{t_j}\right|\right)\frac{t_j}{2}.$$

Пересечение полученных таким образом эллипсов и есть множество M. Так как $S(t^0) = [0, t^0]$, то $M = [0, \alpha t^0]$, где $0 \le \alpha \le \alpha_0 \le 1$.

Замечание 1. Если при данном значении p суммирование регулярно, то $|a_k| = O((|p| + A(p))^k)$.

В самом деле, введя оператор сдвига E: $a_j = Ea_{j-1}$, представим $A_k(p)$ в виде

$$A_k(p) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-p)^{k-j}E^j a_0 = (E-p)^k a_0.$$

Из определения числа $A(p)$ получаем, что $|(E-p)^k a_0| = O((A(p))^k)$. Остается еще раз воспользоваться оператором E:

$$|a_k| = |E^k a_0| = |(E-p+p)^k a_0| = \left|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-p)^{k-j}(E-p)^j a_0\right| \le \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|p|^{k-j}|(E-p)^j a_0| =$$
$$= O\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|p|^{k-j}(A(p))^j\right) = O((|p| + A(p))^k).$$

Можно показать, что если при данном значении p суммирование регулярно, то $|p| + A(p) = 1/|z_0|$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЯДА ЛАГЕРРА

Теорема. *Пусть функция-оригинал $f(t)$ представима в виде* (2), *а параметр p удовлетворяет неравенству* $\operatorname{Re} p < 1$. *Тогда справедливо разложение*

$$f(t) = \exp\left(\frac{bpt}{p-1}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k(p)}{(1-p)^{k+1}}L_k\left(\frac{bt}{1-p}\right). \tag{5}$$

Доказательство. Известно (см. [10]) интегральное представление полиномов Лагерра

$$L_k(t) = \frac{e^t}{k!}\int_0^{\infty} e^{-\eta}\eta^k J_0(2\sqrt{\eta t})d\eta. \tag{6}$$

Под знаком интеграла стоит целая функция, и интеграл от нее вдоль произвольного луча, исходящего из начала координат под углом таким, что $|\arg\eta| < \pi/2$, сходится к $L_k(t)$. В самом деле, известно (см. [11]) асимптотическое разложение функции Бесселя $J_0(z)$:

$$J_0(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{A_{2s}}{z^{2s}} - \sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{A_{2s+1}}{z^{2s+1}}\right)$$

при $z \longrightarrow \infty$ в секторе $|\arg z| \le \pi - \delta$ $(<\pi)$.

Отсюда следует, что

$$J_0(z) = O\left(|z|^{-1/2}\left|\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) = O(|z|^{-1/2}e^{|z|}),$$

и, следовательно, подынтегральное выражение в (6) есть величина порядка

$$O(|\eta|^{k-1/2}e^{-(\mathrm{Re}\,\eta - 2\sqrt{|\eta t|})}),$$

что, очевидно, влечет сходимость интеграла вдоль луча с углом $|\arg\eta| < \pi/2$.

Из этих рассуждений и леммы Жордана следует, что при замене $\eta = \tau/(1-p)$ интеграл (6) не меняется при дополнительном требовании $\mathrm{Re}\dfrac{\tau}{1-p} > 0$ (или, что то же самое, $\mathrm{Re}\,p < 1$). Поэтому имеем

$$L_k(t) = \frac{e^t}{k!(1-p)^{k+1}}\int_0^{\infty}e^{-\tau}\tau^k\exp\left(\frac{p\tau}{p-1}\right)J_0\left(2\sqrt{\frac{\tau t}{1-p}}\right)d\tau.$$

Аргумент функции $J_0(r)$ выбирается так, что $\mathrm{Re}\sqrt{\dfrac{\tau}{1-p}} \ge 0$. Подставляя в последний интеграл разложение

$$\exp\left(\frac{p\tau}{p-1}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{p\tau}{p-1}\right)^j$$

и используя выражение (6), получаем

$$L_k(t) = \exp\left(\frac{pt}{p-1}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k+j}{k}\left(\frac{p}{p-1}\right)^j L_{k+j}\left(\frac{t}{1-p}\right). \tag{7}$$

Подставив разложение (7) в (2) и изменив порядок суммирования, получим формулу (5).

Замечание 2. В доказательстве используется ограничение $\mathrm{Re}\,p < 1$. Оно выполнено при условиях, наложенных на изображение и параметр суммирования. Действительно, если $sF(s)$ регулярна в бесконечности и суммирование регулярно, то $|p| \le r < 1$.

Следуя [7], назовем коэффициентом сходимости (КС) произвольного ряда $\Sigma_{n=0}^{\infty}g_n(z)$ величину $R = \lim\limits_{n\to\infty}\sup|g_n(z)|^{1/n}$ и рассмотрим вопрос выбора параметра p так, чтобы КС ряда (5) был минимальным.

4. ВЫБОР ПАРАМЕТРА СУММИРОВАНИЯ

Прежде всего заметим, что КС ряда (5) совпадает с КС ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k(p)}{(1-p)^{k+1}}.$$

Это следует из асимптотической формулы для многочленов Лагерра (см. [10]) при $k \longrightarrow \infty$:

$$L_k(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{z/2}(-kz)^{-1/4} \exp(2(-kz)^{1/2}) \left(\sum_{j=0}^{q-1} C_j(z) k^{-j/2} + O(k^{-q/2}) \right),$$

где z принадлежит комплексной плоскости с разрезом вдоль положительной полуоси, $C_j(z)$ регулярны в этой же плоскости с разрезом. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sup |L_k(z)|^{1/k} = 1$ при любом значении z (при вещественных $z > 0$ см. [7]), что и делает очевидным данное утверждение.

Утверждение 1. *Суммирование Эйлера–Кноппа с параметром p регулярно тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) $p = \alpha t^0$, $0 \le \alpha \le 1$;

2) $|p| + A(p) = |t^0|$, $A(p) = \lim\limits_{k\to\infty} |A_k(p)|^{1/k} = \max\limits_j |t_j - p|$.

Необходимость этих условий установлена в [12], а достаточность очевидна. Легко убедиться, что из условия 2) вытекает условие 1). Но приведенная формулировка удобнее для использования в дальнейшем.

Утверждение 2. *Справедливо равенство*

$$\underset{M}{\operatorname{argmin}} \frac{A(p)}{|1-p|} = \underset{M}{\operatorname{argmin}} A(p).$$

Из утверждения 1 имеем

$$\frac{A(p)}{|1-p|} = \frac{(1-\alpha)|t^0|}{|1-\alpha t^0|}. \tag{8}$$

Так как $A(p) = (1-\alpha)|t^0|$ достигает минимума на M при максимальном $\alpha \in [0, 1]$, не выводящем $p = \alpha t^0$ из M, то достаточно показать, что (8) убывает при $0 \le \alpha \le 1$.

Заметим, что в силу требований на изображение и параметр суммирования выполняется неравенство $|t^0| < 1$, так что знаменатель в (8) на [0, 1] в нуль не обращается.

Найдем производную по α и приравняем ее нулю:

$$|t^0| \frac{-|1-\alpha t^0|^2 - (1-\alpha)(\alpha |t^0|^2 - \operatorname{Re} t^0)}{|1-\alpha t^0|^{5/2}} = 0.$$

Отсюда находим, что единственная стационарная точка

$$\alpha_0 = \frac{1 - \operatorname{Re} t^0}{\operatorname{Re} t^0 - |t^0|^2}$$

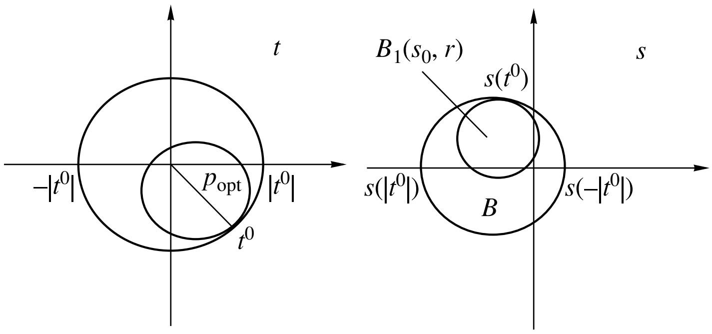
не принадлежит отрезку [0, 1]. Из того, что производная $[(1-\alpha)/|1-\alpha t^0|]'$ непрерывна, не обращается в нуль на [0, 1] и

$$\left. \left(\frac{1-\alpha}{|1-\alpha t^0|} \right)' \right|_{\alpha=0} = |t^0|(\operatorname{Re} t^0 - 1) < 0,$$

получаем требуемое.

Выше было установлено, что p и $A(p)$ суть, соответственно, центр и радиус замкнутого круга $K(p, A(p))$, который содержит все особенности t_j, причем по крайней мере одна особенность лежит на границе этого круга.

Отсюда следует, что $A(p)/|1-p| = \sin\beta/2$, где β – угол, под которым круг $K(p, A(p))$ виден из точки $t = 1$. Поэтому геометрически задача $\operatorname{argmin} \frac{A(p)}{|1-p|}$ состоит в нахождении центра круга $K(p, A(p))$, который виден под наименьшим углом из точки $t = 1$. Из утверждения 2 следует, что



Фиг. 2.

для этого (при требовании регулярности) достаточно найти круг наименьшего радиуса, который целиком лежит в круге $K(0, |t^0|)$ и содержит все точки t_j (см. фиг. 2).

В частном случае двух особых точек эта задача имеет решение

$$p_{\text{опт}} = \frac{t^0}{2}\frac{|t^0|^2 - |t_1|^2}{|t^0|^2 - a},$$

где t^0 – одна из точек с наибольшим модулем, t_1 – вторая точка и $a = \mathrm{Re}\,t^0 \cdot \mathrm{Re}\,t_1 + \mathrm{Im}\,t^0 \cdot \mathrm{Im}\,t_1$.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ИСХОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

При отображении $s = bt/(t-1)$ окружность $|t| = |t^0|$ перейдет в окружность с диаметром $[b|t^0|/(|t^0| - 1), b|t^0|/(|t^0| + 1)]$.

С учетом свойств дробно-линейных отображений задача нахождения оптимального параметра p, обеспечивающего регулярное суммирование Эйлера–Кноппа, может быть решена в плоскости s следующим образом.

1. Найти одну особенность $\tilde{s}$ функции $sF(s)$, лежащую на границе круга B, обладающего следующими свойствами:

B содержит все особенности функции $sF(s)$ и имеет наименьший возможный диаметр,

диаметром служит отрезок вида $[bc/(c-1), bc/(c+1)]$, $c \in (0, 1)$.

2. Найти круг $B_1(s_0, r)$ наименьшего радиуса, обладающий следующими свойствами:

граница круга $B_1(s_0, r)$ касается окружности ∂B в точке $\tilde{s}$,

$B_1(s_0, r)$ содержит все особенности функции $sF(s)$.

3. По радиусу r и центру $s_0 = x_0 + iy_0$ найти s_1 и s_2 такие, что

$$s_{1,2} = s_0 \pm r\sigma, \quad \sigma = (b - s_0)/|b - s_0|. \tag{9}$$

4. Вычислить $p_{\text{опт}} = [t(s_1) + t(s_2)]/2$, $t(s) = s/(s-b)$.

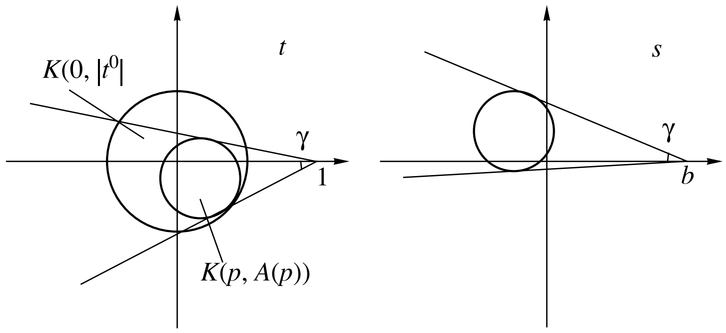
Эти действия отображены на фиг. 2.

Если мы откажемся от регулярности и поставим задачу безусловной минимизации $\min\frac{A(p)}{|1-p|}$, то круг $K(p, A(p))$ не будет в общем случае принадлежать $K(0, |t^0|)$. Но решение $p'_{\text{опт}}$ удовлетворяет требованию $\mathrm{Re}\,p'_{\text{опт}} < 1$ теоремы. В плоскости s эта задача решается следующим образом.

1. Найти круг, который содержит все особенности функции $sF(s)$ и виден под наименьшим углом из точки $s = b$ (см. фиг. 3).

2. По радиусу r и центру s_0 найти s_1 и s_2 по формуле (9).

3. Вычислить $p'_{\text{опт}} = [t(s_1) + t(s_2)]/2$, $t(s) = s/(s-b)$.



Фиг. 3.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДОВ ЛАГЕРРА

Коэффициенты a_k могут быть получены как коэффициенты разложения Тейлора функции $\varphi(z)$:

$$a_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{b}{1-z}F\left(\frac{b}{1-z}\right)\right)\Bigg|_{z=0}.$$

Но эта формула малопригодна для вычислений из-за необходимости нахождения производных высокого порядка. Вместо нее обычно применяют приближенные методы вычисления a_k (см., например, [13]). Нужные нам значения $A_k(p)$ находятся затем по формуле (4). Однако при этом может происходить потеря точности. Чтобы избежать этого, введем новую переменную $w = z/(1 - pz)$ и рассмотрим функцию

$$\Phi(w) = \frac{1}{1+pw}\varphi\left(\frac{w}{1+pw}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(p)w^k.$$

Теперь, используя $\Phi(w)$, можно найти приближенные значения $A_k(p)$ по тем же схемам, что и a_k. При этом сокращается и объем вычислений, и погрешность, возникающая при вычислении чисел $A_k(p)$ по медленно сходящимся a_k.

7. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА ЭЙЛЕРА–КНОППА

Покажем сначала,что КС исходного ряда (2)

$$\lim_{k\to\infty}|a_k|^{1/k} = 1/|z_0|$$

определяется величиной угла, под которым из точки $s = b$ виден некоторый круг, содержащий все s_j.

Окружность $|z| = r > 1$ есть образ окружности M_r, которая проходит через точки $s = b/(1 \pm r)$. Касательные к последней, проведенные в точках пересечения с мнимой осью, проходят через точку $s = b$. Поэтому $r = 1/(\sin\beta/2)$, где β – угол, под которым окружность M_r видна из точки $s = b$. Следовательно,

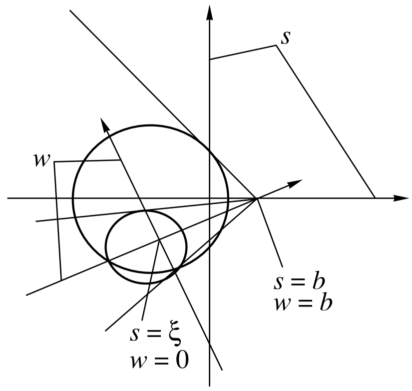
$$\lim_{k\to\infty}|a_k|^{1/k} = 1/|z_0| = \sin\frac{\beta_{\min}}{2},$$

где $\beta_{\min}$ – угол, под которым видна окружность M_r наименьшего радиуса, обладающая свойствами:

на M_r или внутри нее содержатся все особенности функции $sF(s)$;

касательные к M_r, проведенные в точках пересечения с мнимой осью, проходят через точку $s = b$.

Заключим теперь все особенности функции $sF(s)$ в круг $K(\sigma, r)$, который виден под наименьшим углом β из точки $s = b$. Пусть ξ – точка пересечения прямых, одна из которых проходит через центр $s = \sigma$ круга $K(\sigma, r)$ и точку $s = b$, а другая – через точки касания к кругу $K(\sigma, r)$ прямых, проходящих через $s = b$ (см. фиг. 4, где показано соответствие плоскостей w и s).



Фиг. 4.

Заменой $w = \frac{s-\xi}{b-\xi}b$ перенесем указанные прямые на координатные оси плоскости w, так что точка $s = \xi$ перейдет в начало координат, а точка $s = b$ останется на месте. Новому изображению $G(w) = F\left(\frac{b-\xi}{b}w + \xi\right)$ соответствует оригинал

$$g(x) = \frac{b}{b-\xi}\exp\left(-\frac{b\xi}{b-\xi}x\right)f\left(\frac{b}{b-\xi}x\right).$$

Разложим функцию $g(x)$ по многочленам Лагерра:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k(bx),$$

откуда имеем

$$f(t) = \frac{b-\xi}{b}\exp(\xi t)\sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k((b-\xi)t). \tag{10}$$

Коэффициенты c_k определяются из разложения функции

$$\psi(z) = \frac{b}{1-z}F\left(\frac{b-\xi}{1-z} + \xi\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Отсюда следует, что

$$c_k = \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{b}{1-z}F\left(\frac{b-\xi}{1-z} + \xi\right)\frac{dz}{z^{k+1}}. \tag{11}$$

Описанный метод ускорения сходимости равносилен применению преобразования Эйлера–Кноппа с параметром суммирования p, определяемым из условия минимума $A(p)/|1-p|$. Чтобы убедиться в этом, вспомним, что

$$A_k(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \Phi(w)\frac{dw}{w^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{b}{1+(p-1)w}F\left(\frac{b(1+pw)}{1+(p-1)w}\right)\frac{dw}{w^{k+1}}.$$

Таблица

	p'	p''	p'''	$p = 0$
p	1.46e–001–i3.53e–001	2.50e–001–i2.50e–001	1.55e–015	0
$\frac{A(p)}{\lvert 1-p\rvert}$	4.1421e–001	4.4721e–001	7.0711e–001	7.0711e–001
$n =$ 25	6.2886e–002	2.3228e–002	5.7838e–001	5.7838e–001
30	2.3364e–003	1.1441e–003	1.1048e–001	1.1047e–001
35	7.7598e–005	4.7562e–005	1.3708e–002	1.3711e–002
40	2.2891e–006	2.8601e–006	2.8243e–003	2.3274e–003
45	4.1833e–007	1.0628e–005	1.0163e–002	7.2566e–003

Из изложенного выше ясно, что $p = \xi/(\xi - b)$, откуда имеем $\xi = bp/(p-1)$. Подстановка ξ в (11) дает

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{b}{1-z}F\left(b\frac{1-p}{1-z} + \frac{bp}{p-1}\right)\frac{dz}{z^{k+1}}.$$

После замены $z = (1-p)w$ находим

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(1-p)^k}\int\limits_{C_2} \frac{b}{1+(p-1)w}F\left(\frac{b(1+pw)}{1+(p-1)w}\right)\frac{dw}{w^{k+1}} = \frac{A_k(p)}{(1-p)^k}.$$

С учетом этого представления формула (10) принимает вид (5).

Замечание 3. Близкая задача нахождения оптимальной дробно-линейной замены переменной применительно к обобщенной гипергеометрической функции с целью ускорения сходимости исходных рядов рассматривалась в [14].

8. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Расчеты показали, что выбор параметра p по описанной схеме (в комплексной плоскости) дает существенный выигрыш в скорости сходимости по сравнению с выбором на вещественной оси. Ниже приведены результаты сравнения скорости сходимости и точности при различных значениях параметра суммирования.

Далее p' обозначает оптимальный параметр без условия регулярности, p'' – оптимальный параметр, обеспечивающий регулярность суммирования, p''' – оптимальный параметр на вещественной оси, $p = 0$ соответствует обычному суммированию.

В таблице приведены величины $\max\limits_j |f(x_j) - S_n(x_j)|/|f(x_j)|$, $x_j = jT/100$, $j = 0, \ldots, 100$ (S_n – отрезки ряда (5)). Коэффициенты $A_k(p)$ вычисляются с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) по следующей схеме: строится интерполяционный многочлен для функции

$$\Phi(w) = \frac{1}{1+pw}\varphi\left(\frac{w}{1+pw}\right) = \Sigma_{k=0}^{\infty} A_k(p)w^k$$

по узлам Вандермонда

$$w_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\left(j - \frac{1}{2}\right)\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

(они обеспечивают равномерную сходимость интерполяционного процесса в единичном круге). Для оптимизации числа операций выбрано $N = 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$. Затем в качестве $A_k(p)$ берутся первые n коэффициентов БПФ. Вычисления проведены в среде MATLAB с относительной погрешностью округлений $\varepsilon \approx 10^{-16}$. Тестовый пример имеет следующие исходные данные: $f(t) = e^{it} + t$, $F(s) = 1/(s-i) + 1/s^2$, $b = 1$, $T = 20$ (с увеличением T возрастает число колебаний первой составляющей функции-оригинала, соответствующей слагаемому $1/(s-i)$ в изображении, что потребует как увеличения точности вычислений (уменьшения ε), зависящей от используемого математического пакета, так и увеличения числа слагаемых n в частичной сумме; однако при выбранном ε нельзя неограниченно увеличивать n, ибо это приведет к потере точности, что проявляется при $n = 45$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов В.И., Скобля Н.С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974.
2. *Picone M.* Sulla transformazione di Laplace // Rend. Atti. Accad. Naz. Lincei. 1935. V. 21. P. 306–313.
3. *Tricomi F.* Transformazione di Laplace e polinomi di Laguerre // Rend. Atti. Accad. Naz. Lincei. 1935. V. 13. P. 232–239.
4. *Shohat J.* Laguerre polynomials and the Laplace transform // Duke Math. J. 1940. V. 6. P. 615–626.
5. *Piessens R., Branders M.A.* Numerical inversion of the Laplace transform using generalized Laguerre polynomials // Proc. IEE. 1971. V. 118. P. 1517–1522.
6. *Davis B., Martin B.* Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods // J. Comput. Phys. 1979. V. 33. P. 1–32.
7. *Лебедева А.В., Рябов В.М.* Об обращении преобразования Лапласа с помощью рядов Лагерра и квадратурных формул // Методы вычислений. Вып. 19. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2001. С. 123–139.
8. *Gabutti B., Lepora P.* The numerical performance of Tricomi's formula for inverting the Laplace transform // Numer. Math. 1987. V. 51. P. 369–380.
9. *Gabutti B., Lyness J.N.* Some generalizations of the Euler–Knopp transformation // Numer. Math. 1986. V. 48. P. 199–220.
10. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.
11. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
12. *Кабардов М.М.* О применении метода суммирования Эйлера–Кноппа к ряду Лагерра // Методы вычислений. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2008. Вып. 22. С. 77–81.
13. *Амербаев В.М., Утембаев Н.А.* Численный анализ лагерровского спектра. Алма-Ата: Наука, 1982.
14. *Скороходов С.Л.* Методы аналитического продолжения обобщенных гипергеометрических функций ${}_pF_{p-1}(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_{p-1}; z)$ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 7. С. 1164–1186.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 611–615

УДК 519.698

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛОЙ НЕГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ НА ВЫПУКЛОЙ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2009 г. Ю. А. Черняев

(420111 Казань, ул. К. Маркса, 10, КГТУ им. А.Н. Туполева)

e-mail: antipch@mail.ru

Поступила в редакцию 14.07.2008 г.

Предлагается итерационный алгоритм условной минимизации выпуклой негладкой функции на множестве, представленном выпуклой гладкой поверхностью. Доказывается сходимость алгоритма в смысле необходимых условий локального минимума. Библ. 4.

Ключевые слова: условный субдифференциал, необходимое условие локального минимума, сходимость итерационного алгоритма минимизации негладкой функции.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагается численный алгоритм минимизации выпуклых негладких функций, использующий аппарат условных ε-производных по направлениям, и доказывается предложение о его сходимости на уровне необходимых условий экстремума (см. [1], [2]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА

Рассмотрим задачу вида $\varphi(x) \longrightarrow \min$, $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in X \subset R^n$, где функция $\varphi(x)$ является выпуклой и конечной на R^n, а множество X есть граница некоторого выпуклого замкнутого множества G, при этом последняя является гладким многообразием и $\operatorname{int} G \neq \varnothing$, т.е. X – выпуклая гладкая поверхность.

Введем следующие обозначения: $n(x)$ – орт внешней нормали к G в точке $x \in X$; $\Lambda(x)$ – касательная гиперплоскость к G в точке $x \in X$; $D(x) = \{y \in R^n: \|x - y\| \le d\}$, где d – фиксированная положительная константа.

Поскольку граница G – гладкое многообразие, то гиперплоскость $\Lambda(x)$ существует для любого $x \in X$, а вектор-функция $n(x)$ непрерывна на X. В силу выпуклости множеств $\Lambda(x)$ и $D(x)$, при любом $x \in X$ существует непустой условный субдифференциал $\partial^{\Lambda(x) \cap D(x)}\varphi(x)$. Справедливо следующее

Предложение 1. *Если x_* – точка локального минимума выпуклой функции $\varphi(x)$ на множестве X рассматриваемого вида, то* $0 \in \partial^{\Lambda(x_*) \cap D(x_*)}\varphi(x_*)$.

Доказательство. Пусть x_* – точка локального минимума функция $\varphi(x)$ на X. Предположим, что $0 \notin \partial^{\Lambda(x_*) \cap D(x_*)}\varphi(x_*)$. Тогда из [3, с. 128] следует, что найдется точка $\tilde{x} \in \Lambda(x_*) \cap D(x_*)$, для которой $\varphi(\tilde{x}) < \varphi(x_*)$. В силу выпуклости $\varphi(x)$ и [4, с. 256], вектор $h_* = \tilde{x} - x_*$ есть направление убывания $\varphi(x)$ в точке x_*, т.е. существует такая окрестность $U_\delta(h_*)$ и такое число $\alpha_0 > 0$, что $\varphi(x_* + \alpha h) < \varphi(x_*)$ для всех $h \in U_\delta(h_*)$ и $\alpha \in (0; \alpha_0)$. Вектор h_* является также касательным направлением множества X, так как лежит в касательной гиперплоскости к X. Отсюда следует, что

$$\|x_* + \alpha h_* - \mathrm{Pr}_X(x_* + \alpha h_*)\|\alpha^{-1} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0,$$

поэтому при малых α имеет место неравенство $\varphi[\mathrm{Pr}_X(x_* + \alpha h_*)] < \varphi(x_*)$. Но в силу сжимающего свойства оператора проектирования на выпуклое множество G и ограниченности $\|h_*\|$ имеем

$$\|x_* - \mathrm{Pr}_X(x_* + \alpha h_*)\| = \|\mathrm{Pr}_G x_* - \mathrm{Pr}_G(x_* + \alpha h_*)\| \le \|x_* - (x_* - \alpha h_*)\| = \alpha\|h_*\| \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0,$$

т.е. в любой окрестности x_* найдется точка $x \in X$, для которой $\varphi(x) < \varphi(x_*)$, а значит, x_* не является точкой локального минимума $\varphi(x)$ на X. Из полученного противоречия следует, что $0 \in \partial^{\Lambda(x_*) \cap D(x_*)}\varphi(x_*)$.

Заметим, что множество X рассматриваемого вида может быть задано с помощью ограничения типа равенства в виде $X = \{x \in R^n: f(x) = 0\}$, где $f(x)$ является выпуклой и гладкой на R^n функцией и при некотором $\bar{x} \in R^n$ имеет место $f(\bar{x}) < 0$. В этом случае имеем

$$\Lambda(x_*) = \{x \in R^n: \langle f'(x_*), x - x_*\rangle = 0\} \quad \text{и} \quad n(x_*) = f'(x_*)\|f'(x_*)\|^{-1},$$

где $f'(x_*) \ne 0$, и справедливо следующее

Предложение 2. *Если x_* – точка локального минимума функции $\varphi(x)$ на X, то существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, не равные нулю одновременно, и вектор $c \in \partial\varphi(x_*)$, при которых $\lambda_1 c + \lambda_2 f'(x_*) = 0$.*

Доказательство. Пусть x_* – точка локального минимума функции $\varphi(x)$ на X, тогда $0 \in \partial^{\Lambda(x_*) \cap D(x_*)}\varphi(x_*)$, т.е., в силу [3, с. 128], при любом $x \in \Lambda(x_*) \cap D(x_*)$ имеет место неравенство $\varphi(x) \ge \varphi(x_*)$. Поскольку

$$x_* \in \operatorname{int} D(x_*) \quad \text{и} \quad x_* \in \Lambda(x_*) = \{x \in R^n: \langle f'(x_*), x - x_*\rangle = 0\},$$

то, в силу [4, с. 247], конус касательных направлений $\Lambda(x_*) \cap D(x_*)$ и конус направлений убывания функции $\varphi(x)$, построенные для точки x_*, не пересекаются. Из описания соответствующих сопряженных конусов (см. [4, с. 248, 256]) и теоремы Дубовицкого–Милютина (см. [4, с. 205]) следует, что существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, не равные нулю одновременно, и вектор $c \in \partial\varphi(x_*)$, для которых $\lambda_1 c + \lambda_2 f'(x_*) = 0$.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для решения поставленной задачи предлагается следующий алгоритм построения последовательных приближений.

Шаг 0. Полагается $k = 0$ и задается константа $d > 0$.

Шаг 1. Пусть $x_k \in X$ есть k-е приближение.

Шаг 2. Строятся гиперплоскость $\Lambda(x_k)$ и шар $D(x_k)$.

Шаг 3. Если $0 \in \partial^{\Lambda(x_k) \cap D(x_k)}\varphi(x_k)$, то вычисления заканчиваются, в противном случае осуществляется переход к шагу 4.

Шаг 4. Определяется такое $\varepsilon_k > 0$, при котором $0 \notin \partial_{\varepsilon_k}^{\Lambda(x_k) \cap D(x_k)}\varphi(x_k)$ и $0 \in \partial_{2\varepsilon_k}^{\Lambda(x_k) \cap D(x_k)}\varphi(x_k)$.

Шаг 5. Берется произвольный вектор $g_k \in R^n$, удовлетворяющий условиям $\langle n(x_k), g_k\rangle = 0$, $\|g_k\| = 1$ и $\dfrac{\partial_{\varepsilon_k}^{\Lambda(x_k) \cap D(x_k)}}{\partial g_k} < 0$.

Шаг 6. На множестве $\{x_k(\alpha) = x_k + \alpha g_k | \alpha \ge 0\} \cap \Lambda(x_k) \cap D(x_k)$ определяется точка $\tilde{x}_k = \tilde{x}_k(\alpha_k)$, для которой $\varphi(\tilde{x}_k) - \varphi(x_k) \le -\varepsilon_k$.

Шаг 7. Задается число $\beta_k \in [0; 1]$ и определяется точка

$$x_{k+1} = \mathrm{Pr}_G[x_k + \beta_k(\tilde{x}_k - x_k)].$$

Шаг 8. Полагается $k := k + 1$ и осуществляется переход к шагу 1.

Если при некотором k имеет место $0 \in \partial^{\Lambda(x_k) \cap D(x_k)}\varphi(x_k)$, то точка x_k удовлетворяет необходимому условию локального минимума, приведенному выше. Если $0 \notin \partial^{\Lambda(x_k) \cap D(x_k)}\varphi(x_k)$, то в силу выпуклости и компактности $\Lambda(x_k) \cap D(x_k)$ найдется такое $\varepsilon_k > 0$, при котором $0 \notin \partial_{\varepsilon_k}^{\Lambda(x_k) \cap D(x_k)}\varphi(x_k)$ и $0 \in \partial_{2\varepsilon_k}^{\Lambda(x_k) \cap D(x_k)}\varphi(x_k)$. В силу показанного в [3, с. 129], вектор g_k, удовлетворяющий указанным условиям, существует, а на множестве

$$\{x_k(\alpha) = x_k + \alpha g_k | \alpha \geq 0\} \cap \Lambda(x_k) \cap D(x_k)$$

обязательно найдется точка $\tilde{x}_k = \tilde{x}_k(\alpha_k)$, для которой $\varphi(\tilde{x}_k) - \varphi(x_k) \leq -\varepsilon_k$. Задача проектирования на выпуклое замкнутое множество G имеет единственное решение и равносильна задаче проектирования на X, так как точка $x_k + \beta_k(\tilde{x}_k - x_k)$ по построению не лежит в $\operatorname{int} G$.

Обозначим через $y_{k,s}$ проекцию точки $\bar{x}_{k,s} = x_k + (\tilde{x}_k - x_k)/2^s$ на выпуклое замкнутое множество G и рассмотрим два способа выбора чисел β_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Способ 1 состоит в том, что β_k при каждом k полагается равным $1/2^{s_k}$, где s_k – первый из номеров $s = 0, 1, 2, \ldots$, при котором имеет место неравенство

$$\varphi(y_{k,s}) - \varphi(x_k) \leq -0.5\varepsilon_k/2^s.$$

Способ 2 состоит в выборе β_k из условия

$$\varphi[\Pr_G(x_k + \beta_k(\tilde{x}_k - x_k))] = \min_{0 \leq \beta \leq 1} \varphi[\Pr_G(x_k + \beta(\tilde{x}_k - x_k))].$$

При обосновании алгоритма будем полагать, что

$$\exists N > 0 \quad \forall x, \quad y \in X: \|n(x) - n(y)\| \leq N\|x - y\|. \tag{2.1}$$

Будем также считать, что при выбранном начальном приближении $x_0 \in X$ множество $M(x_0) = \{x \in X: \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ ограничено. Пусть Y – выпуклый компакт, удовлетворяющий условию

$$\forall x \in M(x_0): D(x) \subset Y.$$

Тогда из показанного в [3, с. 62] следует, что

$$\exists L > 0 \quad \forall x, \quad y \in Y: |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\|x - y\|. \tag{2.2}$$

Сначала рассмотрим случай, когда числа β_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, выбираются согласно способу 1. При каждом k имеет место неравенство $\varphi(\tilde{x}_k) - \varphi(x_k) \leq -\varepsilon_k$, а значит, в силу выпуклости $\varphi(x)$ на R^n, справедливы неравенства

$$\varphi(\bar{x}_{k,s}) \leq \varphi(x_k) - \varepsilon_k/2^s, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Поскольку $y_{k,s}$ – проекция точки $\bar{x}_{k,s}$ на выпуклое множество G, то векторы $n(y_{k,s})$ и $h_{k,s} = \bar{x}_{k,s} - y_{k,s}$ имеют одно направление, при этом $\langle n(y_{k,s}), x_k - y_{k,s}\rangle \leq 0$, так как $x_k \in G$. Поскольку $\bar{x}_{k,s} \in \Lambda(x_k) \cap D(x_k)$ и $x_k, y_{k,s} \in X \subset G$, то с учетом сказанного выше, сжимающего свойства проектирования, условия (2.1) и неравенства Коши–Буняковского справедлива следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}_{k,s} - y_{k,s}\| &= \|\bar{x}_{k,s} - y_{k,s}\|^{-1}\langle \bar{x}_{k,s} - y_{k,s}, \bar{x}_{k,s} - y_{k,s}\rangle = \langle n(y_{k,s}), \bar{x}_{k,s} - y_{k,s}\rangle = \\
&= \langle n(y_{k,s}), \bar{x}_{k,s} - x_k\rangle + \langle n(y_{k,s}), x_k - y_{k,s}\rangle \leq \langle n(y_{k,s}), \bar{x}_{k,s} - x_k\rangle = \\
&= \langle n(y_{k,s}), \bar{x}_{k,s} - x_k\rangle - \langle n(x_k), \bar{x}_{k,s} - x_k\rangle = \langle n(y_{k,s}) - n(x_k), \bar{x}_{k,s} - x_k\rangle \leq \\
&\leq \|n(y_{k,s}) - n(x_k)\|\|\bar{x}_{k,s} - x_k\| \leq N\|y_{k,s} - x_k\|\|\bar{x}_{k,s} - x_k\| \leq \\
&\leq N\|\bar{x}_{k,s} - x_k\|^2 \leq Nd^2/(2^s)^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad s = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Поскольку $\bar{x}_{k,s} \in Y$, то, в силу (2.2) и (2.3), при $\delta = \dfrac{0.5\varepsilon_k}{2^s L}$ для любого $x \in U_\delta(\bar{x}_{k,s})$ имеет место неравенство $\varphi(x) \le \varphi(x_k) - 0.5\varepsilon_k/2^s$. Решая неравенство $\dfrac{0.5\varepsilon_k}{2^s L} > \dfrac{Nd^2}{(2^s)^2}$ относительно s, получаем $s >$ $> \log_2\dfrac{2NLd^2}{\varepsilon_k}$, откуда видно, что при найденных значениях s имеет место неравенство $\varphi(y_{k,s}) \le$ $\le \varphi(x_k) - 0.5\varepsilon_k/2^s$. Отсюда следует, что при каждом k выполнения указанного неравенства удается добиться при конечном s.

В соответствии со способом 1, при каждом k в качестве x_{k+1} берется точка y_{k,s_k}, где s_k – наименьшее из чисел $s = 0, 1, 2, \ldots$, при котором имеет место неравенство $\varphi(y_{k,s}) - \varphi(x_k) \le -0.5\varepsilon_k/2^s$, поэтому

$$s_k \le 1 + \log_2\frac{2NLd^2}{\varepsilon_k} = \log_2\frac{4NLd^2}{\varepsilon_k}.$$

Поскольку $\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) \le -0.5\varepsilon_k/2^{s_k}$ и $\varepsilon_k \ge 0$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$, то последовательность $\{\varphi(x_k)\}$ не возрастает. Отсюда, из непрерывности $\varphi(x)$, которая вытекает из ее выпуклости на R^n, и компактности $M(x_0)$ следует, что $\varepsilon_k/2^{s_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Но $s_k \le \log_2\dfrac{4NLd^2}{\varepsilon_k}$, поэтому $\varepsilon_k^2/(4NLd^2) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, т.е. $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. В силу [3, с. 128], это означает, что

$$\varphi(x_k) - \min_{x \in \Lambda(x_k) \cap D(x_k)} \varphi(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{2.4}$$

Рассмотрим, далее, случай, когда числа β_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, выбираются согласно способу 2, т.е. при каждом k имеет место соотношение

$$\varphi(x_{k+1}) = \min_{0 \le \beta \le 1} \varphi[\mathrm{Pr}_G(x_k + \beta(\tilde{x}_k - x_k))],$$

где, в силу непрерывности $\varphi(x)$ и сжимающего свойства проектирования, минимум всегда достигается. Поскольку $\beta_k \in [0; 1]$ выбирается из условия наибольшего убывания $\varphi(x)$, то неравенство $\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) \le -0.5\varepsilon_k/2^{s_k}$, где s_k определяется указанным выше образом, остается справедливым при каждом k. Отсюда следует, что $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и $\{x_k\}$ удовлетворяет условию (2.4).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

Выше было показано, что при каждом из рассмотренных способов выбора чисел β_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, последовательность $\{\varphi(x_k)\}$ не возрастает. Это означает, что $\{x_k\}$ лежит в ограниченном множестве $M(x_0)$, а значит, имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть x_* – произвольная предельная точка, а $\{x_{k_m}\}$ – соответствующая ей подпоследовательность. Покажем, что $0 \in$ $\in \partial^{\Lambda(x_*) \cap D(x_*)}\varphi(x_*)$.

Предположим противное. Тогда в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ существует точка $\bar{x} \in$ $\in \Lambda(x_*) \cap \mathrm{int}D(x_*)$, для которой при некотором $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\varphi(\bar{x}) < \varphi(x_*) - \varepsilon$. Обозначив через z_{k_m} проекцию точки $\bar{x}$ на гиперплоскость $\Lambda(x_{k_m})$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, получим

$$\langle n(x_{k_m}), \bar{x} - x_{k_m}\rangle = \langle n(x_{k_m}), \bar{x} - z_{k_m}\rangle + \langle n(x_{k_m}), z_{k_m} - x_{k_m}\rangle,$$

где второе слагаемое равно нулю, так как $z_{k_m} \in \Lambda(x_{k_m})$, а в первом слагаемом векторы $n(x_{k_m})$ и $h_{k_m} = \bar{x} - z_{k_m}$ имеют одинаковое или противоположное направление. Из сказанного следует, что

$$\left|\langle n(x_{k_m}), \bar{x} - x_{k_m}\rangle\right| = \left|\langle n(x_{k_m}), \bar{x} - z_{k_m}\rangle\right| = \|\bar{x} - z_{k_m}\|^{-1}\langle \bar{x} - z_{k_m}, \bar{x} - z_{k_m}\rangle = \|\bar{x} - z_{k_m}\|.$$

Поскольку $\langle n(x_*), \bar{x} - x_*\rangle = 0$, $x_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_*$, и вектор-функция $n(x)$ непрерывна, то $\|\bar{x} - z_{k_m}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, откуда в силу неравенства $\|\bar{x} - x_*\| < d$ и непрерывности функции $\varphi(x)$ при больших m имеет место $\|z_{k_m} - x_{k_m}\| < d$ и $\varphi(z_{k_m}) < \varphi(x_{k_m}) - \varepsilon$. Таким образом, существует $\varepsilon > 0$, для которого при больших m найдутся такие точки $z_{k_m} \in \Lambda(x_{k_m}) \cap D(x_{k_m})$, что $\varphi(z_{k_m}) < \varphi(x_{k_m}) - \varepsilon$. Получено противоречие с (2.4), откуда следует, что $0 \in \partial^{\Lambda(x_*) \cap D(x_*)}\varphi(x_*)$.

В результате доказано

Предложение 3. *Если выполнено условие* (2.1), *множество* $M(x_0)$ *ограничено и последовательность* $\{x_k\}$ *построена по приведенному алгоритму при одном из рассмотренных способов выбора чисел* β_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *то любая предельная точка* x_* *этой последовательности удовлетворяет необходимому условию локального минимума, сформулированному в предложении* 1.

Если $X = \{x \in R^n: f(x) = 0\}$, где $f(x)$ является выпуклой и гладкой функцией, то, в силу предложения 2, для любой предельной точки x_* найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, не равные нулю одновременно, и вектор $c \in \partial\varphi(x_*)$, при которых имеет место соотношение $\lambda_1 c + \lambda_2 f'(x_*) = 0$.

Замечание. Введем обозначение

$$T(x) = \{y \in R^n: |y^{(s)} - x^{(s)}| \le d, s = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Множество $T(x)$ является выпуклым и замкнутым и представляет собой n-мерный куб с центром в точке x. Для любого $x \in X$ справедливо включение $D(x) \subset T(x)$, а при любом $y \in T(x)$ имеет место неравенство $\|x - y\| \le d\sqrt{n}$. Нетрудно проверить, что если в предложенном алгоритме заменить множества $D(x_k)$ на $T(x_k)$ для всех k, то проведенные рассуждения относительно выбора чисел β_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и сходимости алгоритма останутся справедливыми. Таким образом, можно говорить о двух вариантах работы алгоритма: в первом из них на каждой итерации строится множество $\Lambda(x_k) \cap D(x_k)$, во втором – множество $\Lambda(x_k) \cap T(x_k)$. В зависимости от того, для множеств-пересечений какого вида проще решать задачи нахождения числа ε_k и вектора g_k, выбирается тот или иной вариант.

Отметим, что задачи нахождения числа ε_k, вектора g_k, точки $\tilde{x}_k$ и задача проектирования на множество G, решаемые в процессе выполнения алгоритма, в общем случае являются сложными, поэтому для практического использования метода требуется разработка вычислительных алгоритмов, учитывающих специфику конкретных задач минимизации. От алгоритма следует ожидать более быстрой сходимости, если в качестве вектора g_k при каждом k брать направление условного ε_k-наискорейшего спуска функции $\varphi(x)$ в точке x_k на $\Lambda(x_k) \cap D(x_k)$ или $\Lambda(x_k) \cap T(x_k)$. Нахождение такого направления, однако, требует дополнительных вычислительных затрат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заботин В.И., Черняев Ю.А.* Обобщение метода проекции градиента на экстремальные задачи с предвыпуклыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 3. С. 367–373.
2. *Заботин В.И., Черняев Ю.А.* Сходимость итерационного метода решения задачи математического программирования с ограничением в виде выпуклой гладкой поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 4. С. 609–612.
3. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
4. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

УДК 576.89.42:579.834.114(571.1/5)(1-21)

А. В. Рябченко, А. Б. Беклемишев

Научно-исследовательский институт биохимии СО РАМН
ул. Акад. Тимакова, 2, Новосибирск, 630117, Россия
E-mail: ibch@soramn.ru

МОНИТОРИНГ ЗАРАЖЕННОСТИ КЛЕЩЕЙ ВОЗБУДИТЕЛЯМИ ЛАЙМ-БОРРЕЛИОЗА В РЕКРЕАЦИОННОЙ ЗОНЕ НОВОСИБИРСКА

Настоящая работа посвящена изучению зараженности клещей *Ixodes persulcatus Schulze* спирохетами *Borrelia burgdorferi s. l.* Исследовались клещи, отловленные весной 2003 и 2005 г. в рекреационной зоне Новосибирского научного центра. Инфицированность клещей спирохетами определяли методом однораундовой ПЦР. Зараженность клещей составила 31,7 ± 6,0 % в 2003 г. и 21,2 ± 2,3 % в 2005 г. Установлено, что в исследованной популяции клещей циркулируют только два геновида боррелий: *Borrelia garinii* и *Borrelia afzelii*, причем первый тип спирохет оказался преобладающим (более 70 %).

Ключевые слова: *Ixodes persulcatus*, *Borrelia*, Лайм-боррелиоз.

Лайм-боррелиоз (син.: иксодовый клещевой боррелиоз, болезнь Лайма) – трансмиссивное природно-очаговое инфекционное заболевание, передаваемое человеку с укусами иксодовых клещей (*Ixodes persulcatus Schulze*). Возбудителями Лайм-боррелиоза (ЛБ) являются спирохеты трех геновидов, относящихся к комплексу *Borrelia burgdorferi sensu lato* (*s. l.*): *B. burgdorferi sensu stricto* (*s. s.*), *B. afzelii* и *B. garinii*. Каждый из этих геновидов вызывает свойственные для него клинические формы заболевания: артрит, нейроборрелиоз, хронический атрофический дерматит соответственно [1]. Еще в 90-х годах прошлого века было установлено, что в популяциях иксодовых клещей, распространенных на территории России, циркулируют только два геновида боррелий: *B. garinii* и *B. afzelii* с доминирующим распространением первого [2; 3]. Однако уже в 2001 г. появились сообщения об обнаружении геновида *B. burgdorferi s. s.* в отдельных популяциях клещей *I. persulcatus Schulze* в европейской части России [4–6], что свидетельствует о распространении этого геновида с территории Западной Европы на восток.

Таким образом, ежегодный мониторинг зараженности иксодовых клещей возбудителями ЛБ на урбанизированных территориях России важен как для оценки эпидемиологического состояния по ЛБ, так и для прогноза заболеваемости, форм болезни и ее течения. В связи с этим **целью** работы явилось исследование зараженности клещей *I. persulcatus*, населяющих рекреационную зону Новосибирского научного центра (Советский район г. Новосибирска), спирохетами *Borrelia burgdorferi s. l.* и определение геновидового состава спирохет.

Материал и методы

Сбор клещей Ixodes persulcatus Schulze проводили в лесопарковой зоне Новосибирского научного центра в мае 2003 и 2005 г. Исследовано 210 и 306 взрослых особей обоих полов соответственно.

Культивирование боррелий проводили в среде BSK-II, содержащей налидиксовую кислоту и рифампицин, используя два различных способа [7; 8]. В первом случае в качестве посевного материала использовали гомогенат клещей. Каждого клеща (всего 150 особей, по 5 особей на культуру и мышь) стерилизовали 70 % спиртом, гомогенизировали в физрастворе и полученный гомогенат инокулировали в среду BSK-II. Во втором случае гомогенат клеща инъецировали внутрибрюшинно белой беспородной мыши (всего 25 мышей). Мышей после инъекций содержали 20 дней в виварии и затем забивали. Кровь, сердце и мочевой пузырь животных стерильно извлекали и помещали в среду BSK-II.

Культивирование как гомогената клещей, так и органов инфицированных мышей в среде BSK-II длилось 30 дней при 32 ± 1 °C, после чего культуры пересевали на свежую среду и выращивали еще 15 дней.

Выделение суммарного препарата нуклеиновых кислот из культур боррелий проводили с использованием гуанидинизотиоционата и последующей фенольно-хлороформной экстракции [9]. Клетки бактерий осаждали центрифугированием, ресуспендировали в 4 М растворе гуанидинизотиоционата и инкубировали 30 мин при 60 °C. Затем проводили фенольно-хлороформную экстракцию, ДНК осаждали из водной фазы равным объемом изопропилового спирта, осадок промывали дважды 70 % этанолом, подсушивали на воздухе и растворяли в 50 мкл ТЕ-буфера. Препараты ДНК хранили в ТЕ-буфере при –20 °C. Для ПЦР использовали по 3 мкл препарата на 30 мкл реакционной смеси.

Выделение суммарного препарата нуклеиновых кислот из клещей. ДНК выделяли только из живых клещей. Каждого клеща гомогенизировали в 100 мкл 4 М раствора гуанидинтиоционата, содержащего гликоген, прогревали при 60 °C в течение часа в твердотельном термостате. Далее ДНК очищали так же, как и в предыдущей методике выделения ДНК.

Обнаружение ДНК боррелий с помощью ПЦР проводили по методике [10] с некоторыми модификациями [3]. Ампликоны анализировали в 6 % полиакриламидном геле (ПААГ) или 1,5 % агарозном геле.

Генотипирование боррелий осуществляли двумя методами. Один из них основан на однораундовой ПЦР, в которой в качестве обнаруживаемой мишени служили гены лизил-тРНК синтетазы (класс I), специфичные для каждого из трех геновидов спирохет (*B. burgdorferi s. s.*, *B. garinii* и *B. afzelii*) [11]. Продукты ПЦР анализировали с помощью электрофореза в 1,5 % агарозном геле. Второй метод основан на анализе полиморфизма длин рестрикционных фрагментов (ПДРФ), получаемых гидролизом ампликонов межгенной области *rrf-rrl* рестриктазой *MseI* или *Tru9I* [10]. Продукты гидролиза анализировали в 6 % ПААГ.

Электрофорез ДНК в ПААГ и агарозном геле проводили по общепринятым методикам [9]. Гель окрашивали раствором бромистого этидия и визуально анализировали, фотографировали при освещении ультрафиолетом с длиной волны 312 нм на цифровой фотоаппарат с соответствующим светофильтром.

Результаты исследования и обсуждение

Зараженность клещей боррелиями оценивали с помощью обнаружения геномных ДНК спирохет методом ПЦР. Способ включал выделение суммарного препарата ДНК из каждого клеща и последующее выявление в нем геномной ДНК боррелий с помощью ПЦР. В качестве амплифицируемой мишени использовали специфичную для представителей комплекса *B. burgdorferi s. l.* межгенную область генов рибосомальных 5S (*rrf*) и 23S (*rrl*) РНК [10]. Продукты ПЦР анализировали в 6 % ПААГ. В случае положительного ответа длина ампликона составляет 250–270 п. н. Для выявления ложноотрицательных результатов анализа, обусловленных присутствием в препарате исследуемой ДНК ингибиторов ПЦР, реакцию проводили в присутствии ДНК внутреннего контроля с дополнительной парой соответствующих ей праймеров. В качестве ДНК внутреннего контроля использовали ампликон фрагмента генома вируса гепатита В (HBV). Размер ампликона, получаемого на ДНК внутреннего контроля, составляет 150 п. н. В качестве положительного контроля в ПЦР использовали геномную ДНК *B. burgdorferi s. s.* эталонного штамма В31, размер ампликона межгенной области *rrf-rrl* которого составляет 250 п. н. Представлены результаты типичного анализа образцов ДНК клещей на присутствие в них геномных ДНК боррелий (рис. 1).

На дорожках 4, 7, 8 и 12 присутствует полоса продукта ПЦР, соответствующего по своему размеру ампликону межгенной области *rrf-rrl* (~ 250 п. н.). Иными словами, в образцах ДНК клещей присутствовала ДНК спирохет *B. burgdorferi s. l.*

В целом за 2003 и 2005 гг. нами были проанализированы 516 клещей (табл.).

Определение геновидовой принадлежности спирохет *B. burgdorferi s. l.*, обнаруженных в исследованных клещах, проводили с помощью двух методов генотипирования их геномных ДНК.

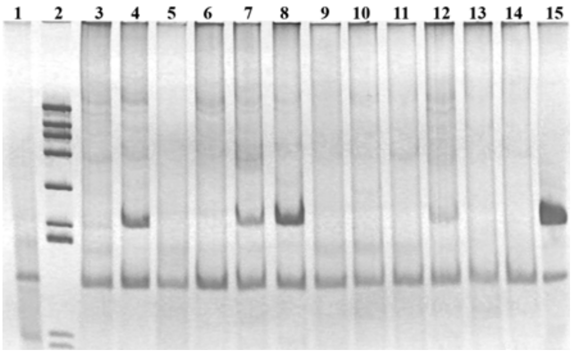


Рис. 1. Электрофореграмма продуктов амплификации межгенной области *rrf-rrl*, полученных методом ПЦР на образцах ДНК, выделенных из клещей. Электрофорез ДНК проводили в 6 % полиакриламидном геле.

1 – отрицательный контроль; 2 – маркерная ДНК (pBR322 гидролизованная рестриктазой *AluI*); 3–14 – продукты ПЦР, полученные на препаратах ДНК клещей; 15 – продукт ПЦР на геномной ДНК *B. burgdorferi s. s.* шт. B31 (положительный контроль)

Заражённость взрослых клещей *I. persulcatus*, отловленных в рекреационной зоне ННЦ в 2003 и 2005 гг., различными геновидами спирохет *B. burgdorferi s. l.*

Год	Кол-во клещей	Доля ПЦР-позитивных клещей, %	Количество генотипированных ПЦР-позитивных образцов ДНК из клещей				
			суммарное кол-во	*B. garinii* NT29	*B. garinii* 20047T	*B. afzelii*	*B. garinii* + *B. afzelii*
2003	210	31,7 ± 6,0	37	10	14	3	10
2005	306	21,2 ± 2,3	64	8	31	15	10
Всего	516	22,6 ± 4,4	101	18	45	18	20

Первый способ генотипирования осуществляли путем однораундовой ПЦР, в которой в качестве обнаруживаемой мишени служили гены лизил-тРНК синтетазы (класс I) спирохет *B. burgdorferi s. l.* [11]. Сначала этот способ был апробирован в экспериментах по обнаружению и типированию геномных ДНК спирохет, полученных культивированием. Нами было проведено культивирование в среде BSK-II гомогенатов взрослых особей клещей *I. persulcatus*, а также кусочков органов и тканей (сердце, мочевой пузырь, кровь) мышей, инфицированных гомогенатами клещей (всего 73 культуры). По окончанию культивирования, из части объема каждой культуры выделяли суммарные препараты нуклеиновых кислот для обнаружения геномных ДНК спирохет *B. burgdorferi s. l.* и генотипирования изолятов. Продукты ПЦР анализировали с помощью электрофореза в 1,5 % агарозном геле. О присутствии в культуре спирохет и их геновидовой принадлежности судили по наличию ампликона, имеющего размер, специфичный для каждого геновида: *B. burgdorferi s. s.* (709 п. н.), *B. garinii* (856 п. н.) и *B. afzelii* (619 п. н.) (рис. 2).

На дорожках электрофореграммы выделяются отчетливые полосы ампликонов размером ~ 850–860 п. н. (дорожки 2–5), ~ 620–630 п. н. (дорожка 6) и двух ампликонов, имеющих размеры ~ 850–860 п. н. и ~ 620–630 п. н. (дорожка 7). Результаты анализа свидетельствуют о том, что препараты ДНК 4-х исследованных культур содержат геномные ДНК спирохет геновида *B. garinii* (дорожки 2–5), одной культуры *B. afzelii* (дорожка 6) и одной культуры – смесь геномных ДНК *B. garinii* и *B. afzelii* (дорожка 7).

В целом, в результате проведенного анализа 73-х культур только в 37-и обнаружены и типированы спирохеты *B. burgdorferi s. l.* В 24-х культурах идентифицированы спирохеты геновида *B. garinii*, в 3-х – *B. afzelii* и в 10-и культурах – спирохеты обоих геновидов. Геновид *B. burgdorferi s. s.* не был обнаружен ни в одной из исследованных культур.

В завершение этого эксперимента после проведения второго пассажа культивирования были получены 23 культуры западносибирских изолятов *B. burgdorferi s. l.*, которые были заложены в музей бактериальных культур.

Таким образом, использованный в работе метод выявления и типирования геномных ДНК спирохет *B. burgdorferi s. l.* [11] является сравнительно простым, информативным и быстрым, может применяться для анализа культивируемых изолятов боррелий. Однако этот метод не позволяет идентифицировать геномные группы спирохет внутри геновида *B. garinii*, что представляется важным для изучения распространения спирохет этого геновида на обследуемых территориях. Кроме того, судя по результатам наших исследований, метод не приемлем для прямого обнаружения и типирова-

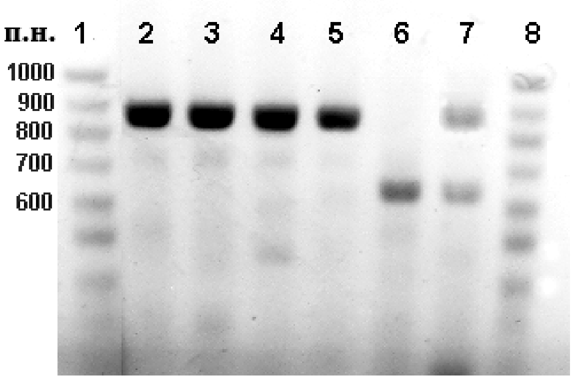


Рис. 2. Электрофореграмма продуктов ПЦР, осуществляемой на препаратах ДНК культур, исследуемых на наличие геномных ДНК спирохет *B. burgdorferi s. l.* и определение их геновидовой принадлежности по методике [11]. Электрофорез ампликонов в 1,5 % агарозном геле.

1, 8 – маркеры молекулярных масс (100–1000 п. н.); 2–7 – продукты ПЦР, полученные на препаратах ДНК исследуемых культур; 2–5 – культуры геновида *B. garinii* (размер ампликона 856 п. н.); 6 – культура геновида *B. afzelii* (размер ампликона 619 п. н.); 7 – смесь культур геновидов *B. garinii* и *B. afzelii*

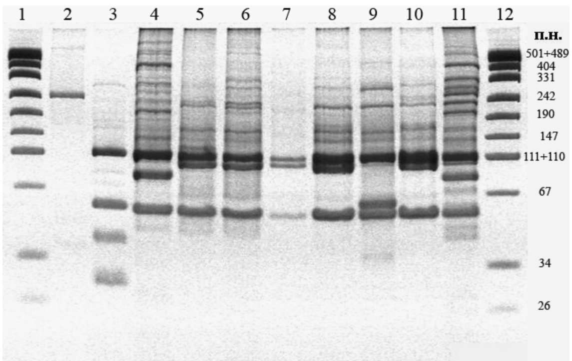


Рис. 3. Электрофореграмма рестриктных фрагментов, полученных в процессе генотипирования анализируемых образцов ДНК *B. burgdorferi s. l.* по методике [10]. Электрофорез проводили в 12 % полиакриламидном геле.

1, 12 – маркеры молекулярных масс ДНК; 2 – ампликон межгенной области *rrf-rrl* геновида *B. burgdorferi s. s.* шт. B31 негидролизованный; 3 – ампликон межгенной области *rrf-rrl* геновида *B. burgdorferi s. s.* шт. B31 гидролизованный рестриктазой *MseI*; 4–11 – ампликоны межгенной области *rrf-rrl* анализируемых образцов ДНК *B. burgdorferi s. l.*, гидролизованные рестриктазой *MseI*

ния спирохет *B. burgdorferi s. l.* непосредственно в гомогенатах клещей. Как правило, при анализе продуктов ПЦР, полученных на препаратах ДНК, выделенных из гомогената клещей, на электрофореграммах выявляется большое количество полос, соответствующих ампликонам различных размеров. Наблюдаемая гетерогенность ампликонов, по-видимому, обусловлена неспецифическим связыванием праймеров с фрагментами геномной ДНК клещей.

В связи с изложенным, для генотипирования геномных ДНК боррелий, выделенных непосредственно из клещей, мы использовали более трудоемкий метод, предложенный D. Postic и др. [10]. Он основан на анализе полиморфизма длин рестриктных фрагментов, полученных гидролизом ампликонов межгенной области *rrf-rrl* рестриктазой *MseI* или *Tru9I*. Представителям каждого геновида и геномной группы спирохет *B. burgdorferi s. l.* свойственен определенный набор отличающихся по размерам рестриктных фрагментов ампликона межгенной области *rrf-rrl* [10]. Таким образом, по результатам электрофоретического анализа полученных рестриктов можно судить о геновидовой принадлежности боррелий, содержащихся в исследуемом клеще. С использованием этого метода исследованы образцы ДНК, выделенные из 64-х клещей, в которых, по данным ПЦР-анализа, обнаружена геномная ДНК спирохет *B. burgdorferi s. l.* (рис. 3).

Судя по картине электрофореза образцов ДНК, гидролизованных рестриктазой *MseI* (см. рис. 3), два исследуемых образца (дорожки 4 и 11) содержали геномную ДНК спирохет, относящихся к геновиду *B. afzelii*, 5 образцов (дорожки 5–8 и 10) – к геновиду *B. garinii* (геномная группа 20047) и один образец (дорожка 9) – к геновиду *B. garinii* (геномная группа NT29). Доминирующим геновидом являлись спирохеты *B. garinii*, включающие представителей двух геномных групп (NT29 и 20047) и обнаруживаемые в более чем 70 % инфицированных спирохетами клещей (см. табл.). Десять клещей из шестидесяти четырех были инфицированы спирохетами обоих геновидов.

Заключение

В результате проведенных исследований установлено, что, как и в предыдущие годы наблюдений [3; 12], в популяции клещей *I. persulcatus*, населяющих рекреационную зону Новосибирского научного центра, циркулируют только два геновида спирохет *B. burgdorferi s. l.* (*B. garinii* и *B. afzelii*) с существенным преобладанием первого вида (более 70 % случаев).

Полученные результаты свидетельствуют о том, что на протяжении последних семи лет не наблюдается изменений в геновидовом составе спирохет *B. burgdorferi s. l.*, циркулирующих в исследуемой популяции клещей *I. persulcatus*, хотя отмечаются зависимые от года наблюдений колебания в количестве инфицированных спирохетами особей.

Список литературы

1. *Different* genospecies of *Borrelia burgdorferi* are associated with distinct clinical manifestations in Lyme borreliosis / A. P. Van Dam, H. Kuiper, K. Vos et al. // Clin. Infect. Dis. 1993. Vol .17. P. 708–717.

2. *Borrelia burgdorferi sensu lato* in Russia and neighbouring countries: high incidence of mixed isolates / D. Postic, E. Korenberg, N. Gorelova et al. // Res. Microbiol. 1997. Vol. 148. P. 691–702.

3. *Detection* and typing of *Borrelia burgdorferi sensu lato* genospecies in *Ixodes persulcatus* ticks in West Siberia, Russia / A. B. Beklemishev, A. K. Dobrotvorsky, A. V. Piterina et al. // FEMS Microbiol. Lett. 2003. Vol. 227, № 2. P. 157–161.

4. *The first* isolation of *Borrelia burgdorferi sensu stricto* in Russia / N. B. Gorelova, E. I. Korenberg, D. Postic et al. // Zh. Mikrobiol. Epidemiol. Immunobiol. 2001. Vol. 4. P. 10–12.

5. *Определение* генетической гетерогенности в популяции *Ixodes persulcatus Schulze* (*Acari: Ixodidae*) в Северо-западной части России и распространения клещевых патогенов, возбудителей болезни Лайма и эрлихиоза, в различных генотипах клещей / А. В. Семенов, А. Н. Алексеев, Н. В. Дубинина и др. // Мед. паразитология и паразитарные болезни. 2001. № 3. С. 11–15.

6. *Обнаружение Borrelia burgdorferi sensu stricto* в Московской области, Россия / Т. Масузава, Р. Л. Наумов, М. Кудекен и др. // Мед. паразитология и паразитарные болезни. 2001. № 2. С. 52.

7. *Primary* culture of *Borrelia burgdorferi* from *Ixodes ricinus* ticks / M. M. Wittenbrink, C. Reuter, M. L. Manz et al. // Zentralbl. Bakteriol. 1996. Vol. 285, № 1. P. 20–28.

8. *Lyme* disease: a selective medium for isolation of the suspected etiological agent, a spirochete / S. E. Johnson, G. C. Klein, G. P. Schmid et al. // J. Clin. Microbiol. 1984. Vol. 19, № 1. P. 81–82.

9. *Маниатис Т. и др.* Молекулярное клонирование / Т. Маниатис, Э. Фрич, Д. Сэмбрук. М., 1984.

10. *Diversity* of *Borrelia burgdorferi sensu lato* evidenced by restriction fragment length polymorphism of *rrf* (*5S*)-*rrl* (23S) intergenic spacer amplicons / D. Postic, M. Assous, P. A. D. Grimont et al. // Int. J. Syst. Bacteriol. 1994. Vol. 44. P. 743–752.

11. *Differentiation* of *Borrelia burgdorferi sensu lato* strains using class I lysyl-tRNA synthetase-encoding genes / N. Mejlhede, A. Monthan, M. Theisen et al. // Med. Microbiol. Immunol. 2003. Vol. 192. P. 79–83.

12. *Characterization* of *Borrelia burgdorferi sensu lato* from Novosibirsk region (West Siberia, Russia) based on direct PCR / N. N. Livanova, O. V. Morozova, I. V. Morozov et al. // Eur. J. Epidemiol. 2003. Vol. 18, № 12. P. 1155–1158.

Материал принят в печать 13.10.2006

A. V. Ryabchenko, A. B. Beklemishev

Monitoring of infection rate of ticks inhabiting the Novosibirsk recreation zone by Lyme disease agents

The present work is devoted to studying of infection rate of *Ixodes persulcatus* ticks by *Borrelia burgdorferi s. l.* spirochetes. The ticks caught in the spring 2003 and 2005 in recreation zone of the Novosibirsk scientific centre were investigated. The infection rate of ticks by spirochetes was determined by a PCR method and has made 31,7 ± 6,0 % in 2003 and 21,2 ± 2,3 % in 2005. A belonging of spirochetes to certain genospecies was determined with use of the methods described D. Postic et al. (1994) and N. Mejlhede et al. (2003). It has been shown, that only two genospecies of *B. burgdorferi s. l.* – *B. garinii* and *B. afzelii* circulate in the investigated population of ticks, with essential predominance of the first (> 70 %).

Keywords: Ixodes persulcatus Schulze, *Borrelia*, Lyme disease.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 624–627

УДК 519.624.2

ОБ ОБЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ САМОСОПРЯЖЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1)]

© 2009 г. А. А. Абрамов*, В. И. Ульянова*, Л. Ф. Юхно**

*(*119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН;*

***125047 Москва, Миусская пл., 4а, ИММ РАН)*

e-mail: alalabr@ccas.ru

Поступила в редакцию 01.10.2008 г.

Рассматривается общая нелинейная самосопряженная спектральная задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Предлагается метод сведения такой задачи к задаче для гамильтоновой системы. Приводятся результаты перенесения на такую систему результатов для гамильтоновых систем, полученных авторами ранее. Библ. 3.

Ключевые слова: гамильтонова система обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейная спектральная задача, собственные значения.

1. ПОСТАНОВКА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую нелинейную спектральную задачу. Уравнение имеет вид

$$iM(t)y' + \frac{i}{2}M'(t)y + B(t, \lambda)y = 0, \tag{1}$$

где $a \leqslant t \leqslant b$, $M : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $B : [a, b] \times (\Lambda_1, \Lambda_2) \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ (не исключено, что $\Lambda_1 = -\infty$ или $\Lambda_2 = +\infty$), $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^n$ при фиксированном λ, $M(t)$ непрерывно дифференцируема, $B(t, \lambda)$ непрерывна, $M(t)$ невырожденна при всех t. Граничные условия имеют вид

$$f(\lambda)y(a) + g(\lambda)y(b) = 0, \tag{2}$$

где $f : (\Lambda_1, \Lambda_2) \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $g : (\Lambda_1, \Lambda_2) \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $\operatorname{rank}\| f(\lambda), g(\lambda)\| = n$ для всех λ.

Предполагается, что задача (1), (2) является самосопряженной, т.е. что $M(t) = M^*(t)$ для всех t, $B(t, \lambda) = B^*(t, \lambda)$ для всех t и λ и что граничные условия удовлетворяют требованию

$$f(\lambda)M^{-1}(a)f^*(\lambda) = g(\lambda)M^{-1}(b)g^*(\lambda) \tag{3}$$

для всех λ.

Дополнительно будем предполагать определенную монотонность исходных данных по λ, а именно:

$B(t, \lambda)$ не убывает по λ для всех t. Это означает, что из неравенства $\lambda_1 > \lambda_2$ следует неравенство $B(t, \lambda_1) \geqslant B(t, \lambda_2)$ при всех значениях t. Последнее же неравенство означает, что эрмитова матрица $B(t, \lambda_1) - B(t, \lambda_2)$ неотрицательно определена;

граничные условия удовлетворяют следующему соотношению:

$$i\{[df(\lambda)/d\lambda]M^{-1}(a)f^*(\lambda) - [dg(\lambda)/d\lambda]M^{-1}(b)g^*(\lambda)\} \geqslant 0 \tag{4}$$

для всех значений λ. (Нетрудно проверить, что матрица в левой части этого неравенства является эрмитовой, так что неравенство имеет смысл.)

Для простоты изложения будем полагать функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ гладкими.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 08-01-00139, 08-01-00069).

Здесь переменная λ обозначает спектральный параметр. Значения λ, для которых существует нетривиальное решение задачи (1), (2), называются собственными значениями (СЗ) задачи, соответствующие решения $y(t)$ – собственными функциями, число линейно независимых собственных функций, соответствующих какому-либо СЗ, называется кратностью этого СЗ.

Будем предполагать, что каждое СЗ рассматриваемой задачи изолированное.

Приведем способ преобразования этой задачи к задаче для гамильтоновой системы порядка $2n$, рассматриваемой на отрезке $[a, c]$, где $c = (a + b)/2$. Полученная после преобразования задача будет удовлетворять всем требованиям, при которых в работах [1]–[3] были исследованы ее свойства.

Сделаем в (1), (2) замену

$$y(t) = R(t)z(t),$$

где $R : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$, $R(t)$ непрерывно дифференцируема, $\det R(t) \neq 0$ для всех t. Умножив полученное из (1) уравнение слева на $R^*(t)$, получим уравнение

$$iR^*(t)M(t)R(t)z'(t) + \frac{i}{2}(R^*(t)M(t)R(t))'z + Q(t, \lambda)z = 0, \tag{5}$$

где

$$Q = \frac{i}{2}[R^*MR' - (R')^*MR] + R^*BR.$$

Уравнение (5) эквивалентно уравнению (1) и удовлетворяет всем указанным выше требованиям.

Выберем функцию $R(t)$ так, чтобы $R^*(t)M(t)R(t) = S$, где S – постоянная матрица на $[a, b]$, $S = S^*$. Это возможно, так как индексы инерции матрицы $M(t)$ не меняются с изменением t. (Практическое решение этой вспомогательной задачи будет рассмотрено в разд. 2.) В результате получится уравнение

$$iSz' + Q(t, \lambda)z = 0. \tag{6}$$

Введем на отрезке $[a, c]$ следующие функции: $\tilde{Q}(t, \lambda) = Q(a + b - t, \lambda)$, $w_1(t) = S(z(t) - iz(a + b - t))$, $w_2(t) = iz(t) - z(a + b - t)$, $w(t) = \begin{Vmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{Vmatrix}$. Получим на отрезке $[a, c]$ систему $2n$ уравнений вида

$$Jw' = A(t, \lambda)w, \tag{7}$$

где

$$A = \begin{Vmatrix} S^{-1}\dfrac{\tilde{Q} + Q}{2}S^{-1} & iS^{-1}\dfrac{\tilde{Q} - Q}{2} \\ -i\dfrac{\tilde{Q} - Q}{2}S^{-1} & \dfrac{\tilde{Q} + Q}{2} \end{Vmatrix}, \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{Vmatrix},$$

I – единичная $n \times n$-матрица. Система (7) удовлетворяет всем требованиям, предъявленным к системе (1).

Граничные условия (2) перейдут в условия

$$\psi_a(\lambda)w(a) = 0, \quad \psi_c w(c) = 0, \tag{8}$$

где

$$\psi_a(\lambda) = \|(f(\lambda)R(a) + ig(\lambda)R(b))S^{-1}, -g(\lambda)R(b) - if(\lambda)R(a)\|, \quad \psi_c = \|I, S\|,$$

$\operatorname{rank}\psi_a(\lambda) = n$ для всех λ, $\operatorname{rank}\psi_c = n$. Требование (3) перейдет в условие $\psi_a(\lambda)J\psi_a^*(\lambda) = 0$, второе из условий (8) удовлетворяет требованию $\psi_c J\psi_c^* = 0$. Требование (4) перейдет в условие $(d\psi_a(\lambda)/d\lambda)J\psi_a^*(\lambda) \leq 0$, а ψ_c от λ не зависит.

Таким образом, для нелинейной спектральной задачи (7), (8) выполняются все условия, при которых в [1]–[3] изучались свойства такой задачи. Из этих результатов, в частности для задачи (1), (2), получается эффективный метод вычисления количества СЗ с учетом их кратности, лежащих на интервале (λ_1, λ_2), если λ_1 и λ_2 не являются СЗ этой задачи; сами СЗ при этом не вычисляются.

В [1] отмечено, что понятие номера СЗ задачи для гамильтоновой системы с граничными условиями, зависящими от спектрального параметра, не вводится (причина этого поясняется в [3]). Для общей самосопряженной спектральной задачи, рассматриваемой в настоящей работе, понятие номера не вводится и в том случае, когда граничные условия не зависят от спектрального параметра. Причина этого в следующем.

Как показано в разд. 1, общая задача приводится к задаче для гамильтоновой системы с помощью замены искомых функций. Эта замена может осуществляться различными способами, так что при этом могут получиться различные задачи для гамильтоновых систем. Эти задачи будут эквивалентны и тем самым будут иметь одни и те же СЗ. Однако номера соответствующих СЗ этих задач, определяемые в соответствии с [1], а также [3], могут не совпадать.

Пример. Рассмотрим задачу

$$iy' = \lambda y, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \quad y(0) - y(2\pi) = 0, \quad n = 1. \tag{9}$$

В этой задаче СЗ – все целые числа. Задача (1.9) приводится к задаче для гамильтоновой системы вида

$$\begin{aligned} -w_2' &= \lambda w_1, \\ w_1' &= \lambda w_2, \end{aligned} \quad w_1(0) - w_2(0) = 0, \quad w_1(\pi) - w_2(\pi) = 0. \tag{10}$$

Задачу (10) заменой

$$w_1 = u_1 \cos mt - u_2 \sin mt,$$

$$w_2 = u_1 \sin mt + u_2 \cos mt,$$

где m целое, приведем к задаче

$$\begin{aligned} -u_2' &= (\lambda + m)u_1, \\ u_1' &= (\lambda + m)u_2, \end{aligned} \quad u_1(0) - u_2(0) = 0, \quad u_1(\pi) - u_2(\pi) = 0. \tag{11}$$

В соответствии с определением, данным в [1], СЗ λ задачи (10), равное k, имеет номер k, в то время как это же СЗ λ в задаче (11) имеет номер $k + m$. Переход от задачи (10) к (11) соответствует замене $y(t) = e^{imt}z(t)$ в задаче (9). В результате получается задача

$$iz' = (\lambda + m)z, \quad z(0) - z(2\pi) = 0.$$

Таким образом, здесь для двух эквивалентных задач номера одних и тех же СЗ не совпадают.

По этой причине для общей задачи, рассматриваемой в настоящей работе, не вводится и понятие индекса (см. [3]).

Таким образом, номер СЗ спектральной задачи для гамильтоновой системы определяется только для самой задачи в ее исходной форме, без преобразования к эквивалентной системе.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

В разд. 1 для приведения уравнения (1) к виду (6) с постояннной матрицей S использовалась функция $R(t)$ такая, что $R^*(t)M(t)R(t) = S$ для всех значений t. В ряде случаев такая функция, определяемая, разумеется, неоднозначно, может быть построена чисто алгебраическими методами. Рассмотрим здесь один способ построения такой функции, несложный при численной реализации методов, упомянутых в разд. 1.

Возьмем какое-либо $t_0 \in [a, b]$. Составим для вычисления $R(t)$ задачу Коши, а именно рассмотрим уравнение

$$R'(t) = -\frac{1}{2}M^{-1}(t)M'(t)R$$

с начальным условием

$$R(t_0) = R_0,$$

где R_0 – произвольная невырожденная $n \times n$-матрица. Эта задача Коши имеет решение, определенное на всем отрезке $[a, b]$, $R(t)$ невырожденна при всех t, и имеет место равенство

$$(R^*MR)' = (R')^*MR + R^*M'R + R^*MR' =$$
$$= -\frac{1}{2}R^*M'M^{-1}MR + R^*M'R - \frac{1}{2}R^*MM^{-1}M'R = 0,$$

что и требовалось.

Если взять $R_0 = I$, то $S = M(t_0)$. Если несложно привести матрицу $M(t_0)$ преобразованием $R_0^* M(t_0)R_0$ к виду, более простому для последующего использования ее при вычислениях, то естественно взять именно это R_0.

Отметим, что при рассмотренном здесь способе построения $R(t)$ выражение для $Q(t)$ в уравнении (6) упрощается, а именно становится вида $Q = R^*BR$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов А.А.* О вычислении собственных значений нелинейной спектральной задачи для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 1. С. 29–38.
2. *Абрамов А.А., Ульянова В.И., Юхно Л.Ф.* О некоторых свойствах нелинейной спектральной задачи для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 638–645.
3. *Абрамов А.А., Ульянова В.И., Юхно Л.Ф.* Об индексе краевой задачи для однородной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 3. С. 490–497.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 628–645

УДК 519.634

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ

© 2009 г. Ю. С. Колесов, А. Е. Харьков
(150000 Ярославль, ул. Советская, 14, Ярославский гос. ун-т)
e-mail: kharkov@e-logic.ru

Поступила в редакцию 16.05.2008 г.

Исследование динамики трехмерных нелинейных волн на торе показало, что их аттракторами являются так называемые режимы самоорганизации, которые рождаются из уплотнения траекторий и обладают рядом замечательных особенностей: они хорошо упорядочены по пространственным и временны́м переменным, причем весьма велика их энергия, которая плавно убывает при уменьшении коэффициента упругости, а они сами трансформируются в хаос типа диффузионного. Роль данной статьи двояка. Во-первых, выявлены особенности режимов самоорганизации в случае граничных условий Неймана. Во-вторых, подробно описаны этапы, приведшие к обнаружению данного феномена. Библ. 10. Фиг. 5.

Ключевые слова: кратность спектра оператора Лапласа, квазинормальная форма, метод Галеркина, режимы самоорганизации и их энергия.

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И РЯД СВЯЗАННЫХ С НЕЙ СВЕДЕНИЙ

Рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + u = \varepsilon a^2\Delta u + f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где ε – малый положительный параметр, параметр $a > 0$ не предполагается малым, Δ – оператор Лапласа, ν – направление внешней нормали в точках границы $\partial\Omega$ плоской области Ω, f – гладкая функция, имеющая в нуле высший порядок малости.

Выделим ограничение, относящееся к обыкновенному уравнению

$$\ddot{u} + u = f(u, \dot{u}), \quad \dot{u} = du/dt, \tag{2}$$

в которое трансформируется (1) при $\varepsilon = 0$. Именно, считаем, что первая ляпуновская величина d уравнения (2) имеет вид

$$d = -1 - i\omega^2, \quad \omega > 0. \tag{3}$$

Ниже поясним содержательный смысл этого допущения.

Наш предварительный анализ связан с использованием метода квазинормальных форм, который приводит к конкретному результату в тех случаях, когда относительно просто устроены собственные функции оператора Лапласа, а значит, достаточно проста геометрия рассматриваемой области. Вместе с тем геометрия области должна быть такой, чтобы можно было избежать анализа аттракторов, порождаемых симметрией области.

Данные соображения приводят к заключению, что уместен вариант

$$\Omega = \{x, y : x, y > 0, x + y < 1\}, \tag{4}$$

т.е. Ω – равнобедренный прямоугольный треугольник.

В области (4) рассмотрим спектральную задачу

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int\limits_{\Omega} u^2 dxdy = 1. \tag{5}$$

Ее решение можем считать известным (см. [2]).

Лемма 1. *Задача* (5) *разрешима только в том случае, если*

$$\lambda = \omega_{kn}^2 = \pi^2(k^2 + (n+k)^2), \quad k, n = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

причем при $k, n \geqslant 1$ *имеем*

$$u_{kn} = 2[\cos(k\pi x)\cos[(k+n)\pi y] + (-1)^n \cos[(k+n)\pi x]\cos(k\pi y)],$$

при $k \geqslant 1, n = 0$

$$u_{k0} = 2\sqrt{2}\cos(k\pi x)\cos(k\pi y),$$

при $k = 0, n \geqslant 1$

$$u_{0n} = \sqrt{2}[\cos(n\pi x) + (-1)^n \cos(n\pi y)], \tag{7}$$

наконец, при $k = n = 0$

$$u_{00} = \sqrt{2}.$$

Доказательство следует из того факта, что собственные функции в треугольнике – подходящие комбинации собственных функций задачи Неймана в квадрате.

Фазовым пространством (пространством начальных условий) краевой задачи (1) считаем произведение $\overset{\circ}{W}{}_2^2 \times W_2^1$ соболевских пространств, где нолик в первом из них означает подчиненность функций рассматриваемому нами граничному условию. Напомним, что использование этого понятия позволяет почти без изменений распространять на уравнения с частными производными многие положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, в вопросе об аттракторах краевой задачи (1) полезен подходящий вариант метода медленно меняющихся фаз и амплитуд. Изложим его суть. Положим

$$u_0 = \xi(\tau, x, y)\exp(it) + \text{к.с.}, \tag{8}$$

где $\tau = \varepsilon t$ – медленное время, комплексная функция ξ отражает медленное изменение фаз и амплитуд, к. с. – часто используемое сокращение для комплексно-сопряженной величины. Затем сумму

$$u = \varepsilon^{1/2}u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^{3/2}u_2, \tag{9}$$

где гармонические по t функции u_1, u_2 гладко зависят от τ, x, y, подставим в (1) и сначала приравняем коэффициенты при ε. В силу (8) и (9) приходим к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\ddot{u}_1 + u_1 = f_1(t, \tau, x, y), \tag{10}$$

где в формирование гармонической по t неоднородности входят нулевые и вторые гармоники, а τ, x, y считаются параметрами. С той же зависимостью от t уравнение (10) позволяет однозначно определить u_1. После приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ для определения u_2 выходит уравнение вида (10), но в котором неоднородность по t – сумма первых и третьих гармоник. Условия существования у такого уравнения гармонического по t решения – равенство нулю коэффициентов при первых гармониках. В итоге приходим к так называемой квазинормальной форме

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -i\frac{a^2}{2}\Delta\xi + \frac{1}{2}\xi + d\xi|\xi|^2, \quad \left.\frac{\partial \xi}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{11}$$

где d задается равенством (3) для исходной краевой задачи (1). Отметим, что уравнение для $\bar{\xi}$ получается из (11) путем использования операции комплексного сопряжения.

Вопрос о связи аттракторов квазинормальной формы (11) и исходной краевой задачи (1) к числу тривиальных не относится. Точнее, данному вопросу пока посвящены только работы [1] и [3], где рассмотрены уравнения с одной пространственной переменной.

Цикл $\xi_0(\tau, x, y)$ квазинормальной формы (11) называется автомодельным, если при некотором вещественном α_0 имеет место равенство

$$\xi_0(\tau, x, y) = \xi_0(x, y)\exp(i\alpha_0\tau). \tag{12}$$

Его систему в вариациях запишем в виде

$$\frac{\partial h_1}{\partial \tau} = -i\frac{a^2}{2}\Delta h_1 + d_1(x, y)h_1 + d_2(x, y)h_2, \tag{13}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial \tau} = i\frac{a^2}{2}\Delta h_2 + \bar{d}_2(x, y)h_1 + \bar{d}_1(x, y)h_2,$$

$$d_1 = \frac{1}{2} - i\alpha_0 + 2d|\xi_0|^2, \quad d_2 = d\xi_0^2, \quad \xi_0 = \xi_0(x, y). \tag{14}$$

Отметим, что система (13), (14) составлена с учетом нормирующих замен $h_1 \longrightarrow h_1\exp(i\alpha_0\tau)$, $h_2 \longrightarrow h_2\exp(-i\alpha_0\tau)$. Обозначим через A линейный оператор, порождаемый правыми частями уравнений (13), (14). Система (13), (14) имеет решение $i\xi_0(x, y)$, $-i\bar{\xi}_0(x, y)$, а значит, спектру оператора A принадлежит нулевое собственное значение. Предположим, что оно простое и что остальные его собственные значения находятся в полуплоскости

$$\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\gamma < 0, \tag{15}$$

где постоянная γ от выбора λ не зависит.

Итак, пусть на входе имеем орбитально экспоненциально устойчивый автомодельный цикл (12) квазинормальной формы (11). При этом условии представляется естественным предположение о существовании такого $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ краевая задача (1) имеет цикл $u(t, x, y, \varepsilon)$, асимптотику которого с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ на произвольном временно́м промежутке порядка ε^{-1} доставляют первые два слагаемых из правой части формулы (9) и который наследует устойчивость цикла (12). Однако, что отмечено в [1], столь общая формулировка неверна. В связи с этим сузим проблему.

Непосредственно проверяется, что квазинормальная форма (11) имеет пространственно однородный автомодельный цикл

$$\xi_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-i\frac{\omega^2}{2}\tau\right). \tag{16}$$

Из (16) вытекает, что функции d_1, d_2 из (13), (14) постоянны:

$$d_1 = d_2 = \frac{1}{2}d. \tag{17}$$

Поэтому в данном случае при исследовании спектра оператора A удобно прибегнуть к методу Фурье, что сводит проблему к рассмотрению спектральных свойств счетного числа матриц

$$A_{kn} = \begin{pmatrix} i\frac{a^2}{2}\omega_{kn}^2 + \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}\bar{d} & -i\frac{a^2}{2}\omega_{kn}^2 + \frac{1}{2}\bar{d} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Очевидно, что

$$\operatorname{sp}A_{kn} = -1, \quad \det A_{kn} = \frac{1}{4}a^2\omega_{kn}^2(a^2\omega_{kn}^2 - 2\omega^2). \tag{19}$$

Из (6) и (18), (19) вытекает, что условие (15) эквивалентно неравенству

$$a^2 > 2\frac{\omega^2}{\pi^2}. \tag{20}$$

Таким образом, при условии (20) однородный цикл, возникающий в результате бифуркации Андронова–Хопфа, сохраняет устойчивость и в рамках распределенной модели (1). Стала понятна и формула (3): при $\operatorname{Im} d \geqslant 0$ однородный цикл сохраняет устойчивость при любом уменьшении a^2.

В следующем разделе будем считать, что справедливо равенство

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu, \quad 0 < \mu \ll 1, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{2}a^2\pi^2, \tag{21}$$

при котором в силу (18) и (19) цикл Андронова–Хопфа неустойчив только по направлению моды (7) при $n = 1$, т.е. моды u_{01}. При ограничении (21) возникает бифуркационная задача о десинхронизации пространственно однородного цикла краевой задачи (1).

Чтобы в дальнейшем не обременяться деталями, сразу приведем формулу для надкритичности. Из (19) и (21) следует, что критическое характеристическое число λ_{01} определяется из квадратного уравнения

$$\lambda^2 + \lambda - \omega_0^2\mu = 0. \tag{22}$$

Из (22) получаем требуемую формулу

$$\lambda_{01} = \omega_0^2\mu + O(\mu^2). \tag{23}$$

Сформулированная выше бифуркационная задача лишь в малой степени служит основой для проведения численных экспериментов – желательно иметь возможно большую информацию об ожидаемой динамике. Поэтому полезен предварительный анализ эталонных задач. В [4] предложено считать одной из таковых краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + u^2\frac{\partial u}{\partial t} + \delta^2 u = \Delta u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{24}$$

где параметр $\delta > 0$ малым не предполагается, Ω – прямоугольник $0 < x < l$, $0 < y < 1/l$, а аналогичная (5) спектральная задача разрешима при

$$\lambda = \omega_{kn}^2 = \delta^2 + \pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + n^2l^2\right), \tag{25}$$

$$u_{kn} = 2\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\sin(n\pi ly), \quad k, n = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

Данные факты необходимы для построения квазинормальной формы краевой задачи (24). Однако ее структура существенно зависит от кратных частот (резонансов первого порядка) и нетождественных резонансов третьего порядка. Начнем с последних.

Структура нелинейности в (24) подсказывает, что нас должны интересовать только такие нетождественные резонансы третьего порядка

$$\omega_{kn} = \omega_{k_1n_1} \pm \omega_{k_2n_2} \pm \omega_{k_3n_3}, \tag{27}$$

когда не равна нулю величина

$$\int_\Omega u_{kn}u_{k_1n_1}u_{k_2n_2}u_{k_3n_3}dxdy. \tag{28}$$

В силу (26) это означает, что каждое равенство в (27) дополняется каким-то набором равенств вида

$$k = k_1 \pm k_2 \pm k_3, \quad n = n_1 \pm n_2 \pm n_3. \tag{29}$$

Напомним, что резонанс третьего порядка называется тождественным, если $\omega_{kn} = \omega_{kn} + \omega_{ps} - \omega_{ps}$.

В R^3 введем в рассмотрение четыре векторных набора:

$$a = \left(\delta, \pm\frac{\pi k}{l}, \pm\pi nl\right), \quad a_j = \left(\delta, \pm\frac{\pi k_j}{l}, \pm\pi n_jl\right), \quad j = 1, 2, 3. \tag{30}$$

Так как у них одинаковая первая координата, то набор из двух равенств (29) эквивалентен некоторому векторному равенству

$$a = a_1 + a_2 - a_3, \tag{31}$$

где данный выбор знаков роли не играет.

Ниже обозначение $|*|$ используется для евклидовой длины вектора.

Меняя подходящим образом нумерацию векторов (30), без потери общности можно считать, что каждый резонанс третьего порядка – это равенство

$$|a| = |a_1| + |a_2| - |a_3| \tag{32}$$

или

$$|a| = |a_1| + |a_2| + |a_3|. \tag{33}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено равенство* (31). *Тогда равенство* (33) *невозможно, а равенство* (32) *возможно только в тех случаях, когда*

$$|a| = |a_1|, \quad |a_2| = |a_3| \tag{34}$$

или

$$|a| = |a_2|, \quad |a_1| = |a_3|. \tag{35}$$

Доказательство. Начнем с перебора вырожденных вариантов.

Если все четыре вектора лежат на одной прямой, то тогда $a_1 = a_2 = a_3 = a$, так как у них совпадают первые компоненты. Тем самым является тривиальным доказываемое утверждение.

Следующий по сложности вариант: векторы a_1 и a_2 лежат на одной прямой, а векторы a и a_3 – на другой. В этом случае совпадают векторы a_1, a_2 и векторы a, a_3, а значит, равенство (33) невозможно, а равенство (32) эквивалентно равенствам (34), (35).

Почти столь же простой вариант: векторы a_1 и a_2 лежат на одной прямой, а векторы a и a_3 располагаются в $\mathbb{R}^3$ общим образом. В этом случае ни одно из равенств (32) или (33) не имеет места. Для доказательства рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ плоский треугольник, образованный вектором $a_1 + a_2$, вектором a_3 и вектором a, начало которого путем параллельного переноса поместим в конце вектора a_3. Так как в треугольнике сумма двух сторон больше третьей, то

$$|a_1 + a_2| = |a_1| + |a_2| < |a| + |a_3|, \quad |a_1| + |a_2| + |a_3| > |a|. \tag{36}$$

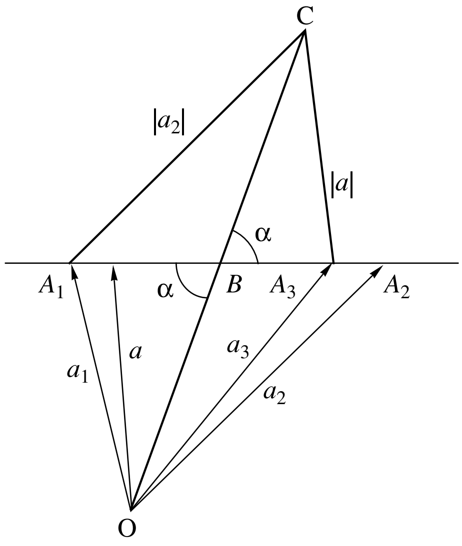
Неравенства (36) не согласуются как с (32) и (33), так и с (34) и (35).

Первые четыре из пяти очередных вырожденных вариантов – на одной прямой находятся, соответственно, векторы a_1 и a_3, a_1 и a, a_2 и a_3, a_2 и a, a_3 и a – много проще. Действительно, из (31) следует, что в первых четырех вариантах невозможно равенство (33), а равенство (32) эквивалентно одному из равенств (34) или (35). Пятый вариант исследуется аналогично уже рассмотренному случаю, когда на одной прямой находятся векторы a_1 и a_2.

Перейдем к ключевому вырожденному варианту: все четыре вектора a, a_1, a_2, a_3 принадлежат одной плоскости Π_1, но никакая пара не находится на одной прямой.

Пусть точка A_1 – конец вектора a_1, точка A_2 – конец вектора a_2 (см. фиг. 1). Рассмотрим отрезок l_1, соединяющий эти две точки. Ясно, что он делит пополам вектор $a_1 + a_2$. Точку пересечения обозначим буквой B. Пусть точка A_3 – конец вектора a_3. В силу (31), эта точка принадлежит прямой, на которой находиться отрезок l_1. Для определенности предположим (см. фиг. 1), что она принадлежит именно отрезку l_1, располагаясь между B и A_2.

Рассмотрим выпуклый четырехугольник OA_1CA_3, где точка C – конец вектора $a_1 + a_2$, O – начало координат. По построению сумма его сторон, примыкающих к точке A_1, равна $|a_1| + |a_2|$, а сумма сторон, примыкающих к точке A_3, равна $|a_3| + |a|$. При условии (32) эти две величины равны. Поэтому точки A_1 и A_3 принадлежат эллипсу, фокусы которого – точка O и C, а центр – точка B. Отсюда следует, что точка B делит пополам отрезок, соединяющий точки A_1 и A_3, а значит, введенный четырехугольник является параллелограммом. Следствие данного факта – равенство $|a| = |a_1|$, т.е. выполнены равенства (34).



Фиг. 1.

Обратное почти очевидно. По построению в треугольниках A_3BC и A_1BO равны стороны BC и BO, а также углы α, примыкающие к точке B (см. фиг. 1). Поэтому если $|a| = |a_1|$, то точка B делит пополам отрезок A_1A_3. Снова приходим к заключению, что построенный четырехугольник является параллелограммом. Поэтому $|a_2| = |a_3|$, а значит, справедливо равенство (32).

Ясна и причина невозможности равенства (33): сумма длин трех сторон выпуклого четырехугольника превосходит четвертую.

Перейдем, наконец, к общему случаю: векторы a, a_1, a_2, a_3 не принадлежат одной плоскости и никакая их пара не находится на одной прямой.

Натянутую на векторы a_1, a_2 плоскость обозначим через Π_1, а натянутую на a, a_3 обозначим через Π_2. В плоскости Π_1 построим параллелограмм A_1CA_2O (см. фиг. 1). Аналогичный параллелограмм построим и в плоскости Π_2, естественно, с использованием векторов a, a_3. Из равенства

$$a + a_3 = a_1 + a_2,$$

т.е. по другому записанному равенству (31), вытекает, что аналогичный l_1 отрезок l_2 делится пополам точкой B.

Ниже $\Pi(\delta)$ – плоскость в R^3, у точек которой первая координата равна δ.

Плоскость Π_2 повернем вдоль оси OC так, чтобы при ее совмещении с плоскостью Π_1 половина в ней построенного параллелограмма заняло место треугольника OA_3C, показанного на фиг. 1. При этом без потери общности допустимо считать, что имеет место ранее выбранное расположение точек A_2 и A_3.

При реализации указанного действия отрезок l_2 не покидает плоскости $\Pi(\delta)$. Поэтому в итоге отрезки l_1 и l_2 будут располагаться на одной прямой. Тем самым пришли к конструкции, сыгравшей основную роль при анализе последнего вырожденного случая. Доказательство закончено.

Перейдем к рассмотрению резонансов первого порядка, когда при разных наборах пар целых чисел (k, n) и (p, s) выполняется равенство

$$\omega_{kn} = \omega_{ps}. \tag{37}$$

Их допустимое существование не позволяет вывести из содержащегося в лемме 2 утверждения заключение о невозможности нетождественных резонансов третьего порядка. Действительно, из (37) вытекают равенства

$$\omega_{kn} = 2\omega_{ps} - \omega_{kn}, \quad k = p - p + k, \quad n = s - s + n, \tag{38}$$

а так как различны функции u_{kn} и u_{ps}, то имеем пример нетождественного резонанса третьего порядка (в доказательстве леммы 2 – это пятый вариант). Именно поэтому приходиться налагать на параметр l дополнительное условие: он не должен быть решением уравнения с целочисленными коэффициентами вида

$$m_0 z^4 = m_1, \quad m_0, m_1 \geqslant 3. \tag{39}$$

Для простоты, считая $l = 1$, остановимся на вопросе о кратности точек спектра оператора Лапласа. Положим $\omega^2 = k^2 + n^2$ и в плоскости Oxy рассмотрим четверть окружности радиуса ω с центром в начале координат, принадлежащую первому октанту. Количество расположенных на ней точек (p, s) с целыми координатами совпадает с кратностью собственного значения $\omega^2\pi^2$. Ясно, что не при каждом допустимом ω таковые существуют. Поэтому уместно привести соответствующие примеры: $\omega^2 = 50$ порождает числовые наборы

$$(7, 1), \quad (1, 7), \quad (5, 5),$$

а при $\omega^2 = 425$ появляется уже большее число наборов:

$$(20, 5), \quad (5, 20), \quad (19, 8), \quad (8, 19), \quad (16, 13), \quad (13, 16).$$

Однако распределены они неравномерно. Тем не менее правдоподобна

Гипотеза. *Обозначим через $S(\omega)$ сумму всех кратностей собственных значений, величины которых не превосходят $\omega^2\pi^2$. Тогда справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{\omega^2} S(\omega) = \frac{\pi}{4}.$$

Численный эксперимент показал, что при $\omega = 100$ данная формула справедлива с точностью до четырех знаков после запятой. Считаем, что ее аккуратное математическое обоснование принадлежит далекому будущему.

При рассмотрении краевой задачи (24) ниже предполагаем, что выполнено ограничение на параметр l, связанное с равенствами (39). Отсюда и из леммы 2 следует, что таким образом обходятся трудности, вызванные нетождественными резонансами третьего порядка.

Вернемся к [4], где, в соответствии с идеологией метода квазинормальных форм, решения краевой задачи (24) представлены в форме, структурно подобной (9), но в которой $u_1 = 0$, а

$$u_0 = \sum_{k,n} [z_{kn}(\tau)\exp(i\omega_{kn}t) + \text{к.с.}]u_{kn}(x, y). \tag{40}$$

Подставим (9) в (24) и приравняем коэффициенты при степенях $\varepsilon^{3/2}$. Для определения $u_2(t, \tau, x, y)$ имеем линейную краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \delta^2 u_2 = \Delta u_2 + f_2(t, \tau, x, y), \quad u_2|_{\partial\Omega} = 0, \tag{41}$$

где, в силу (40), неоднородность гармонична по t. Условия разрешимости задачи (41) в классе гармонических по t функций, приводит во времени τ к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных переменных z_{kn} и $\bar{z}_{kn}$:

$$2\frac{dz_{kn}}{d\tau} = z_{kn}\left(1 - \frac{9}{4}|z_{kn}|^2 - 2\sum_{p \ne k, s \ne n}|z_{ps}|^2 - 3\sum_{p \ne k}|z_{pn}|^2 - 3\sum_{s \ne n}|z_{ks}|^2\right). \tag{42}$$

Используя (42), переходим к амплитудным уравнениям

$$\frac{d\rho_{kn}}{d\tau} = \rho_{kn}\left(1 - \frac{9}{4}\rho_{kn} - 2\sum_{p \ne k, s \ne n}\rho_{ps} - 3\sum_{p \ne k}\rho_{pn} - 3\sum_{s \ne n}\rho_{ks}\right), \tag{43}$$

где $\rho_{kn} = |z_{kn}|^2$. Однако работать с бесконечным числом уравнений затруднительно. Поэтому прибегнем к следующему приему.

В системе (43) считаем, что все $\rho_{kn} = 0$ при $k, n > N$, где N – заранее выбранное число, $N \geqslant 2$. Получающуюся конечномерную систему запишем в виде

$$\dot{R} = R\left(E_0 - \frac{1}{4}R - 2E_0(R, E_0) - BR - RB\right), \tag{44}$$

где R – матрица с элементами ρ_{kn}, у матрицы E_0 все элементы равны единице, $B = E_0 - I$, скалярное произведение матриц означает, что перемножаются элементы с одинаковыми индексами с последующим суммированием по ним, умножение R на стоящую в скобках матрицу производится поэлементно.

В [4] показано, что дихотомично внутреннее состояние равновесия

$$R_0 = E_0/(2N^2) + 2N - 7/4$$

уравнения (44). Здесь остановимся на более нетривиальном вопросе о количестве и свойствах его устойчивых состояний равновесия.

Пусть T – совокупность таких матриц R, у которых положительны только элементы

$$\rho_{1k}, \ldots, \rho_{Nk_N}, \tag{45}$$

где $k_1, \ldots, k_N$ – произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, N$. Если в (45)

$$\rho_{1k_1} = \ldots = \rho_{Nk_N} = \rho_0 = 1/2N + 1/4, \tag{46}$$

то получаем набор состояний равновесия уравнения (44). Их совокупность обозначим через T_N. По построению оно состоит из $N!$ различных элементов.

Теорема 1. *У уравнения* (44) *экспоненциально устойчиво каждое состояние равновесия, входящее в* T_N.

Доказательство. Условимся говорить, что линеаризация уравнения (44) приводиться по собственным направлениям, если вариации связаны с фигурирующими в (45) индексами. В противном случае будем говорить, что линеаризация проводится по дополнительным направлениям.

В (44) фигурирует матрица $BR + RB = E_0R + RE_0 - 2R$. Из структуры правой части этой формулы следует, что она устроена следующим образом. Фиксируем произвольно некоторый элемент ρ_{kn} матрицы R. Тогда элементы матрицы $BR + RB$ с индексами k, n строятся по формуле

$$\sum_{s \neq k} \rho_{sn} + \sum_{p \neq n} \rho_{kp}.$$

Данное пояснение полезно при рассмотрении вариации H_1 по дополнительным направлениям. Действительно, в силу уравнения (44) и равенств (46) из сказанного вытекает, что $\dot{H}_1 = -[(2N + 1)\rho_0 - 1]H_1$, а значит, возмущения по рассматриваемым направлениям экспоненциально затухают.

Вариация H_2 по собственным направлениям связана с уравнением

$$\dot{H}_2 = -\rho_0\left(\frac{1}{4}H_2 + 2E_0(H_2, E_0) + BH + HB\right),$$

где H – вариация сразу по всем направлениям. Однако H_1 можно из нее исключить, что приведет к более простой системе

$$\dot{h}_p = -\rho_0\left(\frac{1}{4}h_p + 2\sum_{k=1}^{N} h_k\right), \quad p = 1, 2, \ldots, N,$$

где h_p – компоненты вариации H_2, их экспоненциальное затухание очевидно. Доказательство закончено.

Коснемся вопроса об устойчивости элементов из T_N при переходе в (44) от N к $N + 1$, т.е. при увеличении аппроксимирующих уравнений. В этом случае вариация h по дополнительному направлению $\rho_{N+1, N+1}$ приводит к уравнению

$$\dot{h} = (1 - 2N\rho_0)h,$$

т.е. в силу (46) по этому направлению происходит экспоненциальное нарастание возмущений.

Предположим, что краевая задача (24) заменена галеркинской аппроксимацией с использованием тех мод, номера которых использованы при составлении уравнения (44). Тогда оно доставляет главную часть амплитудных переменных обычной нормальной формы. Отсюда следует, что аттрактор данной галеркинской аппроксимации краевой задачи (24) состоит из орбитально экспоненциально устойчивых N-мерных торов в количестве N!

В [5] отмечены свойства аналогичной галеркинской аппроксимации краевой задачи (24), но рассматриваемой на единичном отрезке. В этом случае динамика связана с циклами, которые при увеличении N слабо меняются с сохранением свойств устойчивости. Тем самым различие между линейным и плоским вариантом носит принципиальный характер. Действительно, в плоском случае с увеличением N растет размерность орбитально экспоненциально устойчивых торов, а значит, не происходит установления динамики. Численные эксперименты согласуются с теоретическими представлениями: при росте t значения решения $u(t, x, y)$ по пространственным переменным сосредоточены на некоторых сложно устроенных линиях, которые с течением времени сильно меняются, причем значительна обычным образом определенная их энергия. Последнее обстоятельство считаем важным.

Подчеркнем еще одно обстоятельство. Широко распространено мнение, что достаточное число галеркинских уравнений правильно отражает динамику. Из сказанного выше следует, что это верно не всегда.

Итак, краевая задача (24) имеет большое число однотипных аттракторов с чрезвычайно высокой энергией. Именно эти факты позволили обнаружить режимы самоорганизации в более просто устроенных краевых задачах.

В заключение коснемся одного факта общего характера.

Лемма 3. *Функции, входящие в каждый аттрактор квазинормальной формы* (11)*, подчиняются неравенству*

$$\int_{\Omega} |\xi|^2 dx dy \leqslant \frac{1}{4}. \tag{47}$$

Для доказательства умножим на $\bar{\xi}$ уравнение (11), а комплексно сопряженное к нему – на ξ. Результат сложим и проинтегрируем по области Ω. Приходим к базовому равенству

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \vartheta - 2\int_{\Omega} |\xi|^4 dx dy, \tag{48}$$

где ϑ – левая часть в неравенстве (47).

Очевидно, что

$$\vartheta \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}\int_{\Omega} |\xi|^4 dx dy}. \tag{49}$$

Из (49) вытекает, что дифференциальное равенство (48) влечет неравенство

$$d\vartheta/d\tau \leqslant \vartheta - 4\vartheta^2. \tag{50}$$

Неравенство (50) справедливо при любом выборе решения квазинормальной формы. Отсюда и следует неравенство (47).

Данное утверждение делает понятным результаты численного интегрирования квазинормальной формы (11): при небольших a^2 в аттрактор входят такие функции, что $|\xi| \sim 1/\sqrt{2}$, а $\arg\xi$ резко меняется неупорядоченным образом.

Наивный взгляд на возникновение и эволюцию автоволновых процессов часто таков: при подходящем уменьшении коэффициента упругости однородный цикл теряет устойчивость – возникает периодическая по времени автоволна. При дальнейшем уменьшении коэффициента упругости происходит ее усложнение с последующей трансформацией в хаос типа диффузионного.

На самом деле ситуация много сложнее: уменьшение коэффициента упругости приводит к рождению из уплотнения траекторий режимов самоорганизации, обладающих, как уже отмечалось, высокой пространственной и временной упорядоченностью, причем с весьма большой обычным способом определяемой энергией волны. Более того, ответвляющаяся от однородного цикла автоволна жестко теряет устойчивость – происходит срыв автоколебаний на наиболее просто устроенный режим самоорганизации.

2. ДЕСИНХРОНИЗАЦИЯ ОДНОРОДНОГО ЦИКЛА

Связанная с данным феноменом соответствующая бифуркационная проблема впервые была поставлена и решена в [6] для уравнения Хатчинсона с малым коэффициентом миграции, что послужило основой для создания и разработки метода квазинормальных форм. Однако ниже используем более простой подход, развитый в [7]. Итоговые результаты удобнее сформулировать позднее.

С точки зрения качественной теории эволюционных уравнений, при ограничении (21) находимся в окрестности цикла Андронова–Хопфа, который дивергентно неустойчив по направлению только одной моды. Поэтому число критических переменных равно двум: одна связана с движением вдоль цикла, другая характеризует положение точки во вращающемся одномерном инвариантном многообразии. На последнем динамика описывается подходящим одномерным дифференциальным уравнением.

В рассматриваемом нами случае область Ω все же достаточно симметрична. Поэтому можно ожидать, что при $\omega^2 = \omega_0^2$ динамика в окрестности однородного цикла связана с уравнениями

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \beta\rho^2, \quad \frac{d\rho}{d\tau} = b\rho^3, \tag{51}$$

где β, b – вещественные постоянные. Здесь первое уравнение, отражающее вращение траекторий вокруг негрубого цикла Андронова–Хопфа, выписано с точностью до ρ^4, второе уравнение, отражающее закон движения вдоль одномерного направления, составлено с точностью до ρ^5.

Сделаем два пояснения. Случаем $\mu = 0$ можно ограничиться потому, что надкритичность уже найдена – ее асимптотика задана формулой (23). Ожидаемый порядок малости правой части второго уравнения (51) связан со свойством симметрии рассматриваемой области – в общем случае в уравнениях (51) одинаковые порядки малости.

При $\omega^2 = \omega_0^2$ в квазинормальной форме (11) выполним замену

$$\xi = (1+\eta)\xi_0(\tau)\exp(i\psi). \tag{52}$$

Простая выкладка убеждает, что получается уравнение

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = L_0\eta - i(1+\eta)\frac{d\psi}{d\tau} + \frac{d_0}{2}(\eta^2 + 2|\eta|^2 + \eta|\eta|^2), \tag{53}$$

где d_0 задается формулой (3) с учетом равенства $\omega^2 = \omega_0^2$, а

$$L_0\eta = -i\frac{\omega_0^2}{\pi^2}\Delta\eta + \frac{1}{2}d_0(\eta + \bar{\eta}). \tag{54}$$

На границе $\partial\Omega$ области Ω ставятся прежние условия непроницаемости.

Непосредственно проверяется, что

$$L_0\eta_1 = 0, \quad \eta_1 = id_0u_{01}. \tag{55}$$

Из (54) следует, что решением данного уравнения является также произвольная мнимая постоянная.

Фигурирующие в (51) постоянные определим, прибегая к формуле

$$\eta = \rho\eta_1 + \rho^2\eta_2 + \rho^3\eta_3 \tag{56}$$

и требуя, чтобы с точностью до ρ^4 она доставляла решение уравнения (53). Первый шаг на этом пути, связанный с приравниванием коэффициентов при ρ^2, с учетом первого уравнения (51) приводит к уравнению

$$L_0\eta_2 = i\beta - \frac{1}{2}d_0(\eta_1^2 + 2|\eta_1|^2) \tag{57}$$

для определения постоянной β и функции η_2 переменных x, y, подчиненной условию непроницаемости на границе области.

Из (7) и (55) следует, что уравнение (57) можно записать в виде

$$L_0\eta_2 = i\beta - d_0^2(2\bar{d}_0 - d_0)\left[1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi x) + \frac{1}{2}\cos(2\pi y) - 2\cos(\pi x)\cos(\pi y)\right]. \tag{58}$$

С ним и будем работать. Очевидно, его решение представимо в виде

$$\eta_2 = A_0 + A_1(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)) + A_2\cos(\pi x)\cos(\pi y), \tag{59}$$

где вещественна только постоянная A_0.

Лемма 4. *Справедливы формулы*

$$\beta = 2\omega_0^2(1 + \omega_0^4), \quad A_0 = -1 - 5\omega_0^4, \tag{60}$$

$$A_1 = \frac{3\omega_0^4 - 1}{6} - i\frac{9\omega_0^4 + 1}{12\omega_0^2}, \quad A_2 = 2(1 - 3\omega_0^4) + 8\omega_0^2 i. \tag{61}$$

Доказательство. Из (58) следует, что вычисление постоянных β, A_0 связано с уравнением

$$L_0A_0 = i\beta - d_0^2(2\bar{d}_0 - d_0). \tag{62}$$

Из (54) и (62) получаем, что справедливы равенства (60), так как

$$-A_0 - i\omega_0^2A_0 = 1 + 5\omega_0^4 - i\omega_0^2 + 3i\omega_0^6 + i\beta.$$

Пусть $A_1 = c_1 + ic_2$. Из (54) и (58) выводим комплексное равенство

$$4i\omega_0^2c_1 - 4\omega_0^2c_2 + d_0c_1 = \frac{1}{2}[1 + 5\omega_0^4 + i\omega_0^2(3\omega_0^4 - 1)],$$

из которого следуют два вещественных:

$$3c_1 = \frac{1}{2}(3\omega_0^4 - 1), \quad 4\omega_0^2c_2 = -c_1 - \frac{1}{2}(5\omega_0^4 + 1),$$

приводящих к первой формуле (61).

Вторую комплексную постоянную A_2 также представим в виде $c_1 + ic_2$, где c_1, c_2 вещественны. Аналогичные изложенным выше действия сначала приводят к комплексному равенству

$$c_1 + 2\omega_0^2c_2 - i\omega_0^2c_1 = 2[1 + 5\omega_0^4 + i\omega_0^2(3\omega_0^4 - 1)],$$

а затем и к двум вещественным

$$c_1 = 2(1 - 3\omega_0^4), \quad c_1 + 2\omega_0^2c_2 = 2(1 + 5\omega_0^4),$$

позволяющим сделать вывод о справедливости второй формулы (61). Доказательство закончено.

Перейдем ко второму шагу – подставим (56) в (53) и с учетом (51) выделим и приравняем коэффициенты при ρ^3. Получаем уравнение

$$L_0\eta_3 = (b + i\beta)\eta_1 - d_0\left(\eta_1\eta_2 + 2\mathrm{Re}(\bar{\eta}_1\eta_2) + \frac{1}{2}\eta_1^2\bar{\eta}_1\right), \tag{63}$$

условие разрешимости которого позволяет определить постоянную b.

Из правой части уравнения (63) выделим функцию

$$\gamma\eta_0, \quad \eta_0 = \cos(\pi x) - \cos(\pi y), \tag{64}$$

где γ – подлежащая построению комплексная постоянная. Попутно станет ясно, что с остающейся неоднородностью получаем регулярное уравнение.

Выпишем полезные для нас формулы:

$$\eta_0(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)) = \frac{1}{2}\eta_0 + \frac{1}{2}u_{11} + \frac{1}{2\sqrt{2}}u_{03}, \tag{65}$$

$$\eta_0\cos(\pi x)\cos(\pi y) = -\frac{1}{2}\eta_0 - \frac{1}{4}u_{11}. \tag{66}$$

Из второй формулы (55), из (59) и (65), (66) последовательно выводим

$$\eta_1\eta_2 = i\sqrt{2}d_0B_0\eta_0, \quad B_0 = A_0 + \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2}, \tag{67}$$

$$2\mathrm{Re}(\bar{\eta}_1\eta_2) = 2\sqrt{2}\mathrm{Im}(\bar{d}_0B_0)\eta_0, \tag{68}$$

$$\frac{1}{2}\eta_1^2\bar{\eta}_1 = i\sqrt{2}d_0|d_0|^2\left(\frac{9}{4}\eta_0 + \frac{1}{4\sqrt{2}}u_{03} + \frac{3}{4}u_{11}\right). \tag{69}$$

Структура формул (67)–(69) позволяет сделать вывод, что разрешимость уравнения (63) эквивалентна разрешимости много более просто устроенного уравнения

$$L_0\eta = \gamma\eta_0, \tag{70}$$

$$\gamma = id_0b - d_0\beta - id_0^2B_0 - 2d_0\mathrm{Im}(\bar{d}_0B_0) - i\frac{9}{4}d_0^2|d_0|^2. \tag{71}$$

Лемма 5. *Уравнение* (70) *разрешимо только в том случае, если*

$$\mathrm{Im}\gamma = 0. \tag{72}$$

Доказательство. Особенность рассматриваемого случая такова, что вести можно только речь о решениях уравнения (70) вида

$$\eta = (c_1 + ic_2)\eta_0. \tag{73}$$

Подставляя (73) в (70), в силу (54) получаем алгебраическое равенство

$$c_1 + \omega_0^2c_2 = -\gamma. \tag{74}$$

Из (74) следует, что равенство (72) является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (70). Доказательство закончено.

Из (71) и (72) вытекает, что

$$b = \omega_0^2\beta - \mathrm{Re}(d_0^2B_0) + 2\omega_0^2\mathrm{Im}(\bar{d}_0B_0) - \frac{9}{4}(1 - \omega_0^8). \tag{75}$$

Для доведения формулы (75) до окончательного вида, воспользуемся леммой 4 и вторым равенством (67), из которых следует, что

$$B_0 = -\frac{25 + 21\omega_0^4}{12} - i\frac{1 + 105\omega_0^4}{24\omega_0^2}. \tag{76}$$

Учитывая (76) и первое равенство (60) в (75), приходим к формуле

$$b = -\left(\omega_0^8 + \frac{5}{2}\omega_0^4 + \frac{1}{6}\right). \tag{77}$$

Из (23) и второго уравнения (51) выводим, что при ограничении (21) в окрестности цикла Андронова–Хопфа на вращающемся инвариантном одномерном направлении динамика описывается уравнением

$$\dot{\rho} = \mu\omega_0^2\rho + b\rho^3, \quad b < 0. \tag{78}$$

Тем самым можно ожидать, что теряющий устойчивость однородный цикл квазинормальной формы (11) передает ее двум пространственно неоднородным циклам. Однако предварительно следует показать, что упомянутые циклы квазинормальной формы (11) являются автомодельными.

В квазинормальной форме (11) выполним аналогичную (52) замену, но считая, что ψ заменено на $\beta\tau$, где постоянная β вещественна. В итоге приходим к внешне подобному (63) уравнению, но теперь будем интересоваться его состояниями равновесия.

Введем в рассмотрение уравнение

$$L\eta = i(1+\eta)\beta + dF(\eta), \tag{79}$$

где d составлено с учетом первого равенства (21) и именно оно теперь фигурирует в (54), а соответствующий оператор обозначен буквой L; наконец,

$$F(\eta) = -\frac{1}{2}(\eta^2 + 2|\eta|^2 + \eta|\eta|^2).$$

Пусть $M(*)$ – среднее значение в области Ω некоторой функции переменных x, y. Поставим вопрос о существовании постоянных решений у уравнения

$$L\eta = M[i(1+\eta)\beta + dF(\eta)], \tag{80}$$

который нами уже затрагивался при доказательстве леммы 4. Удобно ввести обозначения

$$c_1 + ic_2 = M(\eta), \quad \gamma_1 + i\gamma_2 = M(dF(\eta)). \tag{81}$$

Символика (81) позволяет заменить (80) алгебраическим уравнением

$$-(1+i\omega^2)c_1 = \gamma_1 - \beta c_2 + i(c_1\beta + \beta + \gamma_2),$$

из которого следует, что справедливы формулы

$$\operatorname{Im} M(\eta) = -\frac{(1+\operatorname{Re} M(\eta))(\operatorname{Re}(dF(\eta)) + \operatorname{Re} M(\eta))}{\omega^2\operatorname{Re} M(\eta) + \operatorname{Im}(dF(\eta))}, \tag{82}$$

$$\beta = -\frac{\omega^2\operatorname{Re} M(\eta) + \operatorname{Im} M(dF(\eta))}{1+\operatorname{Re} M(\eta)}. \tag{83}$$

Формулу (83) учтем в (79). Вместе с (82) получаем систему уравнений, к которым применима классическая теория ветвления (см. [8]) в ее одном из простейших вариантов. Последнее означает, что итогом проделанных кропотливых построений является

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (21). *Тогда найдется такое* $\mu_0 > 0$, *что при* $0 < \mu < \mu_0$ *уравнение* (79) *имеет два ненулевых решения, главная асимптотика которых доставляется формулой*

$$\eta_\pm = \pm\sqrt{-\frac{\mu\omega_0^2}{b}}\eta_1 - \frac{\mu\omega_0^2}{b}\eta_2 + O(\mu^{3/2}), \tag{84}$$

где функции η_1, η_2 *и отрицательная постоянная* b *найдены ранее.*

Итак, квазинормальная форма (11) имеет автомодельные циклы

$$(1+\eta_\pm)\xi_0(\tau)\exp[i\beta_\pm(\mu)\tau], \tag{85}$$

где $\beta_\pm(\mu)$ – результат подстановки (84) в (83). Каждый из них орбитально экспоненциально устойчив. На деталях доказательства останавливаться не будем, они стандартны рассмотрению подобных вопросов (например, см. [9]).

Теорема 3. *Найдутся такие положительные постоянные* $\mu_1 < \mu_2$ *и такое положительное* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu_1, \mu_2)$, *что при* $\mu_1 < \mu < \mu_2$ *и* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *краевая задача* (1) *имеет два орбитально экспонен-*

циально устойчивых цикла $u_{\pm}(t, x, y, \mu, \varepsilon)$*, связанных с автомодельными циклами* (85) *квазинормальной формы* (11).

Доказательство основано на комплексе достаточно хорошо известных фактов. Поэтому сформулируем их на идейном уровне.

Согласно теореме 2, квазинормальная форма (11) имеет два автомодельных цикла, амплитуды которых зависят от пространственных переменных. Отсюда и из равенства (9) следует, что исходная краевая задача (1) имеет приближенные циклы, в формулах для которых

$$u = \varepsilon^{1/2}u_1 + \varepsilon u_2,$$

$\xi(\tau, x, y)$ задается равенством (85). Понятие приближенного цикла существенно. Действительно, допустим, что с должной полнотой удается разобраться со свойствами устойчивости линеаризованной на приближенном цикле краевой задачей. Тогда стандартным способом (см. [9]) проблема существования и устойчивости цикла сводится к разрешимости некоторого интегрального уравнения, к которому применим принцип сжимающих отображений.

Тем самым важный элемент доказательства – построение теории устойчивости сингулярно возмущенных линейных волновых уравнений. В общем случае подобная теория не построена. Однако особенности нашего случая позволяют воспользоваться наиболее существенной частью построений из [1], выполненных при доказательстве аналогичного утверждения. Остановимся подробнее на данном вопросе.

Наиболее важный первый этап доказательства из [1], позволяющий отойти от резонансных соотношений, распространяется на рассматриваемый случай без изменений. Отметим, что подобный способ использовался и в [3].

Второй этап носит технический характер. Напомним, что он сводит проблему устойчивости на высоких модах к принципу усреднения для некоторого линейного уравнения. Однако возникающие здесь трудности преодолеваются без труда: проекция линеаризованного уравнения на асимптотически высокие моды включается в уже изученный в [1] более широкий класс уравнений.

Пусть $u(t, x, y)$ – некоторое решение исследуемого уравнения (1), рассматриваемого в области (4). При $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, $x + y \geqslant 1$ определим его равенством $u(t, 1 - x, 1 - y)$. В область $0 \leqslant y \leqslant 1$, $1 \leqslant x \leqslant 2$ осуществим его продолжение по четности, т.е. по формуле $u(t, 2 - x, y)$. Аналогичным образом решение продолжается в область $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 \leqslant y \leqslant 2$. Наконец, в квадрате $1 \leqslant x, y \leqslant 2$ решение строим по формуле $u(t, 2 - x, 2 - y)$. В итоге приходим к частному варианту решения на торе. Доказательство закончено.

Объясним причину, по которой предполагается оценка μ снизу, т.е. ее квалифицированная отделенность от нуля. Можно, конечно, сослаться на общие положения теории возмущений: краевая задача (1) в определенном смысле есть малое возмущение своей квазинормальной формы (11), а значит, нужна определенная грубость цикла невозмущенной задачи.

Однако глубинная причина заключается в другом. Рассмотрим разложение в ряд по степеням $\varepsilon^{1/2}$ однородного цикла (его частота разлагается в ряд по целым степеням ε). Если фиксировать ω^2 и постепенно уменьшать коэффициент упругости a^2, то на формальном уровне автоволна возникает из бесконечности; сначала становятся пространственно неоднородными высокие порядки малости в упомянутом разложении цикла. Но каждый переход пространственных возмущений с одного порядка малости на другой связан с такими интервалами значений a^2, при которых однородный цикл восстанавливает свою устойчивость, а значит, автоволна ее теряет.

Кратко резюмируем результаты теоретического анализа. Во-первых, доказано, что при уменьшении a однородный цикл теряет устойчивость. Во-вторых, получена важная информация о возможных аттракторах эталонной краевой задачи (24). В-третьих, достаточно ясно, что связанные с резонансами феномены не угрожают. В-четвертых, из дальнейшего станет ясно, что режимы самоорганизации с теоремой 3 практически не связаны.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ: ЭНЕРГИЯ РЕЖИМОВ САМООРГАНИЗАЦИИ

В (1) конкретизируем нелинейность, считая, что

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = (bu + 2u^2)\frac{\partial u}{\partial t}, \quad b > 0, \tag{86}$$

т.е. работать будем с волновым вариантом уравнения Ван дер Поля. При этой нелинейности ляпуновская величина уравнения (2) имеет вид (3), в котором $\omega^2 = b^2/6$. Отсюда и из (20) вытекает, что при малых значениях ε однородный цикл устойчив при

$$a^2 > \frac{b^2}{3\pi^2}. \tag{87}$$

Удобно иметь такую числовую характеристику аттракторов, по которой они значимо различаются. Как оказывается, таковой может служить среднее по времени значение E_0 энергии автоволны

$$E(t) = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + uAu\right] dxdy, \tag{88}$$

где A – оператор $I - \varepsilon a^2\Delta$ при условиях непроницаемости на границе рассматриваемой треугольной области.

Опишем схему численного интегрирования краевой задачи (1) при нелинейности (86), подобную изложенной в [1]. Единичный отрезок поделим на N равных частей с шагом $h = 1/N$, где в численных экспериментах $N = 50$, а затем положим

$$u_{kn}(t) = u(t, kh, nh), \quad k, n = 0, 1, \ldots, N.$$

Через A_h обозначим разностную аппроксимацию оператора A.

Итак, краевую задачу (1) заменяем ее конечномерным вариантом

$$\ddot{u}_{kn} + \varphi(u_{kn})\dot{u}_{kn} + u_{kn} + \varepsilon a^2 A_h u_{kn} = 0, \tag{89}$$

$$\begin{gathered} A_h = \frac{1}{h^2}(4u_{kn} - u_{k-1,n} - u_{k+1,n} - u_{k,n-1} - u_{k,n+1}), \\ k, n = 1, 2, \ldots, N-2, \quad k + n \leqslant N - 1, \end{gathered} \tag{90}$$

и в силу граничных условий имеем

$$u_{0n} = u_{1n}, \quad u_{k0} = u_{k1}, \quad k, n = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$u_{00} = u_{11}, \quad u_{0N} = u_{0,N-1}, \quad u_{N0} = u_{N-1,0}$$

и

$$u_{kn} = \frac{(u_{k-1,n} + u_{k,n-1})}{2}, \quad k, n = 1, 2, \ldots, N-1, \quad k + n = N,$$

а

$$\varphi(u) = -\varepsilon + bu + 2u^2. \tag{91}$$

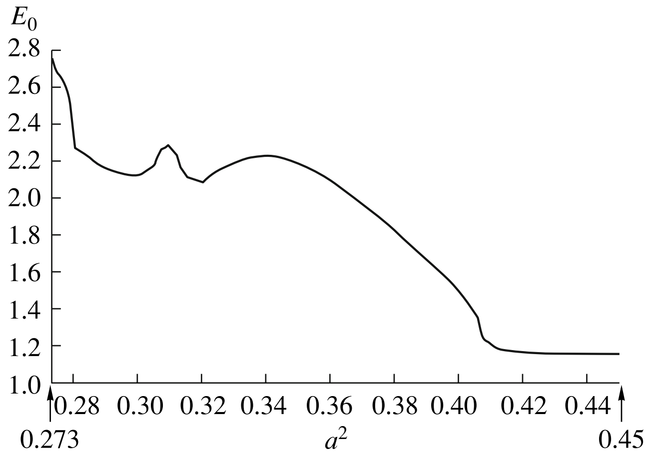
Интегрируя дважды от t до $t + \tau$ каждое из уравнений (89) и попутно аппроксимируя интегралы по методу трапеций, с точностью до τ^4 получаем равенства

$$\begin{gathered} u_{kn}(t+2\tau) - 2u_{kn}(t+\tau) + u_{kn}(t) + \frac{\tau}{2}[\Phi(u_{kn}(t+2\tau)) - \Phi(u_{kn}(t))] + \\ + \tau^2[u_{kn}(t+\tau) + \varepsilon a^2 A_h u_{kn}(t+\tau)] = 0, \end{gathered} \tag{92}$$

где $\Phi(u) = -\varepsilon u + \frac{b}{2}u^2 + \frac{2}{3}u^3$.

Введем обозначения

$$\delta_1 u_{kn} = u_{kn}(t+\tau) - u_{kn}(t), \quad \delta_2 u_{kn} = u_{kn}(t+2\tau) - u_{kn}(t+\tau).$$



Фиг. 2.

С точностью до τ^3 имеем

$$\Phi(u_{kn}(t+2\tau)) = \Phi(u_{kn}(t+\tau)+\delta_2 u_{kn}) =$$

$$= \Phi(u_{kn}(t+\tau)) + \delta_2 u_{kn}\Phi'(u_{kn}(t+\tau)) + \frac{1}{2}(\delta_2 u_{kn})^2\Phi''(u_{kn}(t+\tau)).$$

Отметим, далее, что

$$(\delta_2 u_{kn})^2 - (\delta_1 u_{kn})^2 = O(\tau^3).$$

Данные формулы и полученное равенство (92) позволяют с точностью до τ^4 построить явную разностную схему

$$\left(1+\frac{\tau}{2}\Phi'(u_{kn}(t+\tau))\right)\delta_2 u_{kn} = \delta_1 u_{kn} - \frac{\tau}{2}[\Phi(u_{kn}(t+\tau)) - \Phi(u_{kn}(t))] -$$
$$-\frac{\tau}{4}(\delta_1 u_{kn})^2\Phi''(u_{kn}(t+\tau)) - \tau^2[u_{kn}(t+\tau) + \varepsilon a^2 A_h u_{kn}(t+\tau)]. \tag{93}$$

При проведении численных экспериментов предполагалось, что

$$\tau = 10^{-3}, \quad \varepsilon = 0.4, \quad b = 4. \tag{94}$$

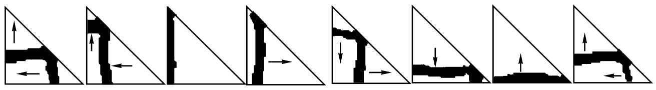
Данный выбор значения ε объясняется двояко. Во-первых, он не должен быть слишком большим, чтобы не выходить за рамки локальной теории, изложенной в предыдущем разделе. Однако, во-вторых, излишне малым его тоже нельзя брать: режимы самоорганизации связаны с достаточно интенсивными колебаниями.

Перейдем к их описанию. В полном соответствии с результатами первых двух разделов, при противоположном (87) неравенстве однородный цикл теряет устойчивость, передавая ее двум ответвляющимся от него автоволнам. Интересно, что изменение их усредненной энергии немонотонно и следует из показанного на фиг. 2.

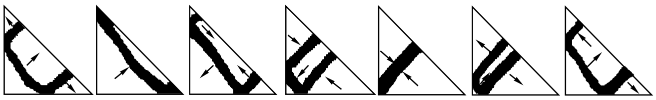
На этом же графике отмечено критическое значение $a^2 = 0.273\ldots$, при прохождении через которое рассматриваемые автоволны жестко теряют устойчивость: малые возмущения нарастают и трансформируются в режим самоорганизации. Его характерная особенность – большая усредненная по времени энергия.

Пространственная упорядоченность режимов самоорганизации более выражена при больших a^2, поэтому на приводимых ниже фигурах $a^2 = 2$.

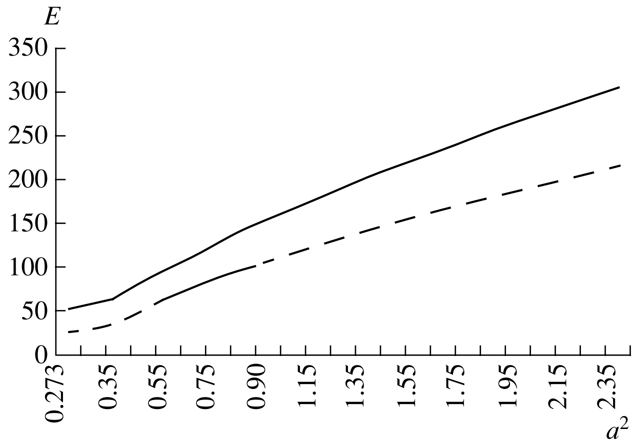
На фиг. 3 показана временная и пространственная эволюция одного из наиболее просто устроенных режимов самоорганизации, где в белых областях $1 > u > -1$, а в черных $u < -1$. Стрелками отмечены направления движения пиков автоволн. Показан законченный цикл. В дальнейшем он примерно повторяется.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Имеются и другие режимы самоорганизации, области притяжения которых становятся значимы, когда при уменьшении a^2 более просто устроенный режим самоорганизации начинает терять свою пространственную и временную упорядоченность. Например, следующий по сложности режим самоорганизации связан с уже рассмотренным примерно так: исходный треугольник делится пополам прямой $y = x$ и в каждом из меньших треугольников волна согласованно движется приблизительно по показанному на фиг. 3 способу (см. фиг. 4, где области черного и белого имеют ту же смысловую нагрузку, что и на фиг. 3).

Зависимость энергии этих двух режимов самоорганизации от a^2 представлена на фиг. 5, где сплошная линия соответствует энергии второго режима, а штриховая – первого. Обращаем внимание, что режимы самоорганизации принципиально более энергоемки, что следует из сопоставления фиг. 2 и 5.

При увеличении a^2 данные режимы сохраняют устойчивость и монотонный рост энергии (энергия показанного на фиг. 4 режима самоорганизации равна 1000 при $a^2 = 12.25$). При уменьшении a^2 приходим к диффузионному хаосу с небольшой энергией.

Итак, возникновение режимов самоорганизации связано с их рождением из уплотнения траекторий. При этом в некотором диапазоне изменения коэффициента упругости они сосуществуют. Представляется правдоподобным, что при уменьшении коэффициента упругости a^2 возникают все более сложные режимы самоорганизации со все большей энергией, но с меньшей областью притяжения. Напомним, что в условиях теоремы 1 данный феномен проявляется в наиболее парадоксальной форме.

В заключение выделим то новое, что получено в данной статье.

Во-первых, впервые указана асимптотическая формула для суммы всех кратностей собственных значений оператора Лапласа при граничных условиях Неймана, меньших фиксированного собственного значения.

Во-вторых, впервые аккуратно показано, что в ряде случаев произвольное число галеркинских приближений не позволяет получить представление о числе и характере аттракторов некоторых классов волновых уравнений в плоской области.

В-третьих, показано, что обладающие большой энергией режимы самоорганизации – естественные аттракторы широкого класса волновых уравнений.

В-четвертых, из сопоставления полученных выше результатов с изложенными в [1] и [10] вытекает, что выявленная структура автоволновых процессов носит общий характер: совершенно аналогичные имеют место и в системах реакция–диффузия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колесов Ю.С., Харьков А.Е.* Сходство и различие динамики плоских и трехмерных нелинейных волн // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 2. С. 57–84.
2. Линейные уравнения математической физики / Под ред. М.Н. Михлина. М.: Наука, 1964.
3. *Колесов Ю.С.* Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.
4. *Колесов Ю.С.* Проблема аттракторов нелинейных волновых уравнений в плоских областях // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 217–229.
5. *Колесов Ю.С.* Свойства устойчивости циклов и торов простейшего нерезонансного уравнения волнового типа // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 744–750.
6. *Колесов Ю.С.* Задача паразит–хозяин // Динамика биологических популяций. Горький: Изд-во ГГУ, 1984. С. 16–29.
7. *Колесов Ю.С.* Устойчивость и бифуркация бегущих волн // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1985. С. 3–22.
8. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
9. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
10. *Колесов Ю.С., Майоров В.В.* Пространственная и временная самоорганизация в одновидовом биоценозе // Динамика биологических популяций. Горький: Изд-во ГГУ, 1986. С. 3–18.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 646–661

УДК 519.633

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ УЕДИНЕННОГО БЕГУЩЕГО ИМПУЛЬСА В СИСТЕМЕ ТИПА РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА НЬЮТОНА–КРЫЛОВА

 А. Г. Макеев, Н. Л. Семендяева

(119992 Москва, Ленинские Горы, МГУ, ВМиК)

e-mail: amak@cs.msu.ru, natalys@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 18.04.2008 г.
Переработанный вариант 02.07.2008 г.

Безматричный вариант метода Ньютона–Крылова, использующий алгоритм GMRES (итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений), применяется для продолжения по параметру решения в виде уединенного бегущего импульса в трехкомпонентной системе типа реакция–диффузия. Используя результаты интегрирования на коротком интервале времени, мы заменяем исходную систему нелинейных алгебраических уравнений другой системой, имеющей более подходящие, с точки зрения применения алгоритма GMRES, спектральные свойства матрицы Якоби. Предложенный нами метод продолжения по параметру показал свою высокую эффективность для задач большой размерности и позволил детально изучить зависимость локализованных решений от значений одного из параметров модели. Библ. 20. Фиг. 5. Табл. 2.

Ключевые слова: уравнения реакции–диффузии, локализованные структуры, продолжение автомодельных решений по параметру, метод Ньютона–Крылова, алгоритм GMRES, бифуркационный анализ.

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении поведения динамической системы важно знать ее инвариантные многообразия – неподвижные точки, предельные циклы, инвариантные торы и др. Представляет интерес не только находить всевозможные инвариантные многообразия при заданном наборе значений параметров, но и определять условия их существования и устойчивости при изменении ключевых параметров системы. При этом необходимо уметь вычислять как устойчивые, так и неустойчивые многообразия, поскольку последние могут влиять на динамику системы и приводить к устойчивым многообразиям при изменении значений параметров.

Перечисленные задачи бифуркационного анализа и продолжения по параметру обычно легко решаются, если динамическая система описывается малым числом переменных. Для этих целей широко используются специальные пакеты программ, такие как AUTO, CONTENT, MATCONT и др. (см. [1]). Основным "решателем" в таких пакетах является итерационный метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений или его модификации. Как известно, на каждой итерации метода Ньютона необходимо вычислять матрицу Якоби и решать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В задачах большой размерности нахождение якобиана в явном виде может оказаться неоправданно трудоемкой операцией. Учет разреженности матриц, свойственный задачам большой размерности, также не всегда эффективен. Так, например, при исследовании стационарных решений систем параболических уравнений в частных производных использование стандартных алгоритмов продолжения по параметру приводит к нарушению ленточной структуры матрицы Якоби, что делает невозможным непосредственное применение эффективных прямых методов решения СЛАУ. Таким образом, в задачах большой размерности главным препятствием на пути использования известных алгоритмов бифуркационного анализа и продолжения по параметру являются сложности с практическим применением метода Ньютона и прямых методов линейной алгебры.

В последние годы все более широкую популярность приобретают так называемые "безматричные" (matrix-free) итерационные методы решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений. Под этим термином понимается такая ситуация, когда нет необходимости вычислять и хранить некоторую матрицу, а можно лишь использовать результат умножения этой матрицы на вектор, т.е. вычислять вектор. Примером безматричного алгоритма является обобщенный метод минимальных невязок GMRES (Generalized Minimal Residual) – итерационный метод решения СЛАУ с разреженной несимметричной матрицей, разработанный в середине 80-х годов (см. [2]). Алгоритм GMRES оперирует только результатом умножения матрицы системы на вектор, т.е. может применяться как в случаях, когда матрица задана в явном виде, так и в задачах, в которых матрица системы доступна только через операцию умножения на вектор. Однако скорость сходимости этого метода, которая определяется спектром собственных значений матрицы системы, не всегда удовлетворительна. Известно, что эта проблема часто может быть решена путем предварительной обработки задачи (preconditioning), однако не существует универсальных подходов и рекомендаций для осуществления такой процедуры.

В те же годы для решения больших систем нелинейных алгебраических уравнений был разработан безматричный метод Ньютона–Крылова, использующий алгоритм GMRES (см. [3]–[7]). Этот метод не требует явного вычисления и хранения матрицы Якоби системы, а лишь аппроксимирует результат умножения этой матрицы на вектор. В настоящей работе метод Ньютона–Крылова с использованием алгоритма GMRES (назовем его NK-GMRES) применяется для продолжения по параметру и исследования устойчивости решения в виде уединенного бегущего импульса в трехкомпонентной системе типа реакция–диффузия. При этом возникает задача поиска и продолжения по параметру решений системы, состоящей из более 9000 нелинейных алгебраических уравнений. Нельзя утверждать, что размерность этой системы очень велика, однако обращение к стандартным прямым методам уже становится проблематичным.

Оказалось, что для рассматриваемой нами задачи непосредственное применение метода NK-GMRES сильно затруднено из-за плохой сходимости алгоритма GMRES. Для устранения этой проблемы мы воспользовались подходом, основанным на использовании результатов численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на коротком промежутке времени (см. [8], [9]). Используя результаты интегрирования, мы заменяем исходную систему нелинейных алгебраических уравнений другой системой, имеющей более подходящие, с точки зрения применения алгоритма GMRES, спектральные свойства матрицы Якоби. В нашем случае интегрирование по времени является эффективным способом предварительной обработки, хотя по сути этот подход отличается от того, что обычно подразумевается под термином preconditioning.

При расчетах нами использовалась программа nsoli.m – вариант метода NK-GMRES (см. [10]), разработанный для среды MATLAB. Кроме того, для нахождения ведущих собственных значений разреженных матриц мы обращались к стандартной функции eigs.m пакета MATLAB 7.2.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему трех уравнений в частных производных параболического типа, описывающих реакцию окисления CO на поверхности катализатора:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} = \mathbf{D}\frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial x^2} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}). \tag{1}$$

Здесь t – время, x – пространственная переменная, $\boldsymbol{\theta}(x, t) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^{\mathrm{т}}$ – вектор значений концентраций молекул угарного газа ($\theta_1 \equiv \theta_{CO}$), атомов кислорода на каталитической поверхности ($\theta_2 \equiv \theta_O$) и атомов кислорода в приповерхностном слое ($\theta_3 \equiv \theta_{O_v}$), $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$ – диагональная матрица диффузии с неотрицательными элементами, $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{т}}$ – нелинейные реакционные члены, вычисляемые по формулам (см. [11], [12])

$$\begin{aligned} f_1 &= k_1 P_{CO}(1-\theta_1-\theta_2-\theta_3) - k_{-1}\theta_1 - 4k_3\theta_1\theta_2 - 4k_5\theta_1\theta_3, \\ f_2 &= 4k_2 P_{O_2}(1-\theta_1-\theta_2-\theta_3)^2 - 4k_3\theta_1\theta_2 - k_4\theta_2, \\ f_3 &= k_4\theta_2 - 4k_5\theta_1\theta_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь k_1P_{CO}, k_{-1}, $k_2P_{O_2}$, k_3, k_4, k_5 – константы скоростей элементарных стадий (соответственно, адсорбции и десорбции молекулы CO, адсорбции молекул кислорода, реакции на поверхности, проникновения атома кислорода в приповерхностный слой и реакции CO с приповерхностным кислородом); скорости процессов адсорбции зависят от давлений реагентов в газовой фазе P_{CO} и P_{O_2}. Пространственно-однородные стационарные состояния определяются из системы трех нелинейных алгебраических уравнений $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$.

Используя метод прямых, решение динамической задачи (1), (2) можно свести к решению задачи Коши для системы ОДУ большой размерности. Численное интегрирование такой системы ОДУ с помощью стандартных методов показало, что в достаточно большой области значений параметров P_{CO} и P_{O_2} наряду с пространственно однородным стационарным решением существует и пространственно неоднородное решение в виде уединенного бегущего импульса – нестационарной локализованной структуры. Уединенный импульс представляет собой локальное возмущение пространственно однородного стационара, перемещающееся с постоянной скоростью и сохраняющее профиль в процессе движения. Однако расчеты только динамической задачи не позволяют получить исчерпывающую информацию о таких решениях. Достаточно трудно выделить области значений параметров, где существуют устойчивые решения в виде уединенного бегущего импульса. Кроме того, при непосредственном расчете нестационарной задачи не могут быть получены и исследованы неустойчивые решения.

Стационарная задача о расчете бегущего с постоянной скоростью импульса формулируется так. Сделаем в системе (1) автомодельную замену переменных $\xi = x - vt$, где v – скорость распространения бегущего импульса. Поскольку форма и скорость импульса неизменны во времени, то в новых переменных можно рассматривать стационарные уравнения и перейти от системы (1) к системе ОДУ второго порядка

$$\mathbf{0} = \mathbf{D}\frac{\partial^2\boldsymbol{\theta}}{\partial\xi^2} + v\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\xi} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) \tag{3}$$

со следующими краевыми условиями на бесконечности:

$$\boldsymbol{\theta}(\xi) \longrightarrow \bar{\boldsymbol{\theta}}^* \quad \text{при} \quad \xi \longrightarrow \pm\infty. \tag{4}$$

Здесь $\bar{\boldsymbol{\theta}}^*$ – пространственно однородное стационарное решение системы (1).

Уравнения (3) с граничными условиями (4) обладают инвариантностью относительно сдвига по пространству. Кроме того, система (3) не изменяется при замене $(\xi, v) \longrightarrow (-\xi, -v)$.

Заметим, что в частном случае $v = 0$ решениями задачи (3), (4) могут являться не только пространственно однородные стационарные состояния исходной системы (1), но и стационарные локализованные структуры. При $v \neq 0$ в зависимости от краевых условий система (3) может описывать как уединенные бегущие импульсы, так и волны переключения, фазовые волны, а также более сложные пространственно-временные структуры.

Численное решение задачи (3), (4) проводится на конечном отрезке длины L с периодическими граничными условиями. Используется равномерная сетка с шагом $\Delta\xi$, содержащая M узлов. В результате разностной аппроксимации пространственных производных получим следующую систему из $3M$ нелинейных алгебраических уравнений:

$$F_{k,i} = d_k\frac{\theta_{k,i-1} - 2\theta_{k,i} + \theta_{k,i+1}}{(\Delta\xi)^2} + v\frac{\theta_{k,i-1} - \theta_{k,i+1}}{2\Delta\xi} + f_k(\theta_{1,i}, \theta_{2,i}, \theta_{3,i}) = 0, \tag{5}$$

где $i = 1, 2, \ldots, M$, $k = 1, 2, 3$, $\theta_{k,M+1} = \theta_{k,1}$, $\theta_{k,0} = \theta_{k,M}$.

Уравнения (5) можно записать в векторном виде

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}, \tag{5'}$$

где $\mathbf{F} = (F_{1,i}, F_{2,i}, F_{3,i})^{\mathrm{т}}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{1,i}, \theta_{2,i}, \theta_{3,i})^{\mathrm{т}}$, $i = 1, 2, \ldots, M$.

Если найдено решение $\boldsymbol{\theta}^*$ системы уравнений (5') для некоторого значения v, то собственные значения матрица Якоби $\mathbf{J_F} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial\theta_j}\right]_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*}$, $i, j = 1, 2, \ldots, 3M$, дают информацию об асимптотической устойчивости решения нестационарной задачи.

Длина фрагмента L должна выбираться так, чтобы граничные условия (4) были выполнены с хорошей точностью в достаточно большой области пространства. В этом случае якобиан $\mathbf{J_F}$ будет иметь как минимум одно близкое к нулю собственное значение в силу инвариантности решения относительно сдвига по пространству в исходной постановке задачи (3), (4). При расчетах уединенных локализованных структур близость к нулю одного собственного значения матрицы $\mathbf{J_F}$ является критерием точности расчетов. Если это условие не выполнено, то найденную структуру нельзя считать уединенной. Для всех результатов расчетов, представленных в настоящей работе, одно собственное значение матрицы $\mathbf{J_F}$ по модулю не превосходит значения 10^{-7}.

Поскольку значение v неизвестно, система (5) содержит $3M$ уравнений и $3M + 1$ переменную. Для устранения неопределенности к системе (5) можно добавить следующее условие:

$$F_{3M+1} = \theta_{1,q} - \bar{\theta} = 0, \tag{6}$$

зафиксировав тем самым положение импульса в пространстве. Здесь q – некоторый заранее выбранный номер узла сетки, $\bar{\theta}$ – некоторое “подходящее” значение концентрации одного из реагентов (молекул CO), которое не должно соответствовать пространственно однородному решению. В качестве дополнительного уравнения можно использовать и условие равенства нулю пространственной производной в некотором узле сетки, зафиксировав тем самым положение локального экстремума профиля импульса (см. [13]).

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

3.1. Алгоритм продолжения по параметру

Основными численными методами качественного исследования состояний равновесия динамических систем являются продолжение по параметру и бифуркационный анализ. Они предназначены для поиска и анализа устойчивости решений систем нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{p}) = \mathbf{0} \tag{7}$$

при различных значениях вектора управляющих параметров $\mathbf{p}$. Здесь $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ – вектор переменных, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих параметров, $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкая вектор-функция. Далее будем рассматривать лишь однопараметрический случай ($m = 1$).

Наиболее простая интуитивно понятная схема построения ветви стационарных решений системы дифференциальных уравнений методом продолжения по параметру состоит в следующем. Производится дискретизация параметрической области и для каждого фиксированного значения бифуркационного параметра p последовательно ищутся решения $\mathbf{y}$ системы (7). Для этого обычно используют алгоритм типа предиктор–корректор.

1. На первом этапе (предиктор) для выбранного значения параметра по некоторому правилу вычисляется начальное приближение $\mathbf{y}^0$. В качестве $\mathbf{y}^0$ можно рассматривать, например, решение, полученное для предыдущего значения параметра.

2. На втором этапе (корректор) система уравнений (7) решается одним из итерационных методов, чаще всего методом Ньютона или его модификациями.

При таком подходе расчет и исследование сложных особых точек, в которых матрица Якоби системы (7) становится вырожденной, может оказаться непростой задачей. В частности, продолжение по параметру в точке поворота (седло-узловой бифуркации, точке складки, предельной точке), где возникает множественность решений, становится практически невозможным.

Обойти трудности, связанные с вырождением матрицы Якоби, удается путем введения нового параметра – длины дуги s траектории системы в фазовом пространстве и рассмотрения расширенной системы уравнений, содержащей наряду с уравнениями исходной системы (7) дополнительное уравнение для длины дуги (см. [1], [14], [15]). При этом предполагается, что вектор переменных $\mathbf{y}$ и бифуркационный параметр p зависят от параметра s и связаны соотношением

$$\|d\mathbf{y}\|^2 + (dp)^2 = (ds)^2, \tag{9}$$

из которого после дифференцирования по s получаем:

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s}\right\|^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2 = 1. \tag{10}$$

Для обеспечения наибольшей вычислительной эффективности в дополнительное уравнение (10) можно ввести весовой множитель $\varphi > 0$, позволяющий контролировать относительные вклады вектора производных решения и производной бифуркационного параметра по s:

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s}\right\|^2 + \varphi\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2 = 1. \tag{11}$$

Выбор некоторого значения $\varphi \neq 1$ становится особенно важным для систем большой размерности.

Изложенный подход называется *продолжением решения* системы алгебраических уравнений *по длине дуги* (pseudo arclength continuation, см. [14]). Установлено, что матрица Якоби расширенной системы не является вырожденной, если матрица Якоби исходной системы невырождена. Кроме того, якобиан расширенной системы не вырождается в простых (изолированных) точках поворота, что дает возможность использовать метод продолжения решения по длине дуги для исследования локальных бифуркаций состояния равновесия типа седло–узел.

В данной работе использован следующий вариант метода продолжения решения по длине дуги (см. [14], [15]). Введем в рассмотрение расширенный вектор переменных $\mathbf{z} = (y_1, \ldots, y_n, p)^{\mathrm{T}}$ размерности $n + 1$. Пусть известны решения $\mathbf{z}_{i-1}$ и $\mathbf{z}_{i-2}$, полученные на двух предыдущих шагах $i - 1$ и $i - 2$ соответственно.

Этап 1. *Предиктор*. Ищем начальное приближение на секущей, проходящей через точки $\mathbf{z}_{i-2}$ и $\mathbf{z}_{i-1}$, по формуле

$$\mathbf{z}^0 = \mathbf{z}_{i-1} + ds \cdot \mathbf{z}'. \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{z}' = \dfrac{\mathbf{z}_{i-1} - \mathbf{z}_{i-2}}{\|\mathbf{z}_{i-1} - \mathbf{z}_{i-2}\|_2}$ – единичный направляющий вектор секущей, ds – шаг метода продолжения по длине дуги.

Этап 2. *Корректор*. Исходная система уравнений (7) дополняется уравнением, полученным в результате линеаризации уравнения (10):

$$G_{n+1} = (\mathbf{z} - \mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}') - ds = 0, \tag{13}$$

или, в эквивалентной форме,

$$G_{n+1} = (\mathbf{z} - \mathbf{z}^0, \mathbf{z}') = 0.$$

Таким образом, на каждом шаге решение $\mathbf{z}$ удовлетворяет условию: разность $\mathbf{z} - \mathbf{z}^0$ векторов решения и начального приближения перпендикулярна секущей.

Практическая реализация алгоритма продолжения по параметру также включает в себя автоматический выбор значения ds по стандартной схеме: а) шаг уменьшается, если за определенное число итераций заданная погрешность не была достигнута; б) через несколько успешных шагов делается попытка увеличить значение ds.

3.2. Алгоритм NK-GMRES

Известно, что практическое применение метода Ньютона для систем большой размерности наталкивается на определенные трудности. На каждой итерации j необходимо решать линейную систему вида

$$\mathbf{J}(\mathbf{z}^j)(\mathbf{z}^{j+1} - \mathbf{z}^j) = -\mathbf{G}(\mathbf{z}^j), \tag{14}$$

где $\mathbf{J} = \left[\dfrac{\partial G_k}{\partial z_l}\right]$, $k, l = 1, 2, \ldots, N$, – матрица Якоби системы. Чтобы избежать проблем, связанных с вычислением и обращением якобиана $\mathbf{J}$, в данной работе применяется метод Ньютона–Крылова, который позволяет организовать итерационную процедуру метода Ньютона без построения матрицы Якоби в явном виде. Метод оперирует только результатом умножения матрицы Якоби на вектор; разностная аппроксимация произведения матрицы $\mathbf{J}$ на вектор $\mathbf{u}$ имеет вид

$$\mathbf{J}(\mathbf{z}^j)\mathbf{u} = \frac{\mathbf{G}(\mathbf{z}^j + \varepsilon\mathbf{u}) - \mathbf{G}(\mathbf{z}^j)}{\varepsilon}, \tag{15}$$

где ε – некоторое малое возмущение. Если значение $\mathbf{G}(\mathbf{z}^j)$ известно, то для аппроксимации результата умножения якобиана на вектор по формуле (15) необходимо вычислить нелинейную функцию $\mathbf{G}$ только один раз, тогда как разностная аппроксимация всех частных производных якобиана $\mathbf{J}$ требует в общем случае N дополнительных вычислений функции $\mathbf{G}$.

Алгоритм NK-GMRES состоит из двух итерационных циклов.

1. *Внешний цикл* представляет собой итерации Ньютона для поиска решения уравнения $\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ по формуле (14) при использовании заданного начального приближения $\mathbf{z}^0$. На каждой итерации неизвестное значение вектора приращений $\Delta\mathbf{z}^j = \mathbf{z}^{j+1} - \mathbf{z}^j$ вычисляется во внутреннем цикле с использованием обобщенного метода минимальных невязок.

2. *Внутренний цикл* – итерации по методу GMRES для поиска вектора $\Delta\mathbf{z}^j$. Алгоритм GMRES является одним из методов проектирования на подпространство Крылова, разработанным для решения СЛАУ большой размерности (см. [2]). На каждой итерации алгоритма GMRES требуется выполнить одно умножение матрицы $\mathbf{J}$ на некоторый вектор. Для этого в нашем случае требуется вычислить значения нелинейной функции $\mathbf{G}$ и применить формулу (15). Помимо умножения исходной матрицы на вектор, на каждой k-й итерации внутреннего цикла дополнительно выполняется ортогонализация Арнольди для системы из k векторов размерности N. Количество дополнительных арифметических операций на каждой итерации пропорционально величине $N \times k$ и, следовательно, значительно увеличивается с ростом k. Поэтому на практике часто используется так называемый перезапускаемый алгоритм GMRES(m), где m – параметр алгоритма, обозначающий максимальное количество итераций. Если за m итераций метод не сошелся, осуществляется перезапуск алгоритма GMRES. При этом в качестве начального приближения используется решение, полученное при $k = m$, и алгоритм GMRES стартует заново. Однако известно, что такой перезапуск может значительно ухудшить свойства сходимости итерационного процесса GMRES. “Оптимальное” значение m, а также максимальное число перезапусков зависят от свойств решаемой нелинейной системы и выбираются при тестовых расчетах.

Вариант метода NK-GMRES, реализованный в программе nsoli.m и используемый в настоящей работе, относится к так называемым “неточным” методам Ньютона (inexact Newton method, см. [16]), которые определяются формулой

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{z}^j) + \mathbf{J}(\mathbf{z}^j)\Delta\mathbf{z}^j\|_2 \le \eta^j \|\mathbf{G}(\mathbf{z}^j)\|_2,$$

где $0 \le \eta^j < 1$. В нашем случае это неравенство устанавливает критерий сходимости итерационного процесса GMRES при решении СЛАУ (14). Требуемая точность решения СЛАУ увеличивается по мере приближения решения к искомому корню системы нелинейных уравнений. В результате этого, как правило, количество внутренних итераций по методу GMRES значительно увеличивается с ростом номера j внешней итерации. Выбор значений η^j осуществляется автоматически при использовании $\eta^0 = 0.9$ и формулы из [17]. Такой подход оказывается значительно более эффективным, чем использование обычного критерия сходимости итерационного процесса решения СЛАУ, учитывающего лишь значение $\|\mathbf{G}(\mathbf{z}^j) + \mathbf{J}(\mathbf{z}^j)\Delta\mathbf{z}^j\|_2$. В качестве критерия остановки внешних итераций нами использовалось условие $\|\mathbf{G}(\mathbf{z}^j)\|_2 < \delta$.

Заметим, что в программе nsoli.m реализован модифицированный (так называемый демпфированный) вариант метода Ньютона, дополненный линейным поиском решения, обеспечивающим убывание погрешности $\|\mathbf{G}(\mathbf{z}^j)\|_2$ с ростом номера итерации j. Процедура линейного поиска решений нами не использовалась, поскольку она оказалась неэффективной для рассматриваемой задачи продолжения решений по параметру.

В отличие от известных прямых методов типа метода исключения Гаусса (LU-разложения), которые преобразуют матрицу системы и поэтому требуют задания всех ее элементов, алгоритм GMRES использует только операцию умножения матрицы системы на вектор. Если GMRES сочетается с методом Ньютона, то нет необходимости вычислять и хранить якобиан в явном виде, поэтому такой метод называют Jacobian-free Newton–Krylov (см. [7]). Отметим, что алгоритм GMRES может применяться и в том случае, когда якобиан системы вычисляется в явном виде.

3.3. Интегрирование по времени

Известно, что скорость сходимости метода GMRES обычно существенно зависит не только от числа обусловленности матрицы СЛАУ, но и от всего спектра ее собственных значений. Для улучшения сходимости используют различные процедуры предварительной обработки, имеющие целью заменить исходную линейную систему эквивалентной, обладающей более подходящим спектром собственных значений. В нашем случае предварительной обработке подвергается система нелинейных уравнений, для этого используется процедура интегрирования по времени.

Рассмотрим динамическую систему, состояние которой описывается вектором неизвестных $\mathbf{y}$. Назовем *динамическим решателем* алгоритм, который по заданным начальным условиями $\mathbf{y}_0$ определяет новое решение $\mathbf{y}_\tau$ – результат эволюции системы на заданном промежутке времени τ. Простейшим примером такого решателя является любой алгоритм численного решения задачи Коши для системы автономных ОДУ. Более сложный пример – стохастический алгоритм, описывающий эволюцию во времени системы на атомарном уровне с помощью динамического метода Монте–Карло (см. [18], [19]). В последнем случае вместо дифференциальных уравнений существуют лишь некоторые правила и вероятности переходов. Таким образом, динамический решатель может представлять собой своего рода “черный ящик”. При этом известно лишь количество макроскопических переменных, задаются начальные условия и промежуток интегрирования, а решатель выдает результат – новые значения переменных. Сами макроскопические уравнения, которые описывают эволюцию системы, могут быть недоступны в явном виде, как это происходит в случае использования динамического метода Монте-Карло или методов молекулярной динамики.

Использование динамического решателя позволяет находить не только асимптотически устойчивые стационарные состояния, которые могут быть получены методом установления при $\tau \longrightarrow \infty$. Применение метода Ньютона для решения уравнения $\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_\tau = \mathbf{0}$ в сочетании с выбором малых значений τ позволяет сходиться как к устойчивым, так и к неустойчивым положениям равновесия. Такой подход к исследованию стационарных решений уравнений, не заданных в явном виде (equation-free), расширяет возможности стандартных методов и позволяет продолжать решения по параметру и проводить бифуркационный анализ “неизвестных” уравнений (см. [18], [19]).

В настоящей работе рассматривается система уравнений в частных производных, заданная в явном виде. Однако оказывается, что подход, использующий шаги по времени, становится эффективным методом предварительной обработки перед применением метода NK-GMRES.

Рассмотрим задачу Коши для системы автономных ОДУ

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}), \tag{16}$$

стационарные решения которой могут быть найдены из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}. \tag{17}$$

Наша задача – заменить уравнение (17) другим так, чтобы сходимость метода NK-GMRES при решении нового уравнения значительно улучшилась.

Используя начальные условия $\boldsymbol{\theta}_0$, метод численного решения задачи Коши для системы ОДУ (16) (“динамический решатель”) через заданный промежуток времени $\tau > 0$ находит новые значения переменных, которые мы обозначим через $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}_0, \tau)$. Решения уравнения вида

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}, \tau) = \mathbf{0} \tag{18}$$

содержат все решения уравнений (17) (обратное утверждение не всегда верно). Действительно, если стационарное решение $\boldsymbol{\theta}^*$ задано в качестве начальных условий при решении задачи Коши для системы (16), то это решение не должно измениться в результате интегрирования по времени, поэтому $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}^*, \tau) = \boldsymbol{\theta}^*$ и уравнение (18) будет выполнено.

Собственные значения λ_i якобиана $\mathbf{J}_\mathbf{F} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial \theta_j}\right]_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*}$ и собственные значения μ_i якобиана $\mathbf{J}_\boldsymbol{\Psi} = \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta_j}\right]_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*}$ связаны простым соотношением

$$\mu_i = 1 - \exp(\lambda_i \tau). \tag{19}$$

Отметим, что матрица Якоби $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\Psi}}$ может быть найдена по формулам численного дифференцирования при задании в качестве начальных значений малых возмущений каждой координаты вектора переменных. Поэтому использование шагов по времени позволяет вычислить собственные значения $\boldsymbol{\lambda}$ якобиана $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}$ для определения устойчивости найденных стационарных решений $\boldsymbol{\theta}^*$ и в том случае, когда функция $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$ недоступна в явном виде.

При использовании простейшего метода численного решения задачи Коши для системы ОДУ – явного метода Эйлера с постоянным шагом по времени $h > 0$ – динамический решатель определяется следующими уравнениями:

$$\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}_i + h\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_i), \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}_0, \tau) = \boldsymbol{\theta}_{n+1}, \tag{21}$$

где $i = 0, 1, \ldots, n$, $\tau = h(n + 1)$. Для поиска значений $\boldsymbol{\theta}^*$ исходная система уравнений (17) заменяется следующей:

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}_0, \tau) = \mathbf{0}. \tag{22}$$

Если $\tau = h$, то уравнение (22) примет вид $\tau\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_0) = \mathbf{0}$, т.е. оно становится эквивалентным исходному уравнению (17). С увеличением τ уравнение (22) по-прежнему содержит все решения уравнения (17), но спектральные свойства матриц Якоби $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}$ и $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\Psi}}$ становятся различными. Шаг по времени h следует выбирать из соображений устойчивости численного метода решения задачи Коши для системы ОДУ. В случае явного метода Эйлера можно использовать $h \le |\lambda_{\max}|^{-1}$, где $\lambda_{\max}$ – максимальное по модулю собственное значение матрицы $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}$. Если метод устойчив, то ошибки интегрирования оказывают слабое влияния на результат решения системы (22), а уменьшение шага h приводит лишь к увеличению вычислительных затрат. Точность вычисления значения $\boldsymbol{\theta}^*$ определяется невязкой, вычисляемой при сходимости итерационного метода решения системы нелинейных уравнений (22).

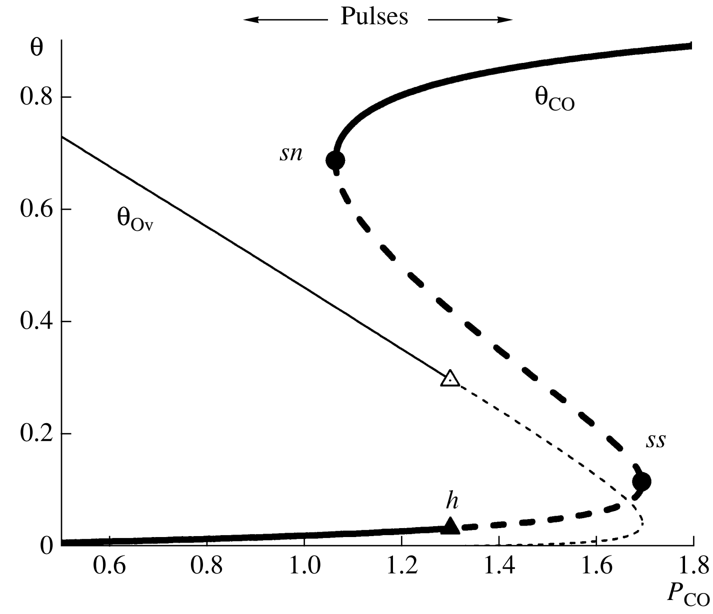
На первый взгляд, непосредственное решение исходных уравнений вида (17) (в нашем случае это система (5)) представляется более простой задачей с вычислительной точки зрения, чем интегрирование по времени системы ОДУ и решение уравнений (22). Однако оказывается, что при расчетах задач большой размерности по методу NK-GMRES ситуация кардинально меняется. Соотношения (19) показывают, что спектры собственных значений матриц Якоби $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}$ и $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\Psi}}$ могут сильно различаться. Легко убедиться в том, что если вещественные части всех λ_i отрицательны (устойчивое решение), то число обусловленности матрицы $\mathbf{J}_{\boldsymbol{\Psi}}$ с ростом τ значительно уменьшается. Как было отмечено в [9], с увеличением τ собственные значения μ_i приближаются к значению 1, а это приводит к увеличению скорости сходимости алгоритма GMRES. Отметим, что соотношения (19) выполняются с хорошей точностью только в случае $h \ll \tau$.

В настоящей работе в качестве динамического решателя использовался явный метод Эйлера. Было изучено, как изменение величины τ влияет на вычислительные затраты, необходимые для продолжения по параметру автомодельных решений в виде уединенного бегущего импульса для трех уравнений типа реакция–диффузия.

Рассматриваемая нами задача продолжения по параметру решений уравнений (3), (4) сводится к решению системы N нелинейных алгебраических уравнений на сетке из M узлов, где $N = 3M + 2$. Первые $3M$ уравнений имеют вид (22) и получены по схеме (20), (21), где нелинейная функция $\mathbf{F}$ определена уравнениями (5). К уравнениям (22) добавляется два линейных уравнения (6) и (13). Подчеркнем, что эти линейные уравнения не включены в схему (20), (21), они добавляются в решаемую систему без изменений. Первое из них фиксирует положение импульса в пространстве. Второе относится к алгоритму продолжения решения системы алгебраических уравнений по параметру. Вектор неизвестных $\mathbf{z}$ в рассматриваемой системе нелинейных уравнений состоит из концентраций адсорбированных частиц в узлах сетки $\boldsymbol{\theta}$, скорости бегущего импульса v, а также значения давления молекул CO в газовой фазе P_{CO}:

$$\mathbf{z} = [\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,M}, \theta_{2,1}, \ldots, \theta_{2,M}, \theta_{3,1}, \ldots, \theta_{3,M}, v, P_{CO}]^{\mathrm{T}}.$$

Полученная таким образом система N нелинейных уравнений решалась методом NK-GMRES(200) в рамках алгоритма продолжения решений по параметру и строились зависимости скорости распространения импульса от значения P_{CO}. Кроме того, для выяснения вопроса об асимптотической устойчивости найденных решений определялись 10 наибольших собственных значений якобиана системы (5).



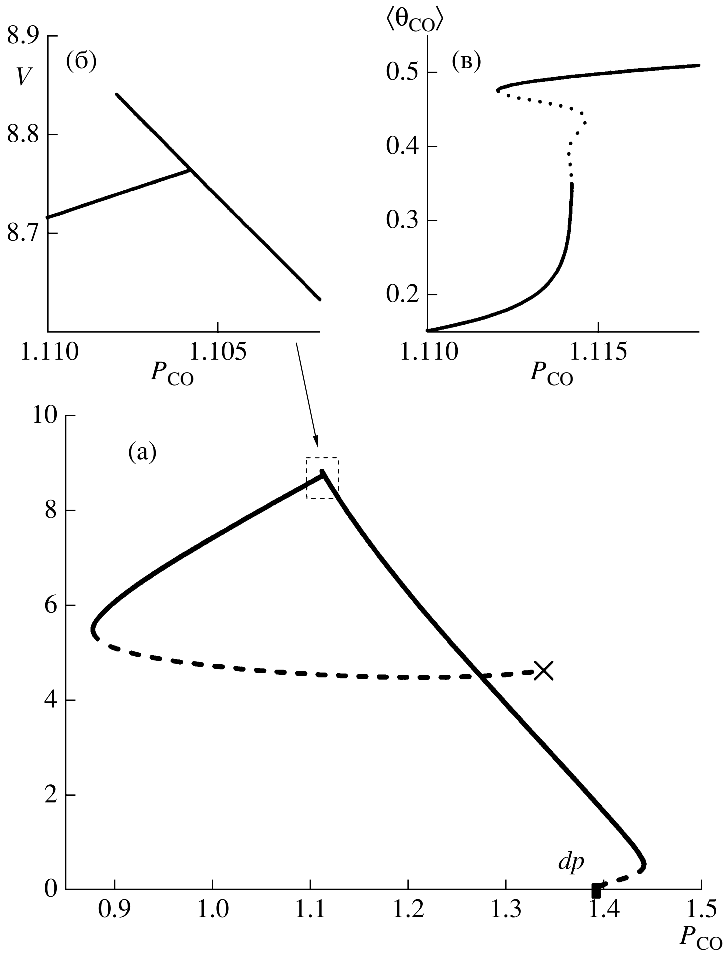
Фиг. 1.

При расчетах использовались следующие значения безразмерных параметров модели: $k_1 = 1$, $k_{-1} = 0.2$, $k_2P_{O_2} = 0.5$, $k_3 = 250$, $k_4 = 0.03$, $k_5 = 0.02$. При рассмотрении одномерной сетки из $M = 3000$ узлов нормированные коэффициенты диффузии были равны $d_1/(\Delta\xi)^2 = 100$, $d_2 = d_3 = d_1/100$; для сетки из $M = 800$ узлов $d_1/(\Delta\xi)^2 = 10$, $d_2 = d_3 = d_1/100$. Для шагов по методу Эйлера использовалось фиксированное значение $h = 0.002$. В качестве начального приближения брались профиль и скорость сформировавшейся уединенной волны, полученные при численном интегрировании нестационарной задачи (1) при $P_{CO} = 1$. При $M = 3000$ значение θ_{CO} фиксировалось в узле с номером $q = 2792$. Каждое найденное решение $\boldsymbol{\theta}^*$ подставлялось в исходные уравнения (5) для оценки погрешности; проверка показала, что всегда выполнялись неравенства $\|\mathbf{F}\|_2 < 10^{-8}$, $\|\mathbf{F}\|_\infty < 10^{-7}$. Такой контроль необходим для того, чтобы исключить появление “посторонних” решений системы уравнений (22), которые не являются решениями исходной системы (5).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На фиг. 1 представлена бифуркационная диаграмма для пространственно однородных решений. Диаграмма получена стандартным методом продолжения по параметру решений системы из трех нелинейных уравнений с использованием обычного метода Ньютона. Показаны концентрации θ_{CO} и θ_{Ov}. Обратим внимание на наличие двух точек поворота (*sn* и *ss*) и, соответственно, области множественности стационарных решений. Исследования показали, что реакционная система $CO + O_2$ может представлять собой возбудимую среду. В верхней части рисунка отмечена область, где существуют устойчивые решения в виде уединенных бегущих импульсов.

На фиг. 2а приведен основной результат применения метода продолжения по параметру для исследования решений автомодельной задачи. Скорость уединенного бегущего импульса изображена как функция давления P_{CO}. Расчеты проводились на сетке, содержащей 3000 узлов. Таким образом, метод NK-GMRES использовался для решения системы, состоящей из 9002 нелинейных уравнений. Для обеспечения сходимости метода проводилась предварительная обработка задачи, состоящая в интегрировании по времени системы из 9000 уравнений с помощью явного метода Эйлера. Кроме того, для выяснения вопроса об устойчивости найденных решений определялись 10 наибольших собственных значений якобиана $\mathbf{J_F}$, в нашем случае – матрицы размерности 9000×9000, с помощью стандартной программы eigs.m с учетом ленточной структуры этой матрицы. Устойчивые решения показаны на фиг. 2 (и на фиг. 1) сплошной линией, неустойчивые – штриховой. При $P_{CO} \approx 0.88$ и $P_{CO} \approx 1.44$ можно видеть точки поворота. В них происходит сме-



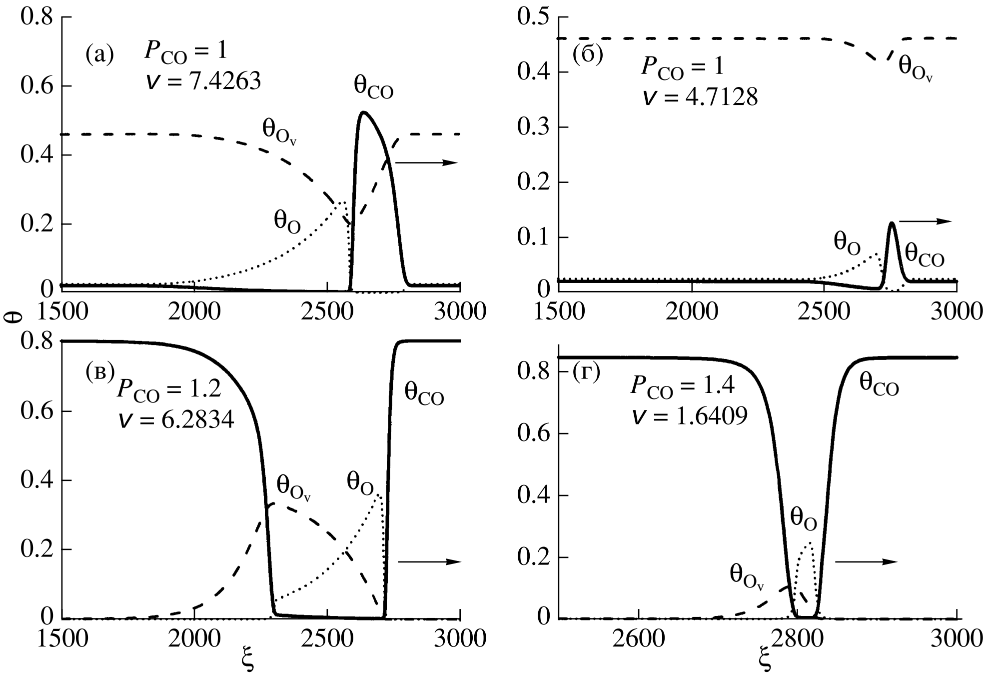
Фиг. 2.

на знака одного наибольшего вещественного собственного значения матрицы $\mathbf{J_F}$. Появление положительного собственного значения свидетельствует о возникновении неустойчивости решения.

Примеры характерных решений (пространственных распределений концентраций CO, O и O_v) в виде уединенных бегущих импульсов представлены на фиг. 3а–г. Обнаружено два основных типа устойчивых уединенных импульсов.

Импульсы 1-го типа, изображенные на фиг. 3а–г, возникают при относительно малых значениях бифуркационного параметра. Импульс движется на фоне с преимущественным покрытием катализатора подповерхностным кислородом (O_v). Такое пространственно однородное состояние представляет собой возбудимую среду и является единственным положением равновесия при низких значениях P_{CO}. Головная часть импульса состоит из области, заполненной преимущественно молекулами CO (см. фиг. 3а). Затем происходит резкое уменьшение локальной концентрации θ_{CO} и увеличение θ_O. Высокие концентрации CO и O не наблюдаются одновременно ни в одной области пространства из-за достаточно высокой скорости реакции CO + O на поверхности. "Хвост" бегущего импульса состоит из медленно уменьшающейся (увеличивающейся) концентрации поверхностного (подповерхностного) кислорода. Заметим, что такой тип импульсов существует и в области множественности пространственно однородных решений.

Продолжение по параметру показало, что с ростом P_{CO} в системе появляется и 2-й тип устойчивых импульсов. В этом случае (см. фиг. 3в) возбудимое однородное состояние представлено областью с высокой концентрацией CO, а бегущий импульс состоит из области, заполненной поверхностным и подповерхностным кислородом. Дальнейшее увеличение P_{CO} приводит к сужению области, покрытой кислородом, как показано на фиг. 3г. Отметим, что при расчете динамической задачи решения 2-го типа не были нами найдены.

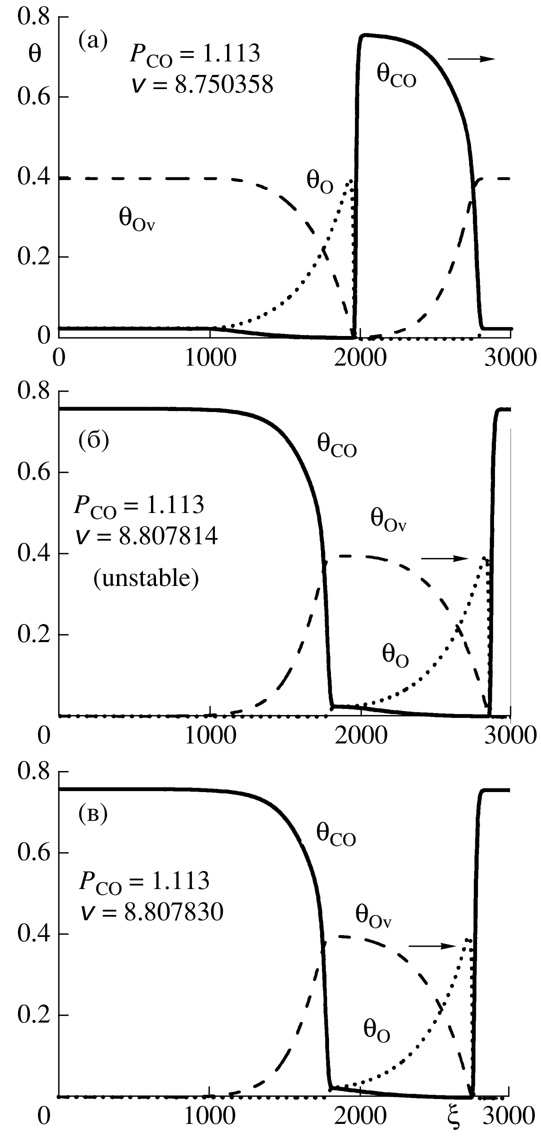


Фиг. 3.

Переход от устойчивых импульсов 1-го типа к импульсам 2-го типа проиллюстрирован в увеличенном масштабе на верхних вставках фиг. 2. На фиг. 2б представлена зависимость $v(P_{CO})$, а на фиг. 2в – зависимость средней концентрации CO на фрагменте $\langle\theta_{CO}\rangle$ от P_{CO}. Из фиг. 2в видно, что переход от импульсов первого типа к импульсам 2-го типа осуществляется посредством нескольких бифуркаций (точек поворота). В частности, при $P_{CO} = 1.113$ существует три различных решения в виде уединенного бегущего импульса. Эти решения представлены на фиг. 4а–в. Одно из них – неустойчивое (фиг. 4б), а два других являются устойчивыми импульсами 1-го (фиг. 4а) и 2-го типа (фиг. 4в). Неустойчивый импульс аналогичен импульсу 2-го типа, имеет практически ту же скорость распространения и передний фронт, однако профиль неустойчивого импульса несколько шире профиля устойчивого. Поскольку все три рассматриваемых импульса имеют близкие скорости распространения, переход от импульсов 1-го типа к импульсам 2-го типа на плоскости (P_{CO}, v) не виден.

Следует отметить, что профили бегущих импульсов, представленные на фиг. 4б и в, для наглядности сдвинуты на 500 узлов так, чтобы на левой и правой границе фрагмента решение было однородным. Напомним, что мы используем периодические граничные условия, поэтому такой сдвиг, по существу, не изменяет решение. Важно, что существует достаточно широкая область пространства, где решение является однородным (фоном) с высокой степенью точности. В этом случае полученное неоднородное решение, включающее в себя область с однородным решением, есть уединенная локализованная структура, такая, например, как уединенный бегущий импульс. Это свойство дает близкое к нулю собственное значение у якобиана системы, вычисленное на решении.

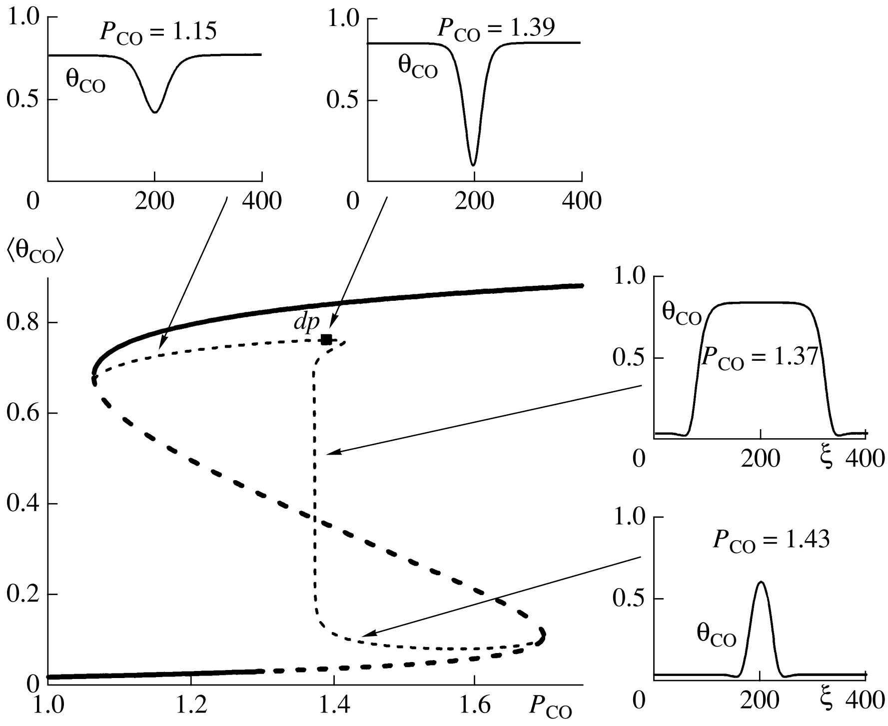
Рассмотрим ветвь неустойчивых решений, существующих в широком диапазоне значений P_{CO} при $v \approx 5$. Здесь с ростом P_{CO} в хвостовой части импульса возникают затухающие колебания; по мере увеличения значений параметра растет и их амплитуда. При $P_{CO} \approx 1.33$ ветвь неустойчивого решения на фиг. 2 визуально "прерывается" в точке, отмеченной крестиком. На самом деле эта точка является точкой поворота. Здесь происходит смена знака одного вещественного собственного значения. Однако до и после поворота локализованное решение имеет одну и ту же скорость распространения. В этой точке появляется так называемое "связанное состояние" (bound state, см. [20]) из двух бегущих импульсов. В нашем случае связанное состояние является неустойчивым решением и в настоящей работе не рассматривается.



Фиг. 4.

Для устойчивого импульса 2-го типа с ростом P_{CO} наблюдается значительное уменьшение его размеров и скорости распространения. При $P_{CO} \approx 1.44$ достигается точка поворота и возникает неустойчивое решение, которое приводит к стационарному ($v = 0$) локализованному решению. Бифуркация возникновения бегущего импульса из неподвижного локализованного решения обозначена через *dp* (drift pitchfork, см. [13]). Бифуркация типа "вилки" означает, что из одного симметричного неподвижного решения дополнительно возникают два несимметричных решения, одно из которых распространяется слева направо ($v > 0$), а другое – справа налево ($v < 0$). Пример продолжения по параметру симметричного неподвижного решения представлен на фиг. 5. На этом рисунке представлены пространственно однородное решение (жирная линия), а также симметричная локализованная структура в виде одного неподвижного импульса, среднее значение концентрации CO для которого показаны пунктирной линией, а характерные пространственные профили $θ_{CO}$ представлены на вставках. Отметим, что стационарные локализованные структуры являются неустойчивыми решениями.

Таким образом, продолжение по параметру P_{CO} дает следующий сценарий появления локализованных неоднородных решений. Вблизи неустойчивого пространственно однородного стационарного состояния в мягком режиме ответвляется неустойчивое решение в виде стационарной



Фиг. 5.

локализованной структуры. С изменением параметра P_{CO} амплитуда структуры растет, и при некотором значении P_{CO} в точке dp происходит ответвление неустойчивого решения в виде уединенного бегущего импульса. Дальнейшее изменение параметра приводит к появлению устойчивого решения в виде уединенного бегущего импульса. Было выделено два типа таких решений, причем существует диапазон значений параметра, где существуют решения обоих типов.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАТРАТЫ

Рассмотрим результаты расчетов, используя различные значения τ – времени интегрирования с помощью явного метода Эйлера. Расчеты проводились на персональном компьютере Pentium-4 с процессором Intel-3.2 ГГц. Собственные значения матрицы Якоби не вычислялись. Абсолютная погрешность δ метода NK-GMRES выбиралась в зависимости от значения τ по формуле $\delta\tau < 10^{-6}$, что давало характерную величину погрешности $|\max(G_i)| < 10^{-7}$. Такой выбор δ позволяет поддерживать приблизительно одинаковую точность вычисления стационарных решений при различных τ.

Продолжение по параметру $p = P_{CO}$ осуществлялось, начиная с устойчивого решения при начальном значении $p_0 = 1.1$, в сторону первоначального уменьшения p ($p_1 = p_0 - 10^{-4}$) до неустойчивого решения при $p = 1.2$. Как можно видеть на фиг. 2, для этого диапазона значений p алгоритм продолжения по параметру проходит точку поворота слева на зависимости $V(p)$. При расчетах определялись следующие показатели вычислительной сложности алгоритма: N_{FC} – общее число вызовов функции вычисления правых частей $\mathbf{G}$; N_p – общее количество точек по параметру p; N_{GMRES} – общее количество итераций алгоритма GMRES(200); CPU – время счета [сек]. Эти значения приведены в табл. 1 и 2 для двух значений числа узлов сетки по пространству: $M = 3000$ и $M = 800$ соответственно.

Если используется подробная сетка по пространству и метод NK-GMRES применяется для решения системы из 9002 уравнений, то наименьшее время счета (CPU) достигается при $\tau = 0.06$ (см. табл. 1). Для этого “оптимального” значения τ на каждой итерации алгоритма GMRES осуществляется $\tau/h = 30$ шагов по времени и, соответственно, вычислений функции $\mathbf{G}$. Из таблицы видно, что с уменьшением τ увеличивается общее число вызовов функции вычисления правых

Таблица 1

τ	N_{FC}	N_{GMRES}	CPU [сек]	N_p
0.01	12550305	2495761	14938	377
0.03	6097275	403643	3816	134
0.04	5923400	293952	3045	120
0.06	7524600	248850	**2604**	120
0.08	8514360	211082	2607	120
0.1	11292350	223975	3200	126
0.2	13648300	135053	3196	127
0.5	15664500	61620	3212	117
1.0	16066000	31239	3144	114
2.0	18904000	18040	3695	113

Таблица 2

τ	N_{FC}	N_{GMRES}	CPU [сек]	N_p
0.002	1023027	1016894	1540	161
0.004	1345196	668231	966	150
0.008	1511992	375223	563	131
0.01	1465525	290825	448	121
0.02	1967430	195000	345	118
0.04	2679480	132548	**295**	118
0.05	3213775	127156	315	118
0.10	4593500	90669	335	117
0.20	6171800	60606	373	119
0.40	7230200	35280	400	101
1.0	11461500	22105	603	101

частей (N_{FC}) из-за увеличения общего количества итераций алгоритма GMRES (N_{GMRES}). При увеличении τ от значения 0.04 до 1 общее количество внутренних итераций алгоритма GMRES уменьшается почти в 10 раз, зато количество вызовов функции $\mathbf{G}$ увеличивается почти в 3 раза. При этом общее время счета практически не изменяется. При $\tau < 0.03$ значительно уменьшается шаг метода продолжения по параметру из-за плохой сходимости итераций GMRES. При еще меньших значениях τ ($\tau < 0.01$) итерации не сходятся и продолжение по параметру становится невозможным.

Для более грубой сетки (800 узлов, 2402 уравнения) оптимальное значение τ равно 0.04, что немного меньше, чем в предыдущем случае. При этом характерное время счета уменьшается приблизительно в 9 раз. В отличие от случая использования подробной сетки, алгоритм NK-GMRES позволяет получить решение и без шагов по времени (при $\tau = h$). При этом, однако, сходимость алгоритма NK-GMRES сильно ухудшается, из-за чего уменьшается шаг алгоритма продолжения по параметру. При $\tau = h$ построить зависимость $V(p)$ (см. фиг. 2) полностью не представляется возможным, так как продолжение по параметру прерывается в верхней части зависимости $V(p)$, где наблюдается целый каскад бифуркаций. Отметим, что расчеты на сетке из 800 узлов позволяют, в принципе, воспроизвести зависимость $V(p)$, представленную на фиг. 2 для 3000 узлов. Наиболее существенные отличия наблюдаются в области точек поворота, а также при переходе от бегущего импульса к стационарному.

Если бы для решения линейной системы на каждой ньютоновской итерации применялся прямой метод исключения Гаусса, то вычислительные затраты были бы пропорциональны N^3. Это делает прямой метод практически непригодным для расчетов. Решать уравнения (5) методом NK-GMRES без использования динамического решателя (т.е. при $\tau = h$) также практически невозможно из-за плохой сходимости итераций GMRES. Предобработка с помощью шагов по времени позволяет значительно сократить вычислительные затраты. При этом существует некоторое оптимальное значение τ, которое зависит, в частности, от числа уравнений решаемой системы, а также от максимального числа итераций m алгоритма GMRES(m).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известно, что preconditioning часто является необходимым условием для успешного применения алгоритма GMRES. При решении системы уравнений вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ предварительная обработка обычно означает домножение матрицы $\mathbf{A}$ слева или справа на некоторую матрицу $\mathbf{P}^{-1}$. При этом предполагается, что матрица $\mathbf{AP}^{-1}$ или $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$ лучше, чем $\mathbf{A}$, с точки зрения применения итерационных методов решения СЛАУ. Выбор "хорошей" матрицы $\mathbf{P}$ становится трудной и неоднозначной задачей. В настоящее время наиболее хорошо себя зарекомендовавшим методом построения матрицы $\mathbf{P}^{-1}$ является неполная LU-факторизация (iLU) матрицы $\mathbf{A}$. Однако этот подход требует явного задания всех элементов матрицы $\mathbf{A}$, поэтому он становится непригодным для безматричного варианта метода NK-GMRES.

Изложенный в настоящей работе подход, основанный на интегрировании по времени на коротком интервале, является достаточно универсальным способом предварительной обработки перед применением безматричного итерационного алгоритма NK-GMRES. Следует только подобрать шаг по времени h и интервал τ. Для оценки нужного значения h можно использовать степенной метод вычисления максимального (по модулю) собственного значения матрицы. Этот метод является безматричным, так как он оперирует лишь результатом умножения матрицы на вектор. Поскольку большой точности вычисления $\lambda_{\max}$ не требуется, то можно сделать лишь небольшое число итераций (от 10 до 50) для определения приемлемого значения h. На каждой итерации степенного метода требуется вычислить значения нелинейной функции $\mathbf{G}$ и использовать формулу (15). Кроме того, в рамках алгоритма продолжения по параметру не следует ожидать быстрого изменения величины $\lambda_{\max}$ при изменении значения бифуркационного параметра. Поэтому вычисление $\lambda_{\max}$ и h можно осуществлять лишь изредка. В нашем случае оказывается, что $\lambda_{\max}$ слабо зависит от P_{CO}, и мы использовали фиксированное значение h.

Что касается выбора значения τ, то его "оптимальное" значение зависит от многих факторов, поэтому его следует подбирать эмпирическим путем. Обычно требуется выполнить от 10 до 100 шагов по времени, чтобы добиться значительного увеличения скорости сходимости алгоритма NK-GMRES. Выбор τ также связан с выбором значения m в алгоритме GMRES(m). Если наблюдается плохая сходимость алгоритма GMRES(m), то следует попытаться увеличить m и/или τ.

Важно отметить, что непосредственное применение алгоритма NK-GMRES без шагов по времени оказалось практически непригодным для решения поставленной задачи.

Рассмотренный нами общий "безматричный" алгоритм (продолжение по параметру, шаги по времени, NK-GMRES) показал свою высокую эффективность и позволил детально изучить зависимость локализованных решений от значений параметра P_{CO} в одномерной модели реакции $CO + O_2$ с учетом образования подповерхностного кислорода. Аналогичные с точки зрения математической постановки стационарные задачи большой размерности возникают во многих областях физики и химии. На наш взгляд, безматричные алгоритмы позволяют значительно расширить возможности методов продолжения по параметру и применить их для исследования задач очень большой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Yu.A.* MATCONT: A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs // ACM Trans. Math. Software. 2003. V. 29. № 2. P. 141–164.
2. *Saad Y., Schultz M.H.* GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving non-symetric linear systems // Res. Rep. YALEU/DCS/RR254, August 24, 1983; SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1986. V. 7. № 3. P. 856–869.
3. *Gear C.W., Saad Y.* Iterative solution of linear equations in ode codes // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1983. V. 4. № 4. P. 583–601.
4. *Wigton L.B., Yu N.J., Young D.P.* GMRES acceleration of computational fluid dynamics codes // Proc. 7th AIAA CFD Conf. 1985. P. 67–74.
5. *Brown P.N., Hindmarsh A.C.* Matrix-free methods for stiff systems of ode's // SIAM J. Numer. Analys. 1986. V. 2. № 3. P. 610–638.

6. *Brown P.N., Saad Y.* Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1990. V. 11. № 3. P. 450–481.
7. *Knoll D.A., Keyes D.E.* Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications // J. Comput. Phys. 2004. V. 193. № 2. P. 357–397.
8. *Tuckerman L., Barkley D.* Bifurcation analysis for timesteppers // Numer. Meth. for Bifurcation Problems and Large-Scale Dynamical Systems. New York: Springer, 2000. P. 453–566.
9. *Kelley C.T., Kevrekidis I.G., Qiao L.* Newton–Krylov solvers for timesteppers: arxiv.org/pdf/math.DS/0404374.
10. *Kelley C.T.* Solving nonlinear equations with Newton's method. Philadelphia: SIAM, 2003.
11. *Kurkina E.S., Semendyaeva N.L.* Fluctuation-induced transitions and oscillations in catalytic CO oxidation: Monte Carlo simulations // Surface. Sci. 2004. V. 558. № 1–3. P. 122–134.
12. *Куркина Е.С., Семендяева Н.Л.* Исследование колебательных режимов в стохастической модели в гетерогенной каталитической реакции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. № 10. С. 1808–1823.
13. *Kness M., Tuckerman L.S., Barkley D.* Symmetry-breaking bifurcations in one-dimensional excitable media // Phys. Rev. A. 1992. V. 46. № 8. P. 5054–5062.
14. *Keller H.B.* Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems // Applic. Bifurcation Theory. New York: Acad. Press, 1977. P. 359–384.
15. *Seydel R.* Tutorial on continuation // Internat. J. Bifurcation. Chaos. 1991. V. 1. № 1. P. 3–11.
16. *Dembo R.S., Eisenstat S.C., Steihaug T.* Inexact Newton methods // SIAM J. Numer. Analis. 1982. V. 19. № 2. P. 400–408.
17. *Eisenstat S.C., Walker H.E.* Choosing the forcing terms in an inexact newton method // SIAM J. Sci. Comput. 1996. V. 17. № 1. P. 16–32.
18. *Makeev A.G., Maroudas D., Kevrekidis I.G.* "Coarse" stability and bifurcation analysis using stochastic simulators: kinetic Monte Carlo examples // J. Chem. Phys. 2002. V. 116. № 23. P. 10083–10091.
19. *Makeev A.G., Maroudas D., Panagiotopoulos A.Z., Kevrekidis I.G.* Coarse bifurcation analysis of kinetic Monte Carlo simulations: a lattice-gas model with lateral interactions // J. Chem. Phys. 2002. V. 117. № 18. P. 8229–8240.
20. *Or-Guil M., Kevrekidis I.G., Bär M.* Stable bound states of pulses in an excitable medium // Physica D. 2000. V. 135. № 1–2. P. 154–174.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 662–670

УДК 519.63

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

© 2009 г. П. А. Чубенко

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т)

e-mail: chubenko@inbox.ru

Поступила в редакцию 16.05.2008 г.

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного уравнения пятого порядка, описывающего динамику жидкости Кельвина–Фойгта при учете сильной пространственной дисперсии и наличии источников с кубической нелинейностью. Доказывается локальная теорема о существовании решения. При помощи метода энергетических неравенств выводятся достаточные условия разрушения решения за конечный промежуток времени. Библ. 11.

Ключевые слова: жидкость Кельвина–Фойгта, уравнения типа Соболева, сильное обобщенное решение, метод сжимающих отображений, метод дифференциальных неравенств, разрушение решения.

1 ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение, рассматриваемое в настоящей работе, проистекает из одной конкретной ε-аппроксимации уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта [1], [2]) (уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта со штрафом). Уравнения жидкостей Кельвина–Фойгта имеют вид

$$\mathbf{v}_t - \kappa\Delta\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + v_k\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_k} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$ – вектор скорости, $p = p(x, t)$ – давление, $\nu > 0$ – кинетический коэффициент вязкости, $\kappa > 0$ – время ретардации, характеризующее упругие свойства жидкости Кельвина–Фойгта, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, t)$ – вектор объемных внешних сил.

ε-Аппроксимация данных уравнений (см. [3]–[5]) представляет собой псевдопараболическую квазилинейную систему вида

$$\mathbf{v}_t^\varepsilon - \kappa L_\varepsilon\mathbf{v}_t^\varepsilon - \nu L^\varepsilon\mathbf{v}^\varepsilon + M^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) = \mathbf{f}, \tag{1}$$

в которой введены обозначения

$$L^\varepsilon \equiv \Delta + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\operatorname{div}, \quad M^\varepsilon(\mathbf{v}) \equiv v_k\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Будем предполагать, что внешние объемные силы отсутствуют. При этом рассмотрим случай, когда дополнительно имеет место сильная пространственная дисперсия, а также присутствуют источники с кубической нелинейностью. Эти два явления учитываются введением в уравнение (1) двух слагаемых (с некоторыми положительными коэффициентами) вида, соответственно, $(\Delta^2\mathbf{v}^\varepsilon)_t$ и $-|\mathbf{v}^\varepsilon|^2\mathbf{v}^\varepsilon$. Поскольку с учетом сильной пространственной дисперсии уравнение приобретает четвертый порядок по пространственным переменным, при постановке задачи в ограниченной области зададим одновременно однородные граничные условия I и II рода для каждой проекции скорости $\mathbf{v}^\varepsilon$. В качестве начального условия поставим условие Коши $\mathbf{v}^\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{v}_0$.

Таким образом, после перехода к безразмерным переменным, придем к следующей начально-краевой задаче относительно вектор-функции $\mathbf{u} \equiv \{u_1, \ldots, u_N\}$ с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta^2\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} + \nabla(\nabla, \mathbf{u}) - \mathbf{u}) + \Delta\mathbf{u} + \nabla(\nabla, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}(\nabla, \mathbf{u}) + |\mathbf{u}|^2\mathbf{u} = 0,$$
$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \tag{2}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega \in \mathbb{R}^N$, $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ СИЛЬНОГО ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

Определение. Сильным обобщенным решением задачи (2) называется решение класса $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T); \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega))$, удовлетворяющее условиям

$$\langle D(\mathbf{u}), \mathbf{w}\rangle_2 = 0 \quad \forall\mathbf{w} \in \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega), \quad \forall t \in [0, T_0), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega),$$

где $D(\mathbf{u}) \equiv \frac{\partial}{\partial t}(-\Delta^2\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} + \nabla(\nabla, \mathbf{u}) - \mathbf{u}) + \Delta\mathbf{u} + \nabla(\nabla, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}(\nabla, \mathbf{u}) + |\mathbf{u}|^2\mathbf{u}$.

Под $\vec{\mathbb{H}}^p(\Omega)$ будем понимать декартово произведение $\mathbb{H}^p(\Omega) \times \ldots \times \mathbb{H}^p(\Omega)$ (n раз) гильбертовых пространств, а через $\langle\cdot, \cdot\rangle_p$ обозначать скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\vec{\mathbb{H}}_0^p(\Omega)$ и $\vec{\mathbb{H}}^{-p}(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* $N = 1, 2, 3$. *Тогда* $\forall\mathbf{u}_0 \in \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega)$ *найдется такое* $T_0 = T_0(\mathbf{u}_0) > 0$, *что существует сильное обобщенное решение задачи* (2) *класса* $\mathbb{C}^{(1)}([0, T_0); \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega))$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в последнем случае выполнено предельное равенство*

$$\varlimsup_{t \uparrow T_0}\|\Delta\mathbf{u}\|_2 = +\infty.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$A_0\mathbf{u} \equiv \Delta^2\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u} - \nabla(\nabla, \mathbf{u}) + \mathbf{u}\colon \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega) \longrightarrow \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega),$$

$$L\mathbf{u} \equiv -\Delta\mathbf{u} - \nabla(\nabla, \mathbf{u})\colon \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega) \subset \vec{\mathbb{H}}_0^1(\Omega) \longrightarrow \vec{\mathbb{H}}^{-1}(\Omega) \subset \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega),$$

$$Q(\mathbf{u}) \equiv -(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{u}(\nabla, \mathbf{u})\colon \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega) \subset \vec{\mathbb{H}}_0^1(\Omega) \longrightarrow \vec{\mathbb{L}}^1(\Omega) \subset \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega),$$

$$F(\mathbf{u}) \equiv |\mathbf{u}|^2\mathbf{u}\colon \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega) \subset \vec{\mathbb{L}}^4(\Omega) \longrightarrow \vec{\mathbb{L}}^{4/3}(\Omega) \subset \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega),$$

$$G(\mathbf{u}) \equiv F(\mathbf{u}) - L\mathbf{u} - Q(\mathbf{u})\colon \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega) \longrightarrow \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega),$$

где через $\vec{\mathbb{L}}^p(\Omega)$ обозначено декартово произведение $\mathbb{L}^p(\Omega) \times \ldots \times \mathbb{L}^p(\Omega)$ (n раз) лебеговых пространств. Обозначим также через $\|\cdot\|_{+2}$ норму гильбертова пространства $\vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega)$, а через $\|\cdot\|_{-2}$ – норму пространства $\vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)$. С учетом введенных обозначений задача (2) принимает вид

$$\frac{d}{dt}A_0\mathbf{u} = G(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \mathbb{H}_0^2(\Omega). \tag{3}$$

Для оператора A_0 справедливо равенство

$$\langle A_0\mathbf{u}_1 - A_0\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\rangle_2 = \sum_i \|\Delta u_{1i} - \Delta u_{2i}\|_2^2 + \sum_i \|\nabla u_{1i} - \nabla u_{2i}\|_2^2 +$$
$$+ \|\operatorname{div}\mathbf{u}_1 - \operatorname{div}\mathbf{u}_2\|_2^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_2^2 \geqslant \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{+2}.$$

Такой оператор, согласно теореме Браудера и Минти (см. [6]), действует на все пространство $\mathbb{H}^{-2}(\Omega)$. Поэтому, как легко видеть, существует липшиц-непрерывный оператор A_0^{-1}, обратный к A_0, с постоянной Липшица, равной единице.

Рассмотрим теперь оператор $G(\mathbf{u})$. Справедливо следующее неравенство:

$$\|G(\mathbf{v}_1) - G(\mathbf{v}_2)\|_{-2} \leqslant \|L(\mathbf{v}_1) - L(\mathbf{v}_2)\|_{-2} + \|Q(\mathbf{v}_1) - Q(\mathbf{v}_2)\|_{-2} + \|F(\mathbf{v}_1) - F(\mathbf{v}_2)\|_{-2}. \tag{4}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (4). Ниже для упрощения записей будем обозначать через $\mathscr{C}$ различные константы. Очевидно (в силу теорем вложения Соболева), имеем

$$\|L(\mathbf{v}_1) - L(\mathbf{v}_2)\|_{-2} \leqslant \mathscr{C}(\|\Delta\mathbf{v}_1 - \Delta\mathbf{v}_2\|_2 + \|\nabla(\nabla, \mathbf{v}_1) - \nabla(\nabla, \mathbf{v}_2)\|_2) \leqslant \mathscr{C}\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{+2}. \tag{5}$$

Далее,

$$\|Q(\mathbf{v}_1) - Q(\mathbf{v}_2)\|_{-2} \leqslant \|(\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2, \nabla)\mathbf{v}_2\|_{-2} + \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_1(\nabla, \mathbf{v}_1) - \mathbf{v}_2(\nabla, \mathbf{v}_2)\|_{-2}.$$

Поскольку справедливы цепочки неравенств

$$\begin{gathered}
\|(\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2, \nabla)\mathbf{v}_2\|_{-2} \leqslant \|(\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_2\|_{-2} + \|(\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2, \nabla)\mathbf{v}_2\|_{-2},\\
\|(\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_2\|_{-2} \leqslant \left\|\sum_{i,j=1}^N v_{1i}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_{1j} - v_{2j})\mathbf{e}_j\right\|_{-2} \leqslant \mathscr{C}\sum_{i,j=1}^N \left\|v_{1i}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_{1j} - v_{2j})\right\|_1 \leqslant\\
\leqslant \mathscr{C}\sum_{i,j=1}^N \|v_{1i}\|_2\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(v_{1j} - v_{2j})\right\|_2 \leqslant \mathscr{C}\|\mathbf{v}_1\|_{+2}\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{+2},\\
\|(\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2, \nabla)\mathbf{v}_2\|_{-2} \leqslant \left\|\sum_{i,j=1}^N (v_{1i} - v_{2i})\frac{\partial}{\partial x_i}v_{2j}\mathbf{e}_j\right\|_{-2} \leqslant \mathscr{C}\sum_{i,j=1}^N \left\|(v_{1i} - v_{2i})\frac{\partial}{\partial x_i}v_{2j}\right\|_1 \leqslant\\
\leqslant \mathscr{C}\sum_{i,j=1}^N \|v_{1i} - v_{2i}\|_2\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}v_{2j}\right\|_2 \leqslant \mathscr{C}\|\mathbf{v}_2\|_{+2}\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{+2},
\end{gathered} \tag{6}$$

то имеет место оценка

$$\|(\mathbf{v}_1, \nabla)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2, \nabla)\mathbf{v}_2\|_{-2} \leqslant \mathscr{C}\max\{\|\mathbf{v}_1\|_{+2}, \|\mathbf{v}_2\|_{+2}\}\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{+2}.$$

Аналогичная оценка справедлива и для второго слагаемого в правой части (6). Таким образом, для оператора $Q(\mathbf{u})$ получаем

$$\|Q(\mathbf{v}_1) - Q(\mathbf{v}_2)\|_{-2} \leqslant \mathscr{C}\max\{\|\mathbf{v}_1\|_{+2}, \|\mathbf{v}_2\|_{+2}\}\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{+2}. \tag{7}$$

Наконец, рассмотрим норму $\|F(\mathbf{v}_1) - F(\mathbf{v}_2)\|_{-2}$. Справедливы следующие две оценки:

$$\|F(\mathbf{v}_1) - F(\mathbf{v}_2)\|_{-2} \leqslant \mathscr{C}(\||\mathbf{v}_1|^2\mathbf{v}_1 - |\mathbf{v}_1|^2\mathbf{v}_2\|_{4/3} + \||\mathbf{v}_1|^2\mathbf{v}_2 - |\mathbf{v}_2|^2\mathbf{v}_2\|_{4/3}), \tag{8}$$

$$\|F(\mathbf{v}_1) - F(\mathbf{v}_2)\|_{-2} \leqslant \mathscr{C}(\||\mathbf{v}_2|^2\mathbf{v}_1 - |\mathbf{v}_2|^2\mathbf{v}_2\|_{4/3} + \||\mathbf{v}_1|^2\mathbf{v}_1 - |\mathbf{v}_2|^2\mathbf{v}_1\|_{4/3}). \tag{9}$$

Из (8), (9) с учетом неравенства Гёльдера следует, что

$$\|F(\mathbf{v}_1) - F(\mathbf{v}_2)\|_{-2} \leqslant \mathscr{C}\left[\max\{\|\mathbf{v}_1\|_4^2, \|\mathbf{v}_2\|_4^2\}\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_4 + \left(\int_\Omega \min\{|\mathbf{v}_1|, |\mathbf{v}_2|\}^{4/3}(|\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2)^{4/3}dx\right)^{3/4}\right]. \tag{10}$$

Пусть $|\mathbf{v}_1| \neq 0$, $|\mathbf{v}_2| \neq 0$. Тогда справедлива цепочка неравенств

$$|\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2 \leqslant 2\max\{|\mathbf{v}_1|, |\mathbf{v}_2|\}\big||\mathbf{v}_1| - |\mathbf{v}_2|\big| \leqslant 2\frac{\max\{|\mathbf{v}_1|^2, |\mathbf{v}_2|^2\}}{\min\{|\mathbf{v}_1|, |\mathbf{v}_2|\}}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|.$$

Следовательно, для подынтегрального выражения в (10) имеет место следующая оценка:

$$\min\{|\mathbf{v}_1|, |\mathbf{v}_2|\}^{4/3}(|\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2)^{4/3} \leqslant 2^{4/3}\max\{|\mathbf{v}_1|^2, |\mathbf{v}_2|^2\}^{4/3}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^{4/3}, \tag{11}$$

очевидная в случае, когда либо $|\mathbf{v}_1| = 0$, либо $|\mathbf{v}_2| = 0$. Из (11) и неравенства $\max\{|\mathbf{v}_1|^2, |\mathbf{v}_1|^2\} \leqslant |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2$ будем иметь

$$\begin{gathered}\left(\int\limits_{\Omega}\min\{|\mathbf{v}_1|, |\mathbf{v}_2|\}^{4/3}(|\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2)^{4/3}dx\right)^{3/4} \leqslant 2\big\||\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2\big\|_4^2\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_4 \leqslant \\ \leqslant 8\max\{\|\mathbf{v}_1\|_4^2, \|\mathbf{v}_2\|_4^2\}\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_4.\end{gathered} \tag{12}$$

Из (10) и (12) с учетом теорем вложения Соболева получим для оператора $F(\mathbf{u})$ оценку

$$\|F(\mathbf{v}_1) - F(\mathbf{v}_2)\|_{-2} \leqslant \mathscr{C}\max\{\|\mathbf{v}_1\|_{+2}^2, \|\mathbf{v}_2\|_{+2}^2\}\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{+2}. \tag{13}$$

Неравенства (4), (5), (7), (13) дают общую оценку для оператора $G(\mathbf{u})$:

$$\|G(\mathbf{v}_1) - G(\mathbf{v}_2)\|_{-2} \leqslant \mu(\bar{R})\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{+2}, \quad \mu(\bar{R}) = \mathscr{C}(\bar{R}^2 + \bar{R} + 1), \quad \bar{R} = \max\{\|\mathbf{v}_1\|_{+2}, \|\mathbf{v}_2\|_{+2}\}.$$

Рассмотрим теперь задачу (3). Будем искать $\mathbf{v} = A_0(\mathbf{u})$ в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0, T); \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega))$. Выше было установлено, что для оператора A_0: $\vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega) \longrightarrow \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)$ существует липшиц-непрерывный обратный оператор $A_0^{-1}: \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega) \longrightarrow \vec{\mathbb{H}}_0^2(\Omega)$. Следовательно, $\mathbf{u} = A_0^{-1}(\mathbf{v})$ и задача (3) эквивалентна задаче

$$d\mathbf{v}/dt = G(A_0^{-1}(\mathbf{v})), \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = A_0(\mathbf{u}_0) \in \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega). \tag{14}$$

В классе функций $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T)$: $\vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega))$ приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int\limits_0^t V(\mathbf{v})(s)ds, \quad V(\mathbf{v}) = G(A_0^{-1}(\mathbf{v})). \tag{15}$$

Будем (см. [7]) искать решения интегрального уравнения (15) в классе функций

$$\mathbf{v} \in \mathbb{L}^{\infty}([0, T); \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega))$$

при достаточно малом $T > 0$. Воспользуемся методом сжимающих отображений (см. [8], [9]). С этой целью введем замкнутое, выпуклое, ограниченное подмножество $\mathbb{B}_R$ банахова пространства $\mathbb{L}^{\infty}([0, T); \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega))$:

$$\mathbb{B}_R \equiv \left\{\mathbf{v} \in \mathbb{L}^{\infty}([0, T); \vec{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)): \|\mathbf{v}\|_T \equiv \operatorname*{ess.sup}_{t \in (0, T)}\|\mathbf{v}\|_{-2} \leqslant R\right\}.$$

Докажем, что оператор

$$H(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_0 + \int\limits_0^t V(\mathbf{v})ds$$

действует из $\mathbb{B}_R$ в $\mathbb{B}_R$ и является сжимающим на $\mathbb{B}_R$ при достаточно малом $T > 0$ и достаточно большом $R > 0$.

Итак, пусть $\|\mathbf{v}_0\|_{-2} \leqslant R/2$, тогда имеем

$$\|H(\mathbf{v})\|_T \leqslant R/2 + T\|\mathbf{v}\|_T\mu(R),$$

где $R \geqslant \|\mathbf{v}\|_T$, значит,

$$\|H(\mathbf{v})\|_T \leqslant R$$

при условии $T \leqslant (2\mu(R))^{-1}$. Докажем теперь сжимаемость оператора $H(\mathbf{v})$ на $\mathbb{B}_R$. Действительно, имеем

$$\|H(\mathbf{v}_1) - H(\mathbf{v}_2)\|_T \leqslant T\|Q(\mathbf{v}_1) - Q(\mathbf{v}_2)\|_T \leqslant T\mu(\bar{R})\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_T,$$

$\bar{R} = \max\{\|\mathbf{v}_1\|_T, \|\mathbf{v}_2\|_T\} \leqslant R$. Стало быть, оператор H является сжимающим на $\mathbb{B}_R$ при достаточно большом $R > 0$ и при $T < 1/[2\mu(\bar{R})]$. Значит, существует единственное решение интегрального уравнения (15) класса $\mathbb{L}^\infty([0, T); \overrightarrow{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega))$. Используя стандартный алгоритм продолжения решения интегрального уравнения во времени, получаем, что найдется такое $T_0 > 0$, что либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\mathbf{v}\|_{-2} = +\infty. \tag{16}$$

Отметим теперь, что из явного вида оператора $H(\mathbf{v})$ следует, что

$$H(\mathbf{v}) : \mathbb{L}^\infty([0, T); \overrightarrow{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{AC}([0, T); \overrightarrow{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)),$$

$$H(\mathbf{v}) : \mathbb{AC}([0, T); \overrightarrow{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{C}^{(1)}([0, T); \overrightarrow{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)).$$

Значит, существует единственное решение задачи (14) класса $\mathbb{C}^{(1)}([0, T_0); \overrightarrow{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega))$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное равенство (16).

Рассмотрим теперь уравнение

$$A_0(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T); \overrightarrow{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)). \tag{17}$$

В силу свойств оператора A_0 имеем

$$\mathbf{u} = A_0^{-1}(\mathbf{v}),$$

причем справедливы следующие неравенства:

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)\|_{+2} \leqslant \|(A_0^{-1}\mathbf{v})(t) - (A_0^{-1}\mathbf{v})(t_0)\|_{+2} \leqslant \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0)\|_{-2} \longrightarrow +0$$

при $t \longrightarrow t_0$, $t_0 \in [0, T_0)$. Значит, $\mathbf{u}(x, t) \in \mathbb{C}([0, T_0); \overrightarrow{\mathbb{H}}_0^2(\Omega))$. Далее, поскольку производная Фреше (см. [10]) линейного оператора A_0 совпадает с самим оператором, то из (17) получаем

$$A_0\mathbf{u}' = \mathbf{v}' \in \mathbb{C}([0, T_0); \overrightarrow{\mathbb{H}}^{-2}(\Omega)),$$

а значит,

$$\|\mathbf{u}'(t) - \mathbf{u}'(t_0)\|_{+2} \leqslant \|(A_0^{-1}\mathbf{v}')(t) - (A_0^{-1}\mathbf{v}')(t_0)\|_{+2} \leqslant \|\mathbf{v}'(t) - \mathbf{v}'(t_0)\|_{-2} \longrightarrow +0$$

при $t \longrightarrow t_0$, $t_0 \in [0, T_0)$. Таким образом, приходим к выводу, что $\mathbf{u}(x, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0); \mathbb{H}_0^2(\Omega))$. Теорема доказана.

3. РАЗРУШЕНИЕ СИЛЬНОГО ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

Введем функции

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\langle A_0\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_2 \equiv \frac{1}{2}\left[\sum_i \|\Delta u_i\|_2^2 + \sum_i \|\nabla u_i\|_2^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_2^2 + \|\mathbf{u}\|_2^2\right] \tag{18}$$

и

$$J(t) \equiv \langle A_0\mathbf{u}', \mathbf{u}'\rangle_2 \equiv \sum_i \|\Delta u_i'\|_2^2 + \sum_i \|\nabla u_i'\|_2^2 + \|\operatorname{div}\mathbf{u}'\|_2^2 + \|\mathbf{u}'\|_2^2.$$

Имеют место первое и второе энергетические равенства:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = (F(\mathbf{u}), \mathbf{u})_2 - \langle L\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_1 \equiv \|\mathbf{u}\|_4^4 - \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_2^2 - \sum_i \|\nabla u_i'\|_2^2, \tag{19}$$

$$J(t) = (F(\mathbf{u}), \mathbf{u}')_2 - \langle L\mathbf{u}, \mathbf{u}'\rangle_1 - \langle Q(\mathbf{u}), \mathbf{u}'\rangle_1 \equiv \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4}\|\mathbf{u}\|_4^4 - \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_2^2 - \frac{1}{2}\sum_i \|\nabla u_i\|_2^2\right]. \tag{20}$$

Под $(\cdot, \cdot)_2$ будем понимать скалярное произведение в $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Справедливы также следующие оценки:

$$(\Phi'(t))^2 = \langle A_0\mathbf{u}', \mathbf{u}\rangle_2^2 \leqslant \langle A_0\mathbf{u}', \mathbf{u}'\rangle_2 \langle A_0\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_2 = 2\Phi J, \tag{21}$$

$$\langle L\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_1 \leqslant \langle A_0\mathbf{u}, \mathbf{u}'\rangle_2, \tag{22}$$

$$|\langle L\mathbf{u}', \mathbf{u}\rangle_1| \leqslant \langle L\mathbf{u}', \mathbf{u}'\rangle_1^{1/2} \langle L\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_1^{1/2} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}\langle L\mathbf{u}', \mathbf{u}'\rangle_1 + \frac{1}{2\varepsilon_0}\langle L\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_1, \quad \varepsilon_0 > 0. \tag{23}$$

Из (22) и (23), в свою очередь, вытекает оценка

$$|\langle L\mathbf{u}', \mathbf{u}\rangle_1| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}\langle A_0\mathbf{u}', \mathbf{u}'\rangle_2 + \frac{1}{2\varepsilon_0}\langle A_0\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_2. \tag{24}$$

Получим теперь оценку для $\langle Q(\mathbf{u}), \mathbf{u}'\rangle_1$:

$$\begin{gathered}\langle Q(\mathbf{u}), \mathbf{u}'\rangle_1 = -\int_\Omega \sum_{i,j}\left[u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i' + \frac{1}{2}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i u_i'\right] dx = \\ = -\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) u_i' + \sum_{i,j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j u_i'\right] dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} u_i u_j dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j u_i' dx.\end{gathered} \tag{25}$$

Заметим, что

$$\begin{gathered}\left|\int_\Omega \sum_{i,j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} u_i u_j dx\right| \leqslant \sum_{i,j}\left(\int_\Omega u_i^2 u_j^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant N(F(\mathbf{u}), \mathbf{u})_2^{1/2}\langle A_0\mathbf{u}', \mathbf{u}'\rangle_2^{1/2},\end{gathered} \tag{26}$$

$$\left|\sum_{i,j}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_j u_i' dx\right| \leqslant \sum_{i,j}\left(\int_\Omega (u_i')^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega u_j^2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j}\left(\int_\Omega (u_i')^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega u_j^4 dx\right)^{1/4}\left(\int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^4 dx\right)^{1/4} \leqslant \tag{27}$$

$$\leqslant \mathcal{C}_1 N\sum_i\left(\int_\Omega (\Delta u_i)^2 dx\right)^{1/2}\max_i\left(\int_\Omega (u_i')^2 dx\right)^{1/2}\max_j\left(\int_\Omega u_j^4 dx\right)^{1/4} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{C}_1 N^{3/2}\langle A_0\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_2^{1/2}\langle A_0\mathbf{u}',\mathbf{u}'\rangle_2^{1/2}(F(\mathbf{u}),\mathbf{u})_2^{1/4},$$

где $\mathcal{C}_1$ – константа наилучшего вложения пространства $\mathbb{H}^2(\Omega)$ в $\mathbb{W}^{1,4}(\Omega)$. Заметим также, что

$$(F(\mathbf{u}),\mathbf{u})_2^{1/4} \leqslant \mathcal{C}_2\langle A_0\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_2^{1/2}, \tag{28}$$

где $\mathcal{C}_2$ – константа наилучшего вложения пространства $\mathbb{H}^2(\Omega)$ в $\mathbb{L}^4(\Omega)$. Подставив (26) и (27) в (25), с учетом (28) придем к оценке

$$|\langle Q(\mathbf{u}),\mathbf{u}'\rangle_1| \leqslant \kappa\langle A_0\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_2\langle A_0\mathbf{u}',\mathbf{u}'\rangle_2^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}\kappa\left[\frac{\varepsilon_0}{2}\langle A_0\mathbf{u}',\mathbf{u}'\rangle_2 + \frac{1}{2\varepsilon_0}\langle A_0\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_2^2\right], \tag{29}$$

где $\kappa = \mathcal{C}_1\mathcal{C}_2 N^{3/2} + \mathcal{C}_2^2 N$.

Из первого энергетического равенства (19) вытекает

$$(F(\mathbf{u}),\mathbf{u}')_2 = \frac{1}{4}\Phi''(t) + \frac{1}{2}\langle L\mathbf{u},\mathbf{u}'\rangle_1. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (20) и применяя оценки (24) и (29), приходим к следующему неравенству:

$$J \leqslant \frac{1}{4}\Phi'' + \frac{\varepsilon_0}{4}J + \frac{1}{2\varepsilon_0}\Phi + \frac{\varepsilon_0}{4}J + \frac{4\kappa^2}{\varepsilon_0}\Phi^2,$$

которое, с учетом (21), сводится к обыкновенному дифференциальному неравенству

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 + \gamma\Phi^3 \geqslant 0,$$

в котором введены обозначения $\alpha = 2(1 - \varepsilon_0/2)$, $\beta = 2/\varepsilon_0$, $\gamma = 4\kappa^2/\varepsilon_0$. Выберем ε_0 так, чтобы $\alpha > 1$ (очевидно, это всегда можно сделать), и введем функцию $Z(t) = \Phi^{1-\alpha}$. Для этой функции будет выполняться неравенство

$$Z'' - \mu Z - \nu Z^s \geqslant 0, \quad s = \frac{2-\alpha}{1-\alpha}, \tag{31}$$

где $\mu = \beta(\alpha - 1) > 0$, $\nu = \gamma(\alpha - 1) > 0$. Пусть $\alpha > 3/2$ (это всегда может быть достигнуто). Тогда $-1 < s < 1$. Теперь покажем, что при определенных условиях имеем $Z'(t) \leqslant 0$ $\forall t > 0$. В самом деле, поскольку $J(t) \geqslant 0$, то из (20) вытекает, что при условии

$$\frac{1}{4}\|\mathbf{u}_0\|_4^4 - \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathbf{u}_0\|_2^2 - \frac{1}{2}\sum_i\|\nabla(u_i)_0\|_2^2 \geqslant 0 \tag{32}$$

имеет место неравенство

$$\frac{1}{4}\|\mathbf{u}\|_4^4 - \frac{1}{2}\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_2^2 - \frac{1}{2}\sum_i\|\nabla u_i\|_2^2 \geqslant 0 \quad \forall t > 0.$$

Тогда из (19) следует, что $\Phi'(t) \geqslant 0 \ \forall t > 0$ откуда имеем $Z'(t) \leqslant 0 \ \forall t > 0$. Таким образом, при выполнении условия (32) из (31) получим

$$Z''Z' - \mu ZZ' - \nu Z^s Z' \geqslant 0.$$

Интегрируя последнее неравенство, будем иметь

$$(Z')^2 - \mu Z^2 - \frac{2\nu}{s+1} Z^{s+1} \geqslant A, \qquad (33)$$

где $A = (Z_0')^2 - \mu Z_0^2 - \frac{2\nu}{s+1} Z_0^{s+1} = \Phi_0^{-2\alpha}\left[(1-\alpha)^2(\Phi_0')^2 - \mu\Phi_0^2 - \frac{2\nu}{s+1}\Phi_0^3\right]$. Если функция $\mathbf{u}_0(x)$ такова, что выполнено условие

$$(1-\alpha)^2(\Phi_0')^2 - \mu\Phi_0^2 - \frac{2\nu}{s+1}\Phi_0^3 > 0, \qquad (34)$$

то $A > 0$ и из (33) будем иметь $Z' \leqslant -\sqrt{A}$, откуда следует

$$Z(t) \leqslant Z_0 - \sqrt{A}t.$$

Таким образом, приходим к выводу, что при указанных условиях (32) и (34) сильное обобщенное решение задачи (2) разрушается за время, не превосходящее $T_1 = \Phi_0^{1-\alpha}/\sqrt{A}$. Подберем такое ε_0, чтобы класс функций $\mathbf{u}_0(x)$, удовлетворяющих условию (34), был максимально широким. Такая задача сводится к нахождению точки минимума функции

$$f(z) = \frac{1}{1-4z} + \frac{K}{z(1-8z)}, \quad z \in \left(0, \frac{1}{8}\right), \quad K = 4\kappa^2\Phi_0,$$

где $z = \varepsilon_0/4$. Элементарными средствами математического анализа последняя задача, в свою очередь, сводится к поиску корня уравнения 3-й степени:

$$y^3 - 3\theta y^2 + \theta = 0, \quad y \in (-1, 0), \qquad (35)$$

в котором $\theta = K/(4 + 2K) \in (0, 1/2)$, а $y = 8z - 1$. Корень уравнения (35) можно найти точно, воспользовавшись формулами Кардано, однако для наших целей достаточно выписать приближенное решение, найденное с помощью одной итерации метода Ньютона при начальном приближении $y_0 = -1/\sqrt{3}$:

$$y = -\frac{6\sqrt{3}\theta + 2}{18\theta + 3\sqrt{3}}.$$

Далее, выражая ε_0 через z, а z – через y, приходим к окончательному выражению для ε_0:

$$\varepsilon_0 = \frac{12\kappa^2\Phi_0 + 3\sqrt{3} - 2}{(36 + 12\sqrt{3})\kappa^2\Phi_0 + 6\sqrt{3}}. \qquad (36)$$

Получим теперь оценку снизу на время разрушения решения. Из первого энергетического неравенства получим

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \int_0^t \|\mathbf{u}(s)\|_4^4 ds. \qquad (37)$$

Поскольку $\|\mathbf{u}(s)\|_4^4 \leqslant \mathcal{C}_2^4 \Sigma_i (\|\Delta u_i\|_2^2)^2$, то из (37) вытекает следующее неравенство:

$$\Phi(t) \leqslant \Phi_0 + \int_0^t \mathcal{C}_2^4 \Phi^2(s) ds.$$

Применяя лемму Гронуолла–Белмана–Бихари (см. [11]), получаем оценку сверху на $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) \leqslant \frac{1}{\Phi_0^{-1} - \mathcal{C}_2^4 t},$$

из которой следует, что решение разрушается не раньше, чем через $T_2 = (\Phi_0 \mathcal{C}_2^4)^{-1}$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда, если функция* $\mathbf{u}_0(x)$ *удовлетворяет условиям* (32) *и*

$$(\Phi_0')^2 - \frac{2\Phi_0^2}{\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)} - \frac{8\kappa^2\Phi_0^3}{\varepsilon_0(1-2\varepsilon_0)} > 0,$$

где $\Phi_0 = \Phi(0)$ *и* $\Phi_0' = \Phi'(0)$ *выражаются через* $\mathbf{u}_0$ *по формулам* (18) *и* (19), *а* ε_0 *определяется согласно* (36), *то сильное обобщенное решение задачи* (2) *разрушается за конечное время* T_0, *причем имеет место двусторонняя оценка* $T_2 \leqslant T_0 \leqslant T_1$, *где* $T_2 = (\Phi_0 \mathcal{C}_2^4)^{-1}$, *а*

$$T_1 = \frac{\Phi_0}{1-\varepsilon_0}\left((\Phi_0')^2 - \frac{2\Phi_0^2}{\varepsilon_0(1-\varepsilon_0)} - \frac{8\kappa^2\Phi_0^3}{\varepsilon_0(1-2\varepsilon_0)}\right)^{-1/2}.$$

В заключение автор выражает большую благодарность М.О. Корпусову за ценные замечания, существенно ускорившие подготовку данной публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осколков А.П.* О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы третьего порядка, встречающейся при изучении движения вязких жидкостей // Зап. научн. семинара ЛОМИ. 1992. Т. 27. С. 145–160.
2. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИ АН СССР. М., 1988. Т. 179. С. 126–164.
3. *Осколков А.П.* Нелокальные проблемы для уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта и их ε-аппроксимаций // Зап. научн. семинара ПОМИ. 1995. Т. 221. С. 185–207.
4. *Осколков А.П.* Гладкие сходящиеся ε-аппроксимации первой начально-краевой задачи для уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта // Зап. научн. семинара ПОМИ. 1994. Т. 219. С. 186–212.
5. *Осколков А.П.* О некоторых псевдопараболических системах уравнений с малым параметром, возникающих при численном анализе уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта // Теория уравнений Соболева и ее приложения. Челябинск: Гос. ун-т, 1994. С. 113–136.
6. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
7. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Наука, 2007.
8. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
10. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехтеориздат, 1956.
11. *Демидович В.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 671–680

УДК 519.634

AN ADAPTIVE LSMFE METHOD FOR BURGERS EQUATIONS

© 2009 г. Gu Hai-ming, Li Hong-wei

(Department of Mathematics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, P.R. China)

e-mail: quhm@ns.qd.sd.cn

Received July 7, 2008

Адаптивный смешанный конечно-элементный метод наименьших квадратов для решения уравнений Бюргерса. Предлагается и анализируется адаптивный смешанный конечно-элементный метод наименьших квадратов для численного решения уравлений Бюргерса. Получены апостериорные оценки погрешности, которые используются для адаптивного улучшения алгоритма. Локальное вычисление функционала наименьших квадратов служит в качестве апостериорной оценки погрешности, которая эффективно вычисляется. Библ. 11.

Key words: adaptive method; least-squares mixed finite element method; Burgers equations; least-squares functional; *a posteriori* error.

1. INTRODUCTION

A general theory of the least-squares method has been developed by Aziz, Kellogg and Stephens in [1]. The most important advantage leads to a symmetric positive definite problem. In the least-squares mixed finite element approach, a least-squares residual minimization is introduced. This method has an advantage which is not subject to the LBB condition. The mixed finite element methods of least-squares type have been the object of many studies recently (see, e.g. the Stokes Equation [2], Elliptic Problem [3], Newtonian Fluid Flow Problem [4], Transmission Problems [5] *et al.*). The adaptive least-squares mixed finite element method have been studied in recent several years (see, e.g. the linear elasticity [6]), but the research of adaptive method about Burgers equations is not common.

Adaptive methods are now widely used in the scientific computation. In this paper, we are interested in the adaptive least-squares mixed finite element method for Burgers equations. Burgers equations are fundamental partial differential equations from fluid mechanics. It occurs in various areas of applied mathematics, such as modeling of gas dynamics and traffic flow. Our emphasis in this paper is on the performance of an adaptive refinement strategy based on the *a posteriori* error estimator inherent in the least-squares formulation by the local evaluation of the functional.

An outline of the paper is as follows. The least-squares formulation of Burgers equations is proposed in Section 2. It includes continuous and coercivity properties of the least-squares variational formulation. Appropriate spaces for the finite element approximation and a generalization of the coercivity shown in Section 2 to the discrete forms are discussed in Section 3. In Section 4, *a posteriori* error estimators which are needed in an adaptive refinement algorithm are composed with the least-squares functional, and posteriori errors are effectively estimated. Finally, we summarize our findings and present conclusions in Section 5. In this paper, we define C to be a generic positive constant.

2. A LEAST-SQUARES FORMULATION OF BURGERS EQUATIONS

2.1. A Least-Squares Formulation of Burgers Equations

We start from the equations of Burgers in the form

$$u_t + auu_x - \nu u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, t_1), \tag{1}$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, t_1), \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

where, $\forall t_1 > 0$, u denotes the velocity, a is a positive constant, ν is viscosity coefficient, and $\varphi(x)$ is a given function.

Notation. Let $H^m(\Omega)$ and $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ denote the Sobolev space and the Lebesque space, respectively. $H_0^m(\Omega)$ is the subspace of $H^m(\Omega)$.

We shall consider an adaptive least-squares mixed finite element method for (1)–(3).

Now we introduce the flux variable $p = au^2/2 - \nu u_x$, then, we have

$$u_t + p_x = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, t_1), \tag{4}$$

$$p - \frac{au^2}{2} + \nu u_x = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, t_1), \tag{5}$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, t_1), \tag{6}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

where $u \in M = H_0^1(\Omega)$, $p \in X = L^2(\Omega)$, $\forall t \in (0, t_1)$.

Now, let us define the least-squares problem: find $(u, p) \in M \times X$ such that

$$J(u, p) = \inf_{v \in M, q \in X} J(v, q), \tag{8}$$

where

$$J(v, q) = (v_t + q_x, v_t + q_x)_{0,\Omega} + \left(q - \frac{av^2}{2} + \nu v_x, q - \frac{av^2}{2} + \nu v_x\right)_{0,\Omega}. \tag{9}$$

Taking variations in (9) with respect to v and q, the weak statement becomes: find $(u, p) \in M \times X$ such that

$$A(u, p; v, q) = 0 \quad \forall v \in M, \quad \forall q \in X, \tag{10}$$

where

$$A(u, p; v, q) = (u_t + p_x, v_t + q_x)_{0,\Omega} + \left(p - \frac{au^2}{2} + \nu u_x, q - \frac{av^2}{2} + \nu v_x\right)_{0,\Omega}. \tag{11}$$

Theorem 1. *The bilinear form $A(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ is continuous and coercive. In other words, there exist positive constants α and β, such that*

$$\begin{gathered} A(u, p; v, q) \le \alpha[\|u_t\|_{0,\Omega}^2 + \|p_x\|_{0,\Omega}^2 + \|p\|_{0,\Omega}^2 + \|u^2\|_{0,\Omega}^2 + \|u_x\|_{0,\Omega}^2]^{1/2}, \\ [\|v_t\|_{0,\Omega}^2 + \|q_x\|_{0,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 + \|v^2\|_{0,\Omega}^2 + \|v_x\|_{0,\Omega}^2]^{1/2}, \end{gathered} \tag{12}$$

$$A(v, q; v, q) \ge \beta(\|v_t\|_{0,\Omega}^2 + \|q_x\|_{0,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 + \|v^2\|_{0,\Omega}^2 + \|v_x\|_{0,\Omega}^2). \tag{13}$$

Proof. (i) For the upper bound we have

$$\begin{aligned} A(v, q; v, q) &= (v_t + q_x, v_t + q_x)_{0,\Omega} + \left(q - \frac{av^2}{2} + \nu v_x, q - \frac{av^2}{2} + \nu v_x\right)_{0,\Omega} = \\ &= \|v_t + q_x\|_{0,\Omega}^2 + \left\|q - \frac{av^2}{2} + \nu v_x\right\|_{0,\Omega}^2 \le \\ &\le \|v_t\|_{0,\Omega}^2 + \|q_x\|_{0,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\frac{av^2}{2}\right\|_{0,\Omega}^2 + \|\nu v_x\|_{0,\Omega}^2 = \\ &= C(\|v_t\|_{0,\Omega}^2 + \|q_x\|_{0,\Omega}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 + \|v^2\|_{0,\Omega}^2 + \|v_x\|_{0,\Omega}^2). \end{aligned}$$

Since the bilinear form is symmetric, this is sufficient for the upper bound in Theorem 1.

(ii) For the lower bound,

$$A(v, q; v, q) = (v_t + q_x, v_t + q_x)_{0,\Omega} + \left(q - \frac{av^2}{2} + \nu v_x, q - \frac{av^2}{2} + \nu v_x\right)_{0,\Omega} =$$

$$= (v_t, v_t)_{0,\Omega} + (q_x, q_x)_{0,\Omega} + 2(v_t, q_x)_{0,\Omega} + (q, q)_{0,\Omega} + \left(\frac{av^2}{2}, \frac{av^2}{2}\right)_{0,\Omega} +$$

$$+ (\nu v_x, \nu v_x)_{0,\Omega} + 2(q, \nu v_x)_{0,\Omega} - 2\left(q, \frac{av^2}{2}\right)_{0,\Omega} - 2\left(\frac{av^2}{2}, \nu v_x\right)_{0,\Omega} =$$

$$= (v_t, v_t)_{0,\Omega} + (q_x, q_x)_{0,\Omega} + 2(v_t, q_x)_{0,\Omega} + (q, q)_{0,\Omega} + \frac{a^2}{4}(v^2, v^2)_{0,\Omega} +$$

$$+ \nu^2(v_x, v_x)_{0,\Omega} + 2(q, \nu v_x)_{0,\Omega} - a(q, v^2)_{0,\Omega} - a\nu(v^2, v_x)_{0,\Omega} \ge$$

$$\ge (v_t, v_t)_{0,\Omega} + (q_x, q_x)_{0,\Omega} + (q, q)_{0,\Omega} + \frac{a^2}{4}(v^2, v^2)_{0,\Omega} + \nu^2(v_x, v_x)_{0,\Omega} -$$

$$- a(q, v^2)_{0,\Omega} - a\nu(v^2, v_x)_{0,\Omega} - \epsilon_1(q, v_x)_{0,\Omega} - \epsilon_2(v_t, q_x)_{0,\Omega} \ge$$

$$\ge \|v_t\|^2_{0,\Omega} + \|q_x\|^2_{0,\Omega} + \|q\|^2_{0,\Omega} + \frac{a^2}{4}\|v^2\|^2_{0,\Omega} + \nu^2\|v_x\|^2_{0,\Omega} -$$

$$-\left(a\delta_3\|q\|^2_{0,\Omega} + \frac{a}{\delta_3}\|v^2\|^2_{0,\Omega}\right) - \left(a\nu\delta_4\|v_x\|^2_{0,\Omega} + \frac{a\nu}{\delta_4}\|v^2\|^2_{0,\Omega}\right) -$$

$$-\left(\epsilon_1\delta_1\|q\|^2_{0,\Omega} + \frac{\epsilon_1}{\delta_1}\|v_x\|^2_{0,\Omega}\right) - \left(\frac{\epsilon_2}{\delta_2}\|v_t\|^2_{0,\Omega} + \epsilon_2\delta_2\|q_x\|^2_{0,\Omega}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{\epsilon_2}{\delta_2}\right)\|v_t\|^2_{0,\Omega} + (1 - \epsilon_2\delta_2)\|q_x\|^2_{0,\Omega} + (1 - a\delta_3 - \epsilon_1\delta_1)\|q\|^2_{0,\Omega} +$$

$$+ \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a}{\delta_3} - \frac{a\nu}{\delta_4}\right)\|v^2\|^2_{0,\Omega} + \left(\nu^2 - a\nu\delta_4 - \frac{\epsilon_1}{\delta_1}\right)\|v_x\|^2_{0,\Omega}.$$

We can choose the positive constants ϵ_1, ϵ_2, δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 satisfying

$$\left(1 - \frac{\epsilon_2}{\delta_2}\right) > 0,$$

$$(1 - \epsilon_2\delta_2) > 0,$$

$$(1 - a\delta_3 - \epsilon_1\delta_1) > 0,$$

$$\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a}{\delta_3} - \frac{a\nu}{\delta_4}\right) > 0,$$

$$\left(\nu^2 - a\nu\delta_4 - \frac{\epsilon_1}{\delta_1}\right) > 0.$$

We have

$$A(v, q; v, q) \ge \beta(\|v_t\|^2_{0,\Omega} + \|q_x\|^2_{0,\Omega} + \|q\|^2_{0,\Omega} + \|v^2\|^2_{0,\Omega} + \|v_x\|^2_{0,\Omega}).$$

We obtain the desired result.

Theorem 2. *There exists a unique solution of the equations* (4)–(7), *and the solution is* $(u, p) \in M \times X$.

Proof. From Theorem 1, we know that the bilinear form $A(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ is coercive and bounded on $M \times X$. Then the result follows from Lax–Milgram theorem.

2.2. A Least-Squares Formulation of Burgers Equations Respect to the Time

Now, we consider the form of Burgers equations respect to the time, let $\omega = u_t$. Discrete (4)–(7), $\tau > 0$, $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots, N = T/\tau$. Note $\omega^n = (u^n - u^{n-1})/\tau$, $n \ge 1$. We obtain the discrete form respect to the time

$$\omega^n + p_x^n = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, t_1), \tag{14}$$

$$p^n - \frac{a(u^n)^2}{2} + \nu u_x^n = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, t_1), \tag{15}$$

$$u^n(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, t_1), \tag{16}$$

$$u^0(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{17}$$

where $u^n \in M = H_0^1(\Omega)$, $p^n \in X = L^2(\Omega)$, $\omega^n \in M = H_0^1(\Omega)$ $\forall t \in (0, t_1)$.

We can use the least-squares mixed method for (14)–(17). The least-squares functional $I(v^n, q^n, \xi^n)$ for the mixed system (14)–(17) is simply

$$I(v^n, q^n, \xi^n) = (\xi^n + q_x^n, \xi^n + q_x^n)_{0,\Omega} + \left(q^n - \frac{a(v^n)^2}{2} + \nu v_x^n, q^n - \frac{a(v^n)^2}{2} + \nu v_x^n\right)_{0,\Omega}. \tag{18}$$

Set $J^n = [t^{n-1}, t^n]$. The corresponding variational statement is: find (u^n, p^n, ω^n): $J^n \longrightarrow M \times X \times M$ such that

$$B(u^n, p^n, \omega^n; v^n, q^n, \xi^n) = (\omega^n + p_x^n, \xi^n + q_x^n)_{0,\Omega} + \left(p^n - \frac{a(u^n)^2}{2} + \nu u_x^n, q^n - \frac{a(v^n)^2}{2} + \nu v_x^n\right)_{0,\Omega}. \tag{19}$$

Theorem 3. *The bilinear form $B(\cdot, \cdot, \cdot; \cdot, \cdot, \cdot)$ is continuous and coercive. In other words, there exist positive constants α^n and β^n, such that*

$$\begin{aligned} B(u^n, p^n, \omega^n; v^n, q^n, \xi^n) \le \alpha^n(&\|\omega^n\|_{0,\Omega}^2 + \|p_x^n\|_{0,\Omega}^2 + \|p^n\|_{0,\Omega}^2 + \|(u^n)^2\|_{0,\Omega}^2 + \|u_x^n\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \times \\ &\times (\|\xi^n\|_{0,\Omega}^2 + \|q_x^n\|_{0,\Omega}^2 + \|q^n\|_{0,\Omega}^2 + \|(v^n)^2\|_{0,\Omega}^2 + \|v_x^n\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$B(v^n, q^n, \xi^n; v^n, q^n, \xi^n) \ge \beta^n(\|\xi^n\|_{0,\Omega}^2 + \|q_x^n\|_{0,\Omega}^2 + \|q^n\|_{0,\Omega}^2 + \|(v^n)^2\|_{0,\Omega}^2 + \|v_x^n\|_{0,\Omega}^2). \tag{21}$$

Proof analogously to the proof of Theorem 1.

Theorem 4. *There exists a unique solution of the equations* (14)–(17), *and the solution is* $(u^n, p^n, \omega^n) \in M \times X \times M$.

Prof. From Theorem 3, we know that the bilinear form $B(\cdot, \cdot, \cdot; \cdot, \cdot, \cdot)$ is coercive and bounded on $M \times X \times M$. Then the result follows from Lax–Milgram theorem.

3. FINITE ELEMENT APPROXIMATION

In principle, the least-squares mixed finite element approach simply consists of minimizing (9) in finite-dimensional subspaces $M_h \subset M$ and $X_h \subset X$. Suitable spaces are based on a triangulation $\mathcal{J}_h$ of Ω and consist of piecewise polynomials with sufficient continuity conditions. Let $\mathcal{J}_h$ be a class qusi-uniform regular partition of Ω in this paper.

Lemma 1 (see [11]). *There exists a operator P_h: $M \longrightarrow M_h$ such that*

$$(v - P_h v, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in M_h,$$

and

$$\|P_h v\|_{0,\Omega} \le \|v\|_{0,\Omega}.$$

3.1. Semidiscrete Form

Now we consider the semidiscrete form of (4)–(7)

$$u_{ht} + p_{hx} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, t_1), \tag{22}$$

$$p_h - \frac{a u_h^2}{2} + \nu u_{hx} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, t_1), \tag{23}$$

$$u_h(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, t_1), \tag{24}$$

$$u_h(x, 0) = P_h \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{25}$$

where $u_h \in M_h$, $p_h \in X_h$ $\forall t \in (0, t_1)$.

Let us define the least-squares problem: find $(u_h, p_h) \in M_h \times X_h$ such that

$$J(u_h, p_h) = \inf_{v_h \in M_h, q_h \in X_h} J(v_h, q_h), \tag{26}$$

where

$$J(u_h, q_h) = \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left[(v_{ht} + q_{hx}, v_{ht} + q_{hx})_{0,T} + \left(q_h - \frac{a v_h^2}{2} + \nu v_{hx}, q_h - \frac{a v_h^2}{2} + \nu v_{hx} \right)_{0,T} \right]. \tag{27}$$

Taking variations in (27) with respect to v_h and q_h, the weak statement becomes: find $(u_h, p_h) \in M_h \times X_h$ such that

$$A(u_h, p_h; v_h, q_h) = 0 \quad \forall v_h \in M_h, \quad \forall q_h \in X_h, \tag{28}$$

where

$$A(u_h, p_h; v_h, q_h) = \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left[(u_{ht} + p_{hx}, v_{ht} + q_{hx})_{0,T} + \left(p_h - \frac{a u_h^2}{2} + \nu u_{hx}, q_h - \frac{a v_h^2}{2} + \nu v_{hx} \right)_{0,T} \right]. \tag{29}$$

Theorem 5. *The bilinear form $A(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ is continuous and coercive. In other words, there exist positive constants α_h and β_h, such that*

$$\begin{aligned} A(u_h, p_h; v_h, q_h) \le \alpha_h & \left[\sum_{T \in \mathcal{J}_h} (\|u_{ht}\|_{0,T}^2 + \|p_{hx}\|_{0,T}^2 + \|p_h\|_{0,T}^2 + \|u_h^2\|_{0,T}^2 + \|u_{hx}\|_{0,T}^2) \right]^{1/2} \times \\ & \times \left[\sum_{T \in \mathcal{J}_h} (\|v_{ht}\|_{0,T}^2 + \|q_{hx}\|_{0,T}^2 + \|q_h\|_{0,T}^2 + \|v_h^2\|_{0,T}^2 + \|v_{hx}\|_{0,T}^2) \right]^{1/2}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$B(v_h, q_h; v_h, q_h) \ge \beta_h \sum_{T \in \mathcal{J}_h} (\|v_{ht}\|_{0,T}^2 + \|q_{hx}\|_{0,T}^2 + \|q_h\|_{0,T}^2 + \|v_h^2\|_{0,T}^2 + \|v_{hx}\|_{0,T}^2). \tag{31}$$

Proof. (i) For the upper bound we have

$$\begin{aligned} A(v_h, q_h; v_h, q_h) &= \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left[(v_{ht} + q_{hx}, v_{ht} + q_{hx})_{0,T} + \left(q_h - \frac{a v_h^2}{2} + \nu v_{hx}, q_h - \frac{a v_h^2}{2} + \nu v_{hx} \right)_{0,T} \right] = \\ &= \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left(\|v_{ht} + q_{hx}\|_{0,T}^2 + \left\| q_h - \frac{a v_h^2}{2} + \nu v_{hx} \right\|_{0,T}^2 \right) \le \\ &\le \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left(\|v_{ht}\|_{0,T}^2 + \|q_{hx}\|_{0,T}^2 + \|q_h\|_{0,T}^2 + \left\| \frac{a v_h^2}{2} \right\|_{0,T}^2 + \|\nu v_{hx}\|_{0,T}^2 \right) = \end{aligned}$$

$$= C \sum_{T \in \mathcal{J}_h} (\|v_{ht}\|^2_{0,T} + \|q_{hx}\|^2_{0,T} + \|q_h\|^2_{0,T} + \|v_h^2\|^2_{0,T} + \|v_{hx}\|^2_{0,T}).$$

Since the bilinear form is symmetric, this is sufficient for the upper bound in Theorem 5.

(ii) For the lower bound:

$$A(v_h, q_h; v_h, q_h) = \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left[(v_{ht} + q_{hx}, v_{ht} + q_{hx})_{0,T} + \left(q_h - \frac{av_h^2}{2} + \nu v_{hx}, q_h - \frac{av_h^2}{2} + \nu v_{hx}\right)_{0,T}\right] =$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{J}_h} [(v_{ht}, v_{ht})_{0,T} + (q_{hx}, q_{hx})_{0,T} + 2(v_{ht}, q_{hx})_{0,T} + (q_h, q_h)_{0,T} +$$

$$+ \left(\frac{av_h^2}{2}, \frac{av_h^2}{2}\right)_{0,T} + (\nu v_{hx}, \nu v_{hx})_{0,T} + 2(q_h, \nu v_{hx})_{0,T} - 2\left(q_h, \frac{av_h^2}{2}\right)_{0,T} - 2\left(\frac{av_h^2}{2}, \nu v_{hx}\right)_{0,T}\right] =$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{J}_h} [(v_{ht}, v_{ht})_{0,T} + (q_{hx}, q_{hx})_{0,T} + 2(v_{ht}, q_{hx})_{0,T} + (q_h, q_h)_{0,T} +$$

$$+ \frac{a^2}{4}(v_h^2, v_h^2)_{0,T} + \nu^2(v_{hx}, v_{hx})_{0,T} + 2(q_h, \nu v_{hx})_{0,T} - a(q_h, v_h^2)_{0,T} - a\nu(v_h^2, v_{hx})_{0,T}\right] \ge$$

$$\ge \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left[(v_{ht}, v_{ht})_{0,T} + (q_{hx}, q_{hx})_{0,T} + (q_h, q_h)_{0,T} + \frac{a^2}{4}(v_h^2, v_h^2)_{0,T} +\right.$$

$$+ \nu^2(v_{hx}, v_{hx})_{0,T} - a(q_h, v_h^2)_{0,T} - a\nu(v_h^2, v_{hx})_{0,T} - \epsilon_{1_0}(q_h, \nu v_{hx})_{0,T} - \epsilon_{2_0}(v_{ht}, q_{hx})_{0,T}] \ge$$

$$\ge \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left[\|v_{ht}\|^2_{0,T} + \|q_{hx}\|^2_{0,T} + \|q_h\|^2_{0,T} + \frac{a^2}{4}\|v_h^2\|^2_{0,T} + \nu^2\|v_{hx}\|^2_{0,T} - \left(a\delta_{3_0}\|q_h\|^2_{0,T} + \frac{a}{\delta_{3_0}}\|v_t^2\|^2_{0,T}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(a\nu\delta_{4_0}\|v_{hx}\|^2_{0,T} + \frac{a\nu}{\delta_{4_0}}\|v_h^2\|^2_{0,T}\right) - \left(\epsilon_{1_0}\delta_{1_0}\|q_h\|^2_{0,T} + \frac{\epsilon_{1_0}}{\delta_{1_0}}\|v_{hx}\|^2_{0,T}\right) - \left(\frac{\epsilon_{2_0}}{\delta_{2_0}}\|v_{ht}\|^2_{0,T} + \epsilon_{2_0}\delta_{2_0}\|q_{hx}\|^2_{0,T}\right)\right] =$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left[\left(1 - \frac{\epsilon_{2_0}}{\delta_{2_0}}\right)\|v_{ht}\|^2_{0,T} + (1 - \epsilon_{2_0}\delta_{2_0})\|q_{hx}\|^2_{0,T} + (1 - a\delta_{3_0} - \epsilon_{1_0}\delta_{1_0})\|q_h\|^2_{0,T} +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a}{\delta_{3_0}} - \frac{a\nu}{\delta_{4_0}}\right)\|v_h^2\|^2_{0,T} + \left(\nu^2 - a\nu\delta_{4_0} - \frac{\epsilon_{1_0}}{\delta_{1_0}}\right)\|v_{hx}\|^2_{0,T}\right].$$

So we can select the positive constants ϵ_{1_0}, ϵ_{2_0}, δ_{1_0}, δ_{2_0}, δ_{3_0}, δ_{4_0} satisfying

$$\left(1 - \frac{\epsilon_{2_0}}{\delta_{2_0}}\right) > 0,$$

$$(1 - \epsilon_{2_0}\delta_{2_0}) > 0,$$

$$(1 - a\delta_{3_0} - \epsilon_{1_0}\delta_{1_0}) > 0,$$

$$\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a}{\delta_{3_0}} - \frac{a\nu}{\delta_{4_0}}\right) > 0,$$

$$\left(\nu^2 - a\nu\delta_{4_0} - \frac{\epsilon_{1_0}}{\delta_{1_0}}\right) > 0.$$

So we have

$$A(v_h, q_h; v_h, q_h) \geq \beta_h \sum_{T \in \mathcal{J}_h} (\|v_{ht}\|_{0,T}^2 + \|q_{hx}\|_{0,T}^2 + \|q_h\|_{0,T}^2 + \|v_h^2\|_{0,T}^2 + \|v_{hx}\|_{0,T}^2).$$

We obtain the desired result.

Theorem 6. *The equations* (22)–(25) *has a unique solution*: $(u_h, p_h) \in M_h \times X_h$.

Proof. From Theorem 5, we know that the bilinear form $A(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ is coercive and bounded on $M_h \times X_h$. Then the result follows from Lax–Milgram theorem.

3.2. Fulldiscrete Form

The fulldiscrete least-squares mixed finite element approximation (22)–(25) is: find $(u_h^n, p_h^n, \omega_h^n)$: $J^n \longrightarrow M_h \times X_h \times M_h$ such that

$$\omega_h^n + p_{hx}^n = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, t_1), \tag{32}$$

$$p_h^n - \frac{a(u_h^n)^2}{2} + \nu u_{hx}^n = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, t_1), \tag{33}$$

$$u_h^n(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, t_1), \tag{34}$$

$$u_h^0(x, 0) = P_h\varphi(x), \quad x \in \Omega. \tag{35}$$

The corresponding variational statement is: find $(u_h^n, p_h^n, \omega_h^n)$: $J^n \longrightarrow M_h \times X_h \times M_h$ such that

$$\begin{gathered} B(u_h^n, p_h^n, \omega_h^n; v_h^n, q_h^n, \xi_h^n) = \\ = \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left[(\omega_h^n + p_{hx}^n, \xi_h^n + q_{hx}^n)_{0,T} + \left(p_h^n - \frac{a(u_h^n)^2}{2} + \nu u_{hx}^n, q_h^n - \frac{a(v_h^n)^2}{2} + \nu v_{hx}^n \right)_{0,T} \right]. \end{gathered} \tag{36}$$

Theorem 7. *The fulldiscrete bilinear form $B(\cdot, \cdot, \cdot; \cdot, \cdot, \cdot)$ is continuous and coercive. In other words, there exist positive constants α_h^n and β_h^n, such that*

$$\begin{aligned} B(u_h^n, p_h^n, \omega_h^n; v_h^n, q_h^n, \xi_h^n) \leq \alpha_h^n \left[\sum_{T \in \mathcal{J}_h} (\|\omega_h^n\|_{0,T}^2 + \|p_{hx}^n\|_{0,T}^2 + \|p_h^n\|_{0,T}^2 + \|(u_h^n)^2\|_{0,T}^2 + \|u_{hx}^n\|_{0,T}^2) \right]^{1/2} \times \\ \times \left[\sum_{T \in \mathcal{J}_h} (\|\xi_h^n\|_{0,T}^2 + \|q_{hx}^n\|_{0,T}^2 + \|q_h^n\|_{0,T}^2 + \|(v_h^n)^2\|_{0,T}^2 + \|v_{hx}^n\|_{0,T}^2) \right]^{1/2}, \end{aligned} \tag{37}$$

$$B(v_h^n, q_h^n, \xi_h^n; v_h^n, q_h^n, \xi_h^n) \geq \beta_h^n \sum_{T \in \mathcal{J}_h} (\|\xi_h^n\|_{0,T}^2 + \|q_{hx}^n\|_{0,T}^2 + \|q_h^n\|_{0,T}^2 + \|(v_h^n)^2\|_{0,T}^2 + \|v_{hx}^n\|_{0,T}^2). \tag{38}$$

Proof the theorem can be proved in a similar manner as in Theorem 5.

Theorem 8. *The equations* (32)–(35) *has a unique solution*: $(u_h^n, p_h^n, \omega_h^n) \in M_h \times X_h \times M_h$.

Prof. From Theorem 7, we know that the fulldiscrete bilinear form $B(\cdot, \cdot, \cdot; \cdot, \cdot, \cdot)$ is coercive and bounded on $M_h \times X_h \times M_h$. Then the result follows from Lax–Milgram theorem.

4. THE LEAST-SQUARES FUNCTIONAL AS A POSTERIORI ERROR ESTIMATOR

One of the main motivations for using least-squares finite element approaches is the fact that the element-wise evaluation of the functional serves as an a posteriori error estimator.

A posteriori error estimate attempt to provide quantitatively accurate measures of the discretization error through the socalled a posteriori error estimators which are derived from using the information obtained during the solution process. In recent years, the use of a posteriori error estimators has become an efficient tool for assessing and controlling computational errors in adaptive computations [9].

4.1. Spatial Error Estimate

In order to estimate the error, we define the least-squares functional

$$\mathcal{F}_h(u_h, p_h) = \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left(\|u_{ht} + p_{hx}\|_{0,T}^2 + \left\| p_h - \frac{au_h^2}{2} + \nu u_{hx} \right\|_{0,T}^2 \right). \tag{39}$$

We have

$$\mathcal{F}_h(u_h - u, p_h - p) = \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left(\|u_{ht} - u_t + p_{hx} - p_x\|_{0,T}^2 + \left\| p_h - p - \frac{a(u_h - u)^2}{2} + \nu(u_{hx} - u_x) \right\|_{0,T}^2 \right).$$

Then, we define a posteriori error estimator as following:

$$\mathcal{F}_h(u_h - u, p_h - p) =: \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta^2. \tag{40}$$

Theorem 9. *The least-squares functional constitutes an a posteriori error estimator. In other words, for*

$$\eta^2 = \|u_{ht} - u_t + p_{hx} - p_x\|_{0,T}^2 + \left\| p_h - p - \frac{a(u_h - u)^2}{2} + \nu(u_{hx} - u_h) \right\|_{0,T}^2,$$

there exist positive constants α_T *and* β_T *such that*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta^2 \le \beta_T \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\|u_{ht} - u_t\|_{0,T}^2 + \|p_{hx} - p_x\|_{0,T}^2 + \|p_h - p\|_{0,T}^2 + \|(u_h - u)^2\|_{0,T}^2 + \|u_{hx} - u_x\|_{0,T}^2), \tag{41}$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta^2 \ge \alpha_T \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\|u_{ht} - u_t\|_{0,T}^2 + \|p_{hx} - p_x\|_{0,T}^2 + \|p_h - p\|_{0,T}^2 + \|(u_h - u)^2\|_{0,T}^2 + \|u_{hx} - u_x\|_{0,T}^2). \tag{42}$$

Proof. From (40), we know

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta^2 = \mathcal{F}_h(u_h - u, p_h - p) =$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|u_{ht} - u_t + p_{hx} - p_x\|_{0,T}^2 + \left\| p_h - p - \frac{a(u_h - u)^2}{2} + \nu(u_{hx} - u_h) \right\|_{0,T}^2 \right) =$$

$$= A(u_h - u, p_h - p; u_h - u, p_h - p),$$

from Theorem 5, the theorem can be proved easily.

4.2. Temporal Error Estimate

We define the least-squares functional in the fulldiscrete form of Burgers equations:

$$\mathcal{F}_h^n(u_h^n, p_h^n, \omega_h^n) = \sum_{T \in \mathcal{J}_h} \left(\|\omega_h^n + p_{hx}^n\|_{0,T}^2 + \left\| p_h^n - \frac{a(u_h^n)^2}{2} + \nu u_{hx}^n \right\|_{0,T}^2 \right). \tag{43}$$

We have

$$\mathcal{F}_h^n(u_h^n - u^n, p_h^n - p^n, \omega_h^n - \omega^n) =$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|\omega_h^n - \omega^n + p_{hx}^n - p_x^n\|_{0,T}^2 + \left\| p_h^n - p^n - \frac{a(u_h^n - u^n)^2}{2} + \nu(u_{hx}^n - u_x^n) \right\|_{0,T}^2 \right).$$

So we define a posteriori error estimator of the fulldiscrete form as following:

$$\mathcal{F}_h^n(u_h^n - u^n, p_h^n - p^n, \omega_h^n - \omega^n) =: \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h^2. \tag{44}$$

Theorem 10. *The least-squares functional constitutes an a posteriori error estimator. In other words, for*

$$\eta_h^2 = \|\omega_h^n - \omega^n + p_{hx}^n - p_x^n\|_{0,T}^2 + \left\| p_h^n - p^n - \frac{a(u_h^n - u^n)^2}{2} + \nu(u_{hx}^n - u_x^n) \right\|_{0,T}^2,$$

there exist positive constants α_T^n *and* β_T^n *such that*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h^2 \le \beta_T^n \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\|\omega_h^n - \omega^n\|_{0,T}^2 + \|p_{hx}^n - p_x^n\|_{0,T}^2 + \|p_h^n - p^n\|_{0,T}^2 + \|(u_h^n - u^n)^2\|_{0,T}^2 + \|u_{hx}^n - u_x^n\|_{0,T}^2), \tag{45}$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h^2 \ge \alpha_T^n \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\|\omega_h^n - \omega^n\|_{0,T}^2 + \|p_{hx}^n - p_x^n\|_{0,T}^2 + \|p_h^n - p^n\|_{0,T}^2 + \|(u_h^n - u^n)^2\|_{0,T}^2 + \|u_{hx}^n - u_x^n\|_{0,T}^2). \tag{46}$$

Proof. From (44), we know

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h^2 = \mathcal{F}_h^n(u_h^n - u^n, p_h^n - p^n, \omega_h^n - \omega^n) =$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|\omega_h^n - \omega^n + p_{hx}^n - p_x^n\|_{0,T}^2 + \left\| p_h^n - p^n - \frac{a(u_h^n - u^n)^2}{2} + \nu(u_{hx}^n - u_x^n) \right\|_{0,T}^2 \right) =$$

$$= B(u_h^n - u^n, p_h^n - p^n, \omega_h^n - \omega^n; u_h^n - u^n, p_h^n - p^n, \omega_h^n - \omega^n).$$

From Theorem 7. Theorem 10 can be proved easily.

Remark. The mesh is adapted and based on a posteriori error estimate of Burgers equations. Based on the computed a posteriori error estimator η or η_h, we use a mesh optimization procedure to compute the size of elements in the new mesh.

The mesh is adapted using the mesh modification procedures developed by Cai [8] and Li et al. [10]. This requires the specification of a mesh metric field to define the desired element size and shape distribution from the computed η or η_h. The mesh is then adapted to satisfy the prescribed metric field by the processes of refinement, coarsening and re-alignment.

Adaptive refinement strategies consist in refining those triangles with the largest values of η or η_h.

5. SUMMARY AND CONCLUSIONS

We describe an adaptive least-squares mixed finite element procedure for solving the Burgers equations and the discrete form in this paper, and the procedure uses a least-squares mixed finite element formulation and adaptive refinement based on a posteriori error estimate. The method is applied to study the continuous and coercivity of the Burgers equations and the discrete form of the Burgers equations.

In this paper, we applied relatively standard a posteriori error estimation techniques to adaptively solve the Burgers equations.

REFERENCES

1. *Aziz A.K., Kellogg R.B., Stephens A.B.* Least-squares methods for elliptic systems // Math. Comput. 1985. V. 44. P. 59–70.
2. *Gu Haiming, Yang Dangping, Sui Shulin, Liu Xinmin*. Least-squares mixed finite element method for a class of Stokes equation // Appl. Math. and Mech. 2000. V. 21. № 5. P. 557–566.
3. *Gu Hai-ming, Xu Xiu-ling*. The least-squares mixed finite element methods for a degenerate elliptic problem // Math. Appl. 2002. V. 15. № 1. P. 118–122.
4. *Cai Zhiqing, Lee Barry, Wang Ping*. Least-squares methods for incompressible Newtonianfluid flow: Linear stationary problems // SIAM J. Numer. Analys. 2004. V. 42. P. 843–859.
5. *Maischak M., Stephan E.P*. A Least squares coupling method with finite elements and boundary elements for transmission problems // Comput. Math. Appl. 2004. V. 48. P. 995–1016.
6. *Gu Haiming, Yang Danping*. Least-squares mixed finite element method for Sobolev equations // Indian J. Pure Appl. Math. 2000. V. 31. № 5. P. 505–517.
7. *Kim M.-Y., Park E.-J., Park J*. Mixed finite element domain decomposition for nonlinear parabolic problems // Comput. Math. Appl. 2000. V. 40. P. 1061–1070.
8. *Cai Zhiquan, Korsawe J., Starke G*. An adaptive least squares mixed finite element method for the stress-displacement formulation of linear elasticity // Numer. Meth. Partial Different. Equat. 2005. V. 21. P. 132–148.
9. *Yang Suh-Yuh*. Analysis of a least squares finite element method for the circular arch problem // Appl. Math. Comput. 2000. V. 114. P. 263–278.
10. *Li X., Shephardand M.S., Beall M.W*. 3D Anisotropic mesh adaptation using mesh modifications // Submitte to Comput. Math. Appl. Mech. Engng, 2003.
11. *Luo Z.D*. Theoretical bases for mixed finite element methods and application (in Chinese). Beijing: Science Press, 2006.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 681–695

УДК 519.635.1

МОРТАР-МЕТОД СТЫКОВКИ СЕТОК В СМЕШАННОЙ СХЕМЕ ГЕРМАННА–МИЙОСИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2009 г. Л. В. Масловская, О. М. Масловская

(65082 Одесса, Украина, ул. Дворянская, Одесский национальный ун-т)

e-mail: NASk01@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.03.2008 г.
Переработанный вариант 29.06.2008 г.

Рассмотрен mortar-метод Нитше стыковки сеток в смешанной схеме Германна–Мийоси для бигармонического уравнения. Построена mortar-задача, использующая два параметра. Проводится исследование этой задачи, доказываются теоремы существования и единственности при определенных ограничениях на параметры. Получены оценки для нормы разности между решением mortar-задачи и решением исходной задачи. Следует отметить, что сохраняются те же скорости сходимости, что и в схеме Германна–Мийоси на стыкующихся сетках.

Ключевые слова: стыковка сеток, схема Германна–Мийоси, mortar-метод, скорость сходимости.

Известно, что в методе конечных элементов часто используются нестыкующиеся сетки. Стыковка сеток обычно производится по линиям или поверхностям, которые разделяют область на подобласти и называются интерфейсами. Стыковка по интерфейсу – это удовлетворение некоторых условий непрерывности при переходе через интерфейс. Прямые процедуры стыковки можно разделить на три группы: методы, использующие множители Лагранжа, mortar-методы, основанные на технике Нитше, и методы штрафа.

Основные идеи, лежащие в основе методов, использующих множители Лагранжа, и mortar-методов, основанных на технике Нитше, изложены в [1], [2], где эти методы использовались для удовлетворения главным условиям на границе области в некотором слабом смысле. В более поздних работах [3], [4] эти идеи были перенесены на случай стыковки сеток. В [5], [6] для приближенного удовлетворения главным условиям на границе области был предложен метод штрафа. В [7], [8] мы впервые использовали метод штрафа стыковки сеток для уравнений второго и четвертого порядка. Следует отметить, что в методе штрафа для уравнений второго порядка при аппроксимации решения сплайнами первой степени при определенном выборе штрафа скорость сходимости в норме H^1 имеет порядок h (см. [7]), т.е. она такая же, как и в методе конечных элементов на стыкующейся сетке. Однако это свойство не сохраняется для сплайнов более высоких степеней. Не сохраняется оно также для смешанного метода конечных элементов. В этих случаях имеет место потеря в скорости сходимости по сравнению с соответствующими методами конечных элементов на стыкующихся сетках.

Известно, что в mortar-методе Нитше (см. [3]) в случае эллиптического уравнения второго порядка для сплайнов произвольной степени сохраняется та же скорость сходимости, что и в методе конечных элементов на стыкующихся сетках. За это приходится расплачиваться некоторыми дополнительными слагаемыми в вариационной формулировке mortar-метода по сравнению с методом штрафа, что усложняет формирование матрицы системы.

В данной работе мы формулируем и исследуем mortar-метод Нитше для смешанных методов конечных элементов. Рассмотрена схема Германна–Мийоси для бигармонического уравнения (см. [9–11]).

Строится mortar-метод Нитше, использующий два параметра. Исследуется mortar-задача, доказываются теоремы существования и единственности этой задачи при определенных ограничениях на параметры. Получены оценки для нормы разности между решением mortar-задачи и решением исходной задачи.

Следует отметить, что сохраняется та же скорость сходимости, что и в схеме Германна–Мийоси на стыкующихся сетках (см. [11]).

1. СМЕШАННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА

В двумерной выпуклой полигональной области Ω с границей $\partial\Omega$ рассматривается следующая краевая задача:

$$\Delta^2 w = q(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_n w|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Гладкость решения задачи (1), (2) зависит от гладкости правой части и гладкости границы области. Известно (см. [12]), что если Ω – выпуклая полигональная область и если $q \in H_\Omega^{-1}$, то $w \in H_\Omega^3$ есть решение задачи (1), (2).

Рассмотрим смешанную вариационную формулировку, на основе которой строится схема Германна–Мийоси (см. [9]–[11]).

Пусть $q \in W'$, найти пару $(m, w) \in M \times W$, удовлетворяющую вариационным уравнениям

$$a(m, \mu) - b(\mu, w) = 0 \quad \forall \mu \in M, \tag{3}$$

$$b(m, w) = \langle q, w\rangle \quad \forall w \in W, \tag{4}$$

где $\langle q, w\rangle$ – отношение двойственности между W' и W.

Пространства M и W и билинейные формы $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, определенные на $M \times M$, $M \times W$, соответственно, вводятся следующим образом.

Рассмотрим регулярную триангуляцию T_h с диаметром h области Ω (см. [13]) и тензорную функцию $m = (m_{ij})$, $m_{ij} \in H^1(T)$, $1 \le i, j \le 2$, $m_{12} = m_{21}$. Определим величины

$$M_n(m) = \sum_{i, j = 1}^{2} m_{ij} n^j n^i, \tag{5}$$

$$M_{nt}(m) = \sum_{i, j = 1}^{2} m_{ij} n^j t^i, \tag{6}$$

$$Q_n(m) = \sum_{i, j = 1}^{2} \partial_j m_{ij} n^i, \tag{7}$$

$n = (n^1, n^2)$ – единичный вектор нормали к ∂T, внешней к T, и $n = (t^1, t^2) = (n^2, -n^1)$ – единичный вектор касательной вдоль ∂T.

Определим билинейные формы (см. [11])

$$a(m, \mu) = \sum_{i, j = 1}^{2} \int_\Omega m_{ij} \mu_{ij} dx, \tag{8}$$

$$b(m, w) = \sum_{T \in T_h} \left(\sum_{i, j = 1}^{2} \int_T m_{ij} \partial_{ij}^2 w dx - \int_{\partial T} M_n(m) \partial_n w ds \right). \tag{9}$$

Пространство $\tilde{M}$ определяется следующим образом:

$$\begin{gathered} \tilde{M} = (H^1_{h,\Omega})^4 = \{m | m \in (L_{2,\Omega})^4, m \in (H^1_T)^4 \ \forall T \in T_h, \\ M_{n_1}(m_{T_1})|_{\partial T_{12}} = M_{n_2}(m_{T_2})|_{\partial T_{12}} \equiv M_n(m)|_{\partial T_{12}} \text{ для каждой пары треугольников } T_1 \text{ и } T_2, \\ \text{имеющих общую сторону } \partial T_{12}. \text{ Равенство} \\ \text{понимается в смысле совпадения следов функций из } H^1_{T_1} \text{ и } H^1_{T_2}\}. \end{gathered} \tag{10}$$

Это определение пространства $\tilde{M}$ эквивалентно следующему определению:

$$\begin{gathered}\tilde{M} = (H^1_{h,\Omega})^4 = \{m | m \in (L_{2,\Omega})^4, m \in (H^1_T)^4, \forall T \in T_h, \\ M_n(m) \in H^1 \text{ для каждой пары смежных треугольников}\}.\end{gathered} \tag{11}$$

Норма в пространстве $\tilde{M}$ вводится в виде

$$\|m\|^2_{\tilde{M}} = \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{T \in T_h} \|m_{ij}\|^2_{1,T}.$$

Пусть

$$\Gamma_h = \bigcup_{T \in T_h} \partial T.$$

На пространстве $\tilde{M}$, которое задано формулой (10) или (11), определим норму

$$\|m\|^2_{0,h,\Omega} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} |m_{ij}|^2 dx + h \int_{\Gamma_h} |M_n(m)|^2 ds, \tag{12}$$

где на внутреннем ребре $\partial T_{12} = \partial T_1 \cap \partial T_2$ полагаем $M_n(m) = M_{n_1}(m_1) = M_{n_2}(m_2)$, а на граничном ребре T' триангуляции T_h полагаем $M_n(m) = M_n(m)|_{T'}$.

Определим M как замыкание $\tilde{M}$ в норме $\|\cdot\|_{0,h,\Omega}$. Пространство M может быть отождествлено с пространством

$$\{m | m \in (L_{2,\Omega})^4, M_n(m) \in L_{2,\Gamma_h}\}.$$

Норма в пространстве M определяется по формуле (12).

Определим пространство W. Для этого введем в рассмотрение следующее пространство:

$$H^2_{h,\Omega} = \{w \in H^1_\Omega, w|_T \in H^2(T), \forall T \in T_h\},$$

и на $H^2_{h,\Omega}$ определим норму по формуле

$$w^2_{2,h,\Omega} = \sum_{T \in T_h} \|w\|^2_{2,T} + h^{-1} \int_{\Gamma_h} |J\partial_n w|^2 ds. \tag{13}$$

Если $\partial T_{12} = \partial T_1 \cap \partial T_2$ является внутренним ребром триангуляции T_h, то предполагаем, что

$$J\partial_n w|_{\partial T_{12}} = \partial_{n_1} w|_{\partial T_{12}} + \partial_{n_2} w|_{\partial T_{12}},$$

где n_j является единичной нормалью к ∂T_{12}, внешней по отношению к T_j, $j = 1, 2$, и если T' есть ребро на границе T_h, то предполагается

$$J\partial_n w|_{\partial T'} = \partial_n w|_{T'}.$$

Пусть $W = H^2_{h,\Omega} \cap H^1_{0,\Omega}$, где

$$H^1_{0,\Omega} = \{w \in H^1_\Omega, w|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Норма в пространстве W определяется по формуле (13).

Нетрудно проверить (см. [11]), что существуют константы $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для билинейных форм $a(m, \mu)$, $b(\mu, w)$, определяемых формулами (8), (9), справедливы неравенства

$$a(m, m) \geq a\|m\|_{(L_{2,\Omega})^4} \quad \forall m \in M, \tag{14}$$

$$\sup_{\mu \in \tilde{M}} \frac{b(\mu, m)}{\|\mu\|_{0, h, \Omega}} \ge \beta \|w\|_{2, h, \Omega} \quad \forall w \in W. \tag{15}$$

Используя (14), (15), можно доказать, что имеет место

Теорема 1 (см. [10]). *Пусть* $q \in H_\Omega^{-1}$. *Если* w – *обобщенное решение задачи* (1), (2) *и* $m = (m_{ij})$, $i, j, = 1, 2$, *определяется как* $m_{ij} = \partial_{ij}^2 w$, *то* (m, w) *является единственным решением задачи* (3), (4). *И, наоборот, если* (m, w) *является решением задачи* (3), (4), *то* w – *решение задачи* (1), (2) *и* $m_{ij} = \partial_{ij}^2 w$.

2. ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕРФЕЙСОМ

Разобьем область Ω на две неналегающие подобласти: Ω_1 с границей $\partial\Omega_1$ и Ω_2 с границей $\partial\Omega_2$. Граница $\partial\Omega_{12}$ является общей частью границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ и называется интерфейсом. Предположим, что $\partial\Omega_{12}$ является ломаной.

Пусть w_i, m_i, q_i – следы функций m, w, q, соответственно, на Ω_i, $i = 1, 2$.

Тогда задачу (1), (2) можно переписать в виде

$$\Delta^2 w_1 = q_1(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1, \tag{16}$$

$$\Delta^2 w_2 = q_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2, \tag{17}$$

$$w_1|_{\partial\Omega_1 \backslash \partial\Omega_{12}} = 0, \quad \partial_n w_1|_{\partial\Omega_1 \backslash \partial\Omega_{12}} = 0, \tag{18}$$

$$w_2|_{\partial\Omega_2 \backslash \partial\Omega_{12}} = 0, \quad \partial_n w_2|_{\partial\Omega_2 \backslash \partial\Omega_{12}} = 0, \tag{19}$$

$$w_1|_{\partial\Omega_{12}} = w_2|_{\partial\Omega_{12}}, \tag{20}$$

$$\partial_{n_1} w_1|_{\partial\Omega_{12}} = -\partial_{n_2} w_2|_{\partial\Omega_{12}}, \tag{21}$$

$$M_{n_1}(m_1)|_{\partial\Omega_{12}} = M_{n_2}(m_2)|_{\partial\Omega_{12}}, \tag{22}$$

$$Q_{n_1}(m_1)|_{\partial\Omega_{12}} = -Q_{n_2}(m_2)|_{\partial\Omega_{12}}, \tag{23}$$

$$M_{n_1 t_1}(m_1)|_{\partial\Omega_{12}} = M_{n_2 t_2}(m_2)|_{\partial\Omega_{12}} = 0. \tag{24}$$

Здесь $M_{n_i}(m_i)$, $M_{n_i, t_i}(m_i)$, $Q_{n_i}(m_i)$, $i = 1, 2$, определяются по формулам, аналогичным (5)–(7).

Проведем триангуляцию с диаметром h_1 области Ω_1 и триангуляцию с диаметром h_2 области Ω_2. Обе они предполагаются регулярными (см. [11]).

Напомним, что триангуляция T_{h_i}, $i = 1, 2$, называется регулярной в двух случаях. Во-первых, если существует константа $\gamma_i > 0$ такая, что

$$\max_{T \in T_{h_i}} \frac{h_T}{\rho_T} \ge \gamma_i,$$

где h_T – диаметр треугольника T и ρ_T – диаметр наибольшего круга, вписанного в T. Это условие эквивалентно условию Зламала существования постоянной ϑ_i такой, что

$$\vartheta_T \ge \vartheta_i > 0 \quad \forall T \in T_{h_i},$$

где ϑ_T – наименьший угол треугольника T. Во-вторых, если существует константа $\tau_i > 0$ такая, что

$$\frac{h_i}{h_T} \le \tau_i \quad \forall T \in T_{h_i}.$$

Тогда триангуляция T_{h_i} называется квазирегулярной.

Обозначим полученную сетку через $T_h \equiv T_{h_1} \times T_{h_2}$, $h = \max(h_1, h_2)$. На интерфейсе $\partial\Omega_{12}$ сетки не стыкуются, т.е. если узел одной сетки принадлежит интерфейсу, то он необязательно является узлом второй сетки.

Введем в рассмотрение следы сеток T_{h_1}, T_{h_2} на интерфейсе $\partial\Omega_{12}$:

$$\partial\Omega_{12}^i = \{E_i : E_i = T \cap \partial\Omega_{12}, T \subset T_{h_i}, i = 1, 2\}.$$

Введем в рассмотрение пространства $\tilde{M}_{\Omega_k}$

$$\tilde{M}_{\Omega_k} = (H^1_{h,\Omega_k})^4 = \{m_k | m_k \in (L_{2,\Omega_k})^4, m_k \in (H^1_T)^4 \; \forall T \in T_{h_k}, M_{n_1}(m_{T_1})|_{\partial T_{12}} = M_{n_2}(m_{T_2})|_{\partial T_{12}}, k = 1, 2$$

для каждой пары треугольников T_1 и T_2, имеющих общую сторону $\partial\Omega_{12}$. Равенство понимается в смысле совпадения следов функций из $H^1_{T_1}$ и $H^1_{T_2}$ }.

Определим норму в пространстве $\tilde{M}_{\Omega_k}$, $k = 1, 2$, следующим образом:

$$\|m\|^2_{0,h,\Omega_k} = \int_{\Omega_k} \sum_{i,j=1}^{2} |m_{k,ij}|^2 dx + h_k \int_{\Gamma_{h_k}} |M_n(m_k)|^2 ds, \tag{25}$$

пространство $\overline{M}_{\Omega_k}$ определяется как замыкание пространства $\tilde{M}_{\Omega_k}$ в норме (25).

Введем в рассмотрение пространство

$$\overline{M} = \{m \equiv (m_1, m_2) \in \overline{M}_{\Omega_1} \times \overline{M}_{\Omega_2}, M_{n_1}(m_1)|_{\partial\Omega_{12}} = M_{n_2}(m_2)|_{\partial\Omega_{12}}\}. \tag{26}$$

Норма этого пространства определяется в виде

$$\|m\|^2_{\overline{M}} = \sum_{k=1}^{2} \left[\int_{\Omega_k} \sum_{i,j=1}^{2} |m_{k,ij}|^2 dx + h_k \int_{\Gamma_{h_k}} |M_n(m_k)|^2 ds \right]. \tag{27}$$

Пусть $\overline{W}_{\Omega_i} = H^2_{h,\Omega_i} \cap H^1_{0,\Omega_i}$, $i = 1, 2$, где

$$H^1_{0,\Omega_i} = \{w \in H^1_{\Omega_i}, w|_{\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega_{12}} = 0\}.$$

Введем пространство

$$\overline{W} = \{w \equiv (w_1, w_2) \in \overline{W}_{\Omega_1} \times \overline{W}_{\Omega_2}, w_1|_{\partial\Omega_{12}} = w_2|_{\partial\Omega_{12}}\}. \tag{28}$$

Норма этого пространства имеет вид

$$\|w\|^2_{\overline{W}} = \sum_{i=1}^{2} \|w_i\|^2_{2,h_i,\Omega_i}. \tag{29}$$

Дадим вариационную формулировку задачи (16)–(24): пусть $q \in \overline{W}'$, найти пару $(m, w) \in \overline{M} \times \overline{W}$, удовлетворяющую вариационным уравнениям

$$a(m, \mu) - b(\mu, w) = 0 \quad \forall \mu \in \overline{M}, \tag{30}$$

$$b(m, \omega) = \langle q, \omega \rangle \quad \forall \omega \in \overline{W}, \tag{31}$$

где

$$a(m, \mu) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega_k} m_{k,ij} \mu_{k,ij} dx, \tag{32}$$

$$b(m, \omega) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{T \in T_{h_k}} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \int_T m_{k,ij} \partial_{ij}^2 \omega_k dx - \int_{\partial T} M_n(m_k) \partial_n \omega_k ds \right). \quad (33)$$

Нетрудно проверить (см. [11]), что существуют константы $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что

$$a(m, m) \ge a\|m\|_{(L_2, \Omega_1)^4 \times (L_{2, \Omega_2})^4} \quad \forall m \in \overline{M}, \quad (34)$$

и что

$$\sup_{\mu \in \overline{M}} \frac{b(\mu, w)}{\|\mu\|_{\overline{M}}} \ge \beta \|w\|_{\overline{W}} \quad \forall w \in \overline{W}. \quad (35)$$

Используя (34) и (35), нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $q \in H_\Omega^{-1}$. *Если* $w = (w_1, w_2)$ *– обобщенное решение задачи* (16)–(24) *и* $m_k = (m_{k,ij})$, k, i, $j = 1, 2$, *определяется как* $m_{k,ij} = \partial_{ij}^2 w_k$, *тогда пара* (m, w) *является единственным решением задачи* (30)–(33). *И, наоборот, если* (m, w) *является решением задачи* (30)–(33), *то* w *– решение задачи* (16)–(24) *и* $m_{k,ij} = \partial_{ij}^2 w_k$.

3. ПОСТРОЕНИЕ MORTAR-ЗАДАЧИ

Введем в рассмотрение пространство

$$\hat{M} = \{m \equiv (m_1, m_2) \in \overline{M}_{\Omega_1} \times \overline{M}_{\Omega_2}\}. \quad (36)$$

Норму этого пространства определим следующим образом:

$$\|m\|_{\hat{M}}^2 = \sum_{k=1}^{2} \left[\int_{\Omega_k} \sum_{i,j=1}^{2} |m_{j,ij}|^2 dx + h_k \int_{\Gamma_{h_k}} |M_n(m_k)|^2 ds \right]. \quad (37)$$

Введем пространство

$$\hat{W} = \{w \equiv (w_1, w_2) \in \overline{W}_{\Omega_1} \times \overline{W}_{\Omega_2}\}. \quad (38)$$

Норма этого пространства определяется в виде

$$\|w\|_{\hat{W}}^2 = \sum_{i=1}^{2} \|w_i\|_{2, h_i, \Omega_i}^2. \quad (39)$$

Лемма 1. *Пространство* $\overline{M}$, *определяемое по формулам* (26), (27), *является замкнутым подпространством пространства* $\hat{M}$, *определяемого формулами* (36), (37).

Лемма 2. *Пространство* $\overline{W}$, *определяемое по формулам* (28), (29), *является замкнутым подпространством пространства* $\hat{W}$, *определяемого* (38), (39).

Заметим, что в определении пространства $\hat{M}$ уже нет требования совпадения M_{n_1} и M_{n_2} на интерфейсе, а в определении пространства $\hat{W}$ нет требования совпадения w_1 и w_2 на интерфейсе. Это очень важно для численной реализации, так как при дискретизации задачи (30)–(33) методом конечных элементов возникают трудности, если мы хотим обеспечить совпадение w_1 с w_2 и m_1 с m_2 на интерфейсе $\partial\Omega_{12}$. Эти условия являются главными для смешанной вариационной формулировки.

Определим

$$M_h = \{m_h = (m_{1,h_1}, m_{2,h_2}) \in \hat{M};\ m_{s,h_s,ij} \in P_k, s, i, j = 1, 2, \forall T \in T_h\},$$

где P_k – пространство многочленов степени меньше либо равной k, $k \ge 1$, относительно переменных x_1 и x_2,

$$W_h = \{w_h = (w_{1, h_1}, w_{2, h_2}) \in \hat{W};\ w_{i, h_i} \in P_k,\ \forall T \in T_h,\ i = 1, 2\},$$

Отметим, что нормальные моменты, а также элементы пространства W_h терпят разрыв при переходе через интерфейс.

Рассмотрим вариационную формулировку mortar-метода: найти пару $(m_h, w_h) \in M_h \times W_h$, удовлетворяющую вариационным уравнениям

$$a'(m_h, \mu_h) - b'(\mu_h, w_h) = 0 \quad \forall \mu_h \in M_h, \tag{40}$$

$$b'(m_h, \omega_h) + c(w_h, \omega_h) = \langle q, \omega_h \rangle \quad \forall \omega_h \in W_h, \tag{41}$$

где

$$a'(m_h, \mu_h) = a(m_h, \mu_h) + \sigma_m h \int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(m_h) JM_n(\mu_h) ds, \tag{42}$$

$$c(w_h, \omega_h) = \sigma_w h^{-3} \int\limits_{\partial\Omega_{12}} Jw_h J\omega_h ds, \tag{43}$$

$$b'(m_h, \omega_h) = b(m_h, \omega_h) + \int\limits_{\partial\Omega_{12}} \{JM_n(m_h)[\partial_n \omega_h] + [Q_n(m_h)]Jw_h\} ds. \tag{44}$$

Здесь $Q_n(m_h) = (Q_{n_1}(m_{1, h_1}),\ Q_{n_2}(m_{2, h_2}))$, где $Q_{n_i}(m_{i, h_i})$, $i = 1, 2$, является сплайном, определенным на $\partial\Omega_{12}$. На каждом $E_i \in \partial\Omega_{12}^i$ это многочлен $Q_{n_i}(m_{i, h_i})$, который вычисляется по формуле, аналогичной (7).

В (42)–(44) выражения $a(m_h, \mu_h)$, $b(m_h, \omega_h)$ определяются формулами (32) и (33) соответственно и

$$JM_n(m_h) = (M_{n_1}(m_{1, h_1}) - M_{n_2}(m_{2, h_2}))\big|_{\partial\Omega_{12}},$$

$$Jw_h = (w_{1, h_1} - w_{2, h_2})\big|_{\partial\Omega_{12}},$$

$$[\partial_n \omega_h] = \left(\frac{1}{2}\partial_{n_1}\omega_{1, h_1} - \frac{1}{2}\partial_{n_2}\omega_{2, h_2}\right)\Big|_{\partial\Omega_{12}},$$

$$[Q_n(m_h)] = \left(\frac{1}{2}Q_{n_1}(m_{1, h_1}) - \frac{1}{2}Q_{n_2}(m_{2, h_2})\right)\Big|_{\partial\Omega_{12}}.$$

Здесь $\sigma_m > 0$, $\sigma_w > 0$ – некоторые параметры, выбор которых будет рассмотрен ниже.

Теорема 3. *Пусть* $w = (w_1, w_2)$ – *обобщенное решение задачи* (16)–(24), $m_k = (m_{k, ij})$, $k, i, j = 1, 2$, *определяется в виде* $m_{k, ij} = \partial_{ij}^2 w_k$. *Предположим, что* $w \in H_{\Omega}^r \times H_{\Omega_2}^r$, $r \ge 7/2$. *Тогда пара* (m, w) *удовлетворяет вариационным уравнениям*

$$a'(m, \mu_h) - b'(\mu_h, w) = 0 \quad \forall \mu_h \in M_h, \tag{45}$$

$$b'(m, \omega_h) + c(w, \omega_h) = \langle q, \omega_h \rangle \quad \forall \omega_h \in W_h, \tag{46}$$

где

$$a'(m, \mu_h) = a(m, \mu_h) + \sigma_m h \int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(m) JM_n(\mu_h) ds, \tag{47}$$

$$c(w, \omega_h) = \sigma_w h^{-3} \int\limits_{\partial\Omega_{12}} JwJ\omega_h ds, \tag{48}$$

$$b'(m, \omega_h) = b(m, \omega_h) + \int\limits_{\partial\Omega_{12}} \{JM_n(m)[\partial_n\omega_h] + [Q_n(m)]Jw_h\}ds. \tag{49}$$

Доказательство. Так как w – обобщенное решение задачи (16)–(24) и $m_{k,\,ij} = \partial_{ij}^2 w_k$, $k, i, j = 1, 2$, то из (47)–(49) следует, что

$$a'(m, \mu_h) = a(m, \mu_h) \quad \forall\mu_h \in M_h, \tag{50}$$

$$b'(\mu_h, w) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{T \in T_h} \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_T \mu_{k,\,h_k,\,ij}\partial_{ij}^2 w_k dx \quad \forall\mu_h \in M_h, \tag{51}$$

$$c(w, \omega_k) = 0 \quad \forall\omega_h \in W_h. \tag{52}$$

Очевидно, что (45) следует из (50), (51) и равенства $m_{k,\,ij} = \partial_{ij}^2 w_k$, $k, i, j = 1, 2$.

Умножив обе части уравнения (16) на пробную функцию $w_{1,\,h_1}$ и проинтегрировав полученное равенство по Ω_1, а также умножив обе части уравнения (17) на пробную функцию $w_{2,\,h_2}$ и проинтегрировав по Ω_2, а затем сложив полученные равенства, получим

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{T \in T_{h_k}} \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_T \Delta^2 w_i \omega_{i,\,h_i} dx = \langle q, \omega_h\rangle. \tag{53}$$

Проинтегрировав в левой части (53) по частям дважды и учтя то, что $m_{k,\,ij} = \partial_{ij}^2 w_k$, $k, i, j = 1, 2$, получим соотношение

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{T \in T_{h_k}} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_T m_{k,\,ij}\partial_{ij}^2\omega_{k,\,h_k}dx - \int\limits_{\partial T} M_n(m_k)\partial_n\omega_{k,\,h_k}ds \right) + \int\limits_{\partial\Omega_{12}} [Q_n(m)]J\omega_h ds = \langle q, \omega_h\rangle,$$

т.е.

$$b'(m, \omega_h) = \langle q, \omega_h\rangle. \tag{54}$$

Вариационное равенство (46) следует из (52) и (54). Теорема доказана.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ MORTAR-ЗАДАЧИ. СХОДИМОСТЬ

Исследуем дискретную задачу (40), (41).

Лемма 3 (см. [11]). *Существует константа* $C_0 > 0$, *не зависящая от* h *и такая, что*

$$\|m_h\|_{\hat{M}} \le C_0\|m_h\|_{(L_{2,\,\Omega_1})^4 \times (L_{2,\,\Omega_2})^4} \quad \forall m_h \in M_h, \quad \forall h.$$

Следствием этой леммы является

Лемма 4. *Существует константа* $C_1 > 0$, *не зависящая от* h *и такая, что*

$$a(m_h, m_h) \ge C_1\|m_h\|_{\hat{M}} \quad \forall m_h \in M_h, \quad \forall h.$$

Имеет место следующая

Лемма 5 (см. [11]). *Существует константа* $C_2 > 0$, *не зависящая от* h *и такая, что*

$$\sup_{\mu_h \in M_h} \frac{|b(\mu_h, w_h)|}{\|\mu_h\|_{\hat{M}}} \ge C_2\|w_h\|_{\hat{W}} \quad \forall w_h \in W_h, \quad \forall h.$$

Важную роль в получении теоремы сходимости играют два интерполянта (см. [9–11]): интерполянт $\Pi_h m \in M_h$ и интерполянт $L_h w \in W_h$. В качестве $L_h w$ можно взять, например, интерполянт Лагранжа. Сформулируем их свойства.

Лемма 6. *Справедливо следующее равенство* (см. [9–11]):

$$\forall m \in \hat{M} \quad b(m - \Pi_h m, \omega_h) = 0 \quad \forall \omega_h \in W_h.$$

Имеют место следующие оценки аппроксимации (см. [3], [10], [11]).

Лемма 7. *Пусть* $w \in H^r_{\Omega_1} \times H^r_{\Omega_2}$, $r \ge 7/2$, *а значит,* $\operatorname{tr} w|_{\partial\Omega_{12}} \in H^{r-1/2}_{\partial\Omega_{12}} \times H^{r-1/2}_{\partial\Omega_{12}}$. *Тогда*

$$\|w - L_h w\|_{\hat{W}} \le Ch^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1} \times H^p_{\Omega_2}},$$

$$\|w - L_h w\|_{H^1_{\Omega_1} \times H^1_{\Omega_2}} \le Ch^{p-1}\|w\|_{H^p_{\Omega_1} \times H^p_{\Omega_2}},$$

$$\|J(w - L_h w)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le Ch^{p-1/2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1} \times H^p_{\Omega_2}},$$

$$p = \min(k+1, r).$$

Лемма 8 (см. [10], [11]). *Пусть* $w \in (H^{r-2}_{\Omega_1})^4 \times (H^{r-2}_{\Omega_2})^4$, $r \ge 7/2$, *а значит,* $\operatorname{tr} m|_{\partial\Omega_{12}} \in (H^{r-5/2}_{\partial\Omega_{12}})^4 \times (H^{r-5/2}_{\partial\Omega_{12}})^4$. *Тогда имеем оценки*

$$\|m - \Pi_h m\|_{\hat{M}} \le Ch^s\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4 \times (H^s_{\Omega_2})^4},$$

$$\|JM_n(m - \Pi_h m)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le Ch^{s-1/2}\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4 \times (H^s_{\Omega_2})^4},$$

$$s = \min(k+1, r-2).$$

Из лемм 4, 5 и из [1], [14] следует

Лемма 9. *Справедливо условие Бабушки*

$$\sup_{(\mu_h, \omega_h) \in M_h \times W_h} \frac{|a'(m_h, \mu_h) - b(\mu_h, w_h) + b(m_h, \omega_h) + c(w_h, \omega_h)|}{\|(\mu_h, \omega_h)\|} \ge C_3\|(m_h, w_h)\| \quad \forall (m_h, w_h) \in M_h \times W_h,$$

где

$$\|(\mu_h, \omega_h)\| = \|\mu_h\|_{\hat{M}} + \sigma_m^{1/2}h^{1/2}\|JM_n(\mu_n)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} + \|\omega_h\|_{\hat{W}} + \sigma_w^{1/2}h^{-3/2}\|J\omega_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}.$$

Лемма 10. *Пусть* $w_h \in W_h$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{\int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(\mu_n)[\partial_n w_h]ds}{\|(\mu_h, \omega_h)\|_{\hat{W}}} \ge -C_4\sigma_m^{-1/2}\|w_h\|_{\hat{W}} \quad \forall (m_h, \omega_h) \in M_h \times W_h. \tag{55}$$

Доказательство. Очевидно имеют место следующие оценки:

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(\mu_n)[\partial_n w_h]ds\right| \le \|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\|[\partial_n w_h]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le \\ \le C_4\sigma_m^{1/2}h^{1/2}\|JM_n(\mu_n)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\sigma_m^{-1/2}h^{-1/2}\|[\partial_n w_h]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le C_4\sigma_m^{-1/2}\|(\mu_h, \omega_h)\|\|w_h\|_{\hat{W}}.\end{gathered} \tag{56}$$

Неравенство (55) следует из (56).

Лемма 11. *Пусть $w_h \in W_h$. Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{\int\limits_{\partial\Omega_{12}} [Q_n(\mu_n)] J w_h ds}{\|(\mu_h, \omega_h)\|} \ge -C_5 h^{-3/2} \|J w_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \quad \forall (m_h, \omega_h) \in M_h \times W_h. \tag{57}$$

Доказательство. Используя обратное неравенство, получаем

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\partial\Omega_{12}} [Q_n(\mu_n)] J w_h ds\right| &\le \|[Q_n(\mu_h)]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \|J w_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le \|\mu_h\|_{(H^{3/2}_{h_1,\Omega_1})^4 \times (H^{3/2}_{h_2,\Omega_2})^4} \|J w_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le \\ &\le C_5 h^{-3/2} \|\mu_h\|_{(L_{2,\Omega_1})^4 \times (L_{2,\Omega_2})^4} \|J w_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le C_5 h^{-3/2} \|(\mu_h, \omega_h)\| \|J w_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}},\end{aligned} \tag{58}$$

где

$$\|\mu_{k,h_k}\|^2_{(H^{3/2}_{h_k,\Omega_k})^4} = \sum_{T \in T_{h_k}} \|\mu_{k,h_k}\|^2_{(H^{3/2}_{h_k,T})^4}, \quad k = 1, 2.$$

Неравенство (57) следует из (58).

Из лемм 9–11 следует

Лемма 12. *Имеет место неравенство*

$$\begin{aligned}\sup_{(\mu_h,\omega_h) \in M_h \times W_h} \frac{|a'(m_h, \mu_h) - b'(\mu_h, w_h) + b'(m_h, \omega_h) + c(w_h, \omega_h)|}{\|(\mu_h, \omega_h)\|} &\ge C_3(\|m_h\|_{\hat{M}} + \sigma_m^{1/2} h^{1/2} \|J M_n(m_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}) + \\ &+ (C_3 - C_4 \sigma_m^{-1/2}) \|w_h\|_{\hat{W}} + \sigma_w^{1/2} h^{-3/2} (C_3 - C_5 \sigma_w^{-1/2}) \|J w_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}.\end{aligned} \tag{59}$$

Следствие. Выберем σ_m так, чтобы выполнялась неравенство

$$C_3 - C_4 \sigma_m^{-1/2} \ge \frac{1}{2} C_3,$$

откуда следует, что

$$\sigma_m \ge \left(\frac{2C_4}{C_3}\right)^2. \tag{60}$$

Выберем σ_w так, чтобы выполнялось неравенство

$$C_3 - C_5 \sigma_w^{-1/2} \ge \frac{1}{2} C_3,$$

откуда следует, что

$$\sigma_w \ge \left(\frac{2C_5}{C_3}\right)^2. \tag{61}$$

Выбор (60), (61) не дает ограничения на шаг.

Если σ_m выбрать согласно (60), а σ_w – согласно (61), то из (59) следует, что

$$\sup_{(\mu_h,\omega_h) \in M_h \times W_h} \frac{|a'(m_h, \mu_h) - b'(\mu_h, w_h) + b'(m_h, \omega_h) + c(w_h, \omega_h)|}{\|(\mu_h, \omega_h)\|} \ge \frac{1}{2} C_3 \|(m_h, w_h)\|. \tag{62}$$

Из (62) следует

Теорема 4. *Пусть σ_m выбрано согласно* (60), *а σ_w – согласно* (61). *Тогда mortar-задача* (40), (41) *однозначно разрешима для любого $h > 0$.*

Пусть

$$\varepsilon^m = m - \Pi_h m,$$

$$e^m = m - m_h,$$

$$\varepsilon^w = w - L_h w,$$

$$e^w = w - w_h,$$

где (m, w) – решение задачи (30), (31), а (m_h, w_h) – решение mortar-задачи (40), (41).

Очевидно, что

$$e^m - \varepsilon^m = m - m_h - m - \Pi_h m \in M_h,$$

$$e^w - \varepsilon^w = w - w_h - w - \Pi_h w \in W_h.$$

Положив $m_h = e^m - \varepsilon^m$, $w_h = e^w - \varepsilon^w$ в (62), получим, что справедлива

Лемма 13. *Если* σ_m *выбрать согласно* (60), *а* σ_w – *согласно* (61), *то справедливо неравенство*

$$\sup_{(\mu_h, \omega_h) \in M_h \times W_h} \frac{\left|a'(e^m - \varepsilon^m, \mu_h) - b'(\mu_h, e^w - \varepsilon^w) + b'(e^m - \varepsilon^m, \omega_h) + c(e^w - \varepsilon^w, \omega_h)\right|}{\|(\mu_h, \omega_h)\|} \ge$$
$$\ge \frac{1}{2} C_3 \|(e^m - \varepsilon^m, e^w - \varepsilon^w)\|.$$

Лемма 14. *Пусть* (m, w) – *решение задачи* (30), (31), $w \in \overline{W} \cap (H^r_{\Omega_1} \times H^r_{\Omega_2})$, $m \in \overline{M} \cap ((H^{r-2}_{\Omega_1})^4 \times$ $\times (H^{r-2}_{\Omega_2})^4)$, $r \ge 3/2$. *При этих условиях справедливо неравенство*

$$\sup_{(\mu_h, \omega_h) \in M_h \times W_h} \frac{\left|a'(e^m - \varepsilon^m, \mu_h) - b'(\mu_h, e^w - \varepsilon^w) + b'(e^m - \varepsilon^m, \omega_h) + c(e^w - \varepsilon^w, \omega_h)\right|}{\|(\mu_h, \omega_h)\|} \le$$
$$\le C_7 \left[h^s (1 + \sigma_m^{1/2} + \sigma_w^{-1/2}) \|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4 \times (H^s_{\Omega_2})^4} + h^{p-2} (1 + \sigma_m^{-1/2} + \sigma_w^{1/2}) \|w\|_{H^p_{\Omega_1} \times H^p_{\Omega_2}} \right], \tag{63}$$
$$p = \min(k+1, r), \quad s = \min(k+1, r-2).$$

Доказательство.

а. Используя теорему 3 и то, что (m_h, w_h) – решение mortar-задачи (40), (41), получаем

$$a'(e^m, \mu_h) - b'(\mu_h, e^w) = [a'(m, \mu_h) - b'(\mu_h, w)] - [a'(m_h, \mu_h) - b'(\mu_h, w_h)] = 0.$$

Таким образом,

$$a'(e^m, \mu_h) - b'(\mu_h, e^w) = 0 \quad \forall m_h \in M_h. \tag{64}$$

б. Аналогично,

$$b'(e^m, \omega_h) + c(e^w, \omega_h) = b'(m - m_h, \omega_h) + c(w - w_h, \omega_h) =$$
$$= [b'(m, \omega_h) + c(w, \omega_h)] - [b'(m_h, \omega_h) + c(w_h, \omega_h)] = f(\omega_h) - f(\omega_h) = 0.$$

Таким образом,

$$b'(e^m, \omega_h) + c(e^w, \omega_h) = 0 \quad \forall \omega_h \in W_h. \tag{65}$$

в. Используя теоремы аппроксимации и обратные неравенства, получаем некоторые вспомогательные оценки вида

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(\mu_h)[\partial_n(w-L_hw)]ds\right| \le \|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\|[\partial_n(w-L_hw)]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}\times L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le$$

$$\le C_8\|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\|w-L_hw\|_{H^{3/2}_{\Omega_1}\times H^{3/2}_{\Omega_2}} \le C_9\sigma_m^{1/2}h^{1/2}\|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\sigma_m^{-1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} \le \tag{66}$$

$$\le C_9\sigma_m^{-1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}\|(\mu_h,\omega_h)\|,$$

$$p = \min(k+1, r),$$

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega_{12}} [Q_n(\mu_h)]J(w-L_hw)ds\right| \le \|[Q_n(\mu_h)]\|_{\partial\Omega_{12}}\|J(w-L_hw)\|_{\partial\Omega_{12}} \le$$

$$\le C_{10}\|\mu_h\|_{(H^{3/2}_{h_1,\Omega_1})^4\times(H^{3/2}_{h_2,\Omega_2})^4}h^{p-1/2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} \le C_{11}h^{p-2}\|\mu_h\|_{(L_{2,\Omega_1})^4\times(L_{2,\Omega_2})^4}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} \le \tag{67}$$

$$\le C_{11}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}\|(\mu_h,\omega_h)\|.$$

Используя (66), (67) и леммы 7 и 8, получаем

$$a'(\varepsilon^m,\mu_h) - b'(\mu_h,\varepsilon^w) = a'(m-\Pi_hm,\mu_h) - b'(\mu_h, w-L_hw) -$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(\mu_h)[\partial_n(w-L_hw)]ds - \int\limits_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(\mu_h)]J(w-L_hw)ds =$$

$$= a(m-\Pi_hm,\mu_h) + \sigma_mh\int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(m-\Pi_hm)JM_n(\mu_h)ds - b(\mu_h, w-L_hw) -$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(\mu_h)[\partial_n(w-L_hw)]ds - \int\limits_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(\mu_h)]J(w-L_hw)ds \le$$

$$\le \|m-\Pi_hm\|_{(L_{2,\partial\Omega_1})^4\times(L_{2,\partial\Omega_2})^4}\|\mu_h\|_{(L_{2,\partial\Omega_1})^4\times(L_{2,\partial\Omega_2})^4} + h^{1/2}\|JM_n(m-\Pi_hm)\|_{L_{2,\partial_{12}}}\sigma_mh^{1/2}\|JM_n(\mu_h)\|_{L_{2,\partial_{12}}} +$$

$$+ \|\mu_h\|_{\hat M}\|w-L_hw\|_{\hat W} + \left(C_9\sigma_m^{-1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} + C_{11}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}\right)\|(\mu_h,\omega_h)\| \le$$

$$\le C_{12}\Big(h^s\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + \sigma_m^{1/2}h^s\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} +$$

$$+ \sigma_m^{-1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}} + h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}\Big)\|(\mu_h,\omega_h)\|,$$

$$s = \min(k+1, r-2).$$

Таким образом, имеем

$$a'(\varepsilon^m,\mu_h) - b'(\mu_h,\varepsilon^w) \le 2C_{12}\Big(h^s(1+\sigma_m^{1/2})\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + h^{p-2}(1+\sigma_m^{-1/2})\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}\|(\mu_h,\omega_h)\|. \tag{68}$$

г. Используя теоремы аппроксимации и обратные неравенства, получим некоторые вспомогательные оценки:

$$\int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(m-\Pi_h m)[\partial_n\omega_h]ds \le \|JM_n(m-\Pi_h m)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\|[\partial_n\omega_h]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}\times L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le$$
$$\le C_{13}h^{s-1/2}\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}\|[\partial_n\omega_n]\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}\times L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le C_{13}h^s\|m\|_{(H^p_{\Omega_1})^4\times(H^p_{\Omega_2})^4}\|(\mu_h,\omega_h)\|. \tag{69}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega_{12}} [Q_n(m-\Pi_h m)]J\omega_h ds \le \|Q_n(m-\Pi_h m)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}}\|J\omega_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le$$
$$\le C_{14}\|m-\Pi_h m\|_{(H^{3/2}_{h_1,\Omega_1})^4\times(H^{3/2}_{h_2,\Omega_2})^4}\|J\omega_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le C_{15}\sigma_w^{-1/2}h^{s-3/2}\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}\sigma_w^{1/2}\|J\omega_h\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le \tag{70}$$
$$\le C_{15}\sigma_w^{-1/2}h^s\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}\|(\mu_h,\omega_h)\|.$$

Используя (69), (70) и леммы 7, 8, получаем

$$b'(\varepsilon^m,\omega_h)+c(\varepsilon^w,\omega_h) = b(m-\Pi_h m,\omega_h)+\int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(m-\Pi_h m)[\partial_n\omega_h]ds +$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(m-\Pi_h m)]J\omega_h ds + c(w-L_h w,\omega_h) =$$
$$= \int\limits_{\partial\Omega_{12}} JM_n(m-\Pi_h m)[\partial_n\omega_h]ds + \int\limits_{\partial\Omega_{12}}[Q_n(m-\Pi_h m)]J\omega_h ds +$$
$$+\sigma_w h^{-3}\int\limits_{\partial\Omega_{12}} J(w-L_h w)J\omega_h ds \le C_{13}h^s\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}\|(\mu_h,\omega_h)\| +$$
$$+C_{15}\sigma_w^{-1/2}h^s\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4}\|(\mu_h,\omega_h)\| + \sigma_w^{1/2}h^{-3/2}\|J(w-L_h w)\|_{L_{2,\partial_{12}}}\sigma_w^{1/2}h^{-3/2}\|J\omega_h\|_{L_{2,\partial_{12}}} \le$$
$$\le C_{16}\left(h^s\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + \sigma_w^{-1/2}h^s\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + \sigma_w^{1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}\right)\|(\mu_h,\omega_h)\|.$$

Таким образом, имеем

$$b'(\varepsilon^m,\omega_h)+c(\varepsilon^w,\omega_h) \le C_{16}\left(h^s(1+\sigma_w^{-1/2})\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + \sigma_w^{1/2}h^{p-2}\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}\right)\|(\mu_h,\omega_h)\|. \tag{71}$$

Неравенство (63) следует из (64), (65), (68), (71). Доказательство завершено.

Из лемм 13 и 14 следует

Лемма 15. *Пусть* (m, w) – *решение задачи* (16)–(24), $w \in \overline{W} \cap (H^r_{\Omega_1}\times H^r_{\Omega_2})$, $m \in \overline{M} \cap ((H^{r-2}_{\Omega_1})^4 \times (H^{r-2}_{\Omega_2})^4)$, $r \ge 7/2$, (m_h, w_h) – *решение mortar-задачи* (40),(41), σ_m *выбрано согласно* (60), *а* σ_w – *согласно* (61).

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|(e^m-\varepsilon^m, e^w-\varepsilon^w)\| \le C_{17}\left[h^s(1+\sigma_m^{1/2}+\sigma_w^{-1/2})\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4\times(H^s_{\Omega_2})^4} + h^{p-2}(1+\sigma_m^{-1/2}+\sigma_w^{1/2})\|w\|_{H^p_{\Omega_1}\times H^p_{\Omega_2}}\right],$$

$$C_{17} = 2C_7/C_3, \quad p = \min(k+1, r), \quad s = \min(k+1, r-2).$$

Из лемм 7, 8 и 15 следует

Теорема 5 (теорема сходимости). *Пусть* (m, w) *– решение задачи* (16)–(24), (m_h, w_h) *– решение mortar-задачи* (40), (41), *и пусть* $w \in \overline{W} \cap (H^r_{\Omega_1} \times H^r_{\Omega_2})$, $m \in \overline{M} \cap ((H^{r-2}_{\Omega_1})^4 \times (H^{r-2}_{\Omega_2})^4)$, $r \ge 7/2$, σ_m *выбрано согласно* (60), *а* σ_w *– согласно* (61).

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|(m - m_h, w - w_h)\| \le C_{18}\Big[h^s(1 + \sigma_m^{1/2} + \sigma_w^{-1/2})\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4 \times (H^s_{\Omega_2})^4} + h^{p-2}(1 + \sigma_m^{-1/2} + \sigma_w^{1/2})\|w\|_{H^p_{\Omega_1} \times H^p_{\Omega_2}}\Big], \tag{72}$$
$$p = \min(k+1, r), \quad s = \min(k+1, r-2).$$

Следствие. Из (72) следует, что

$$\|m - m_h\|_{\hat{M}} + \|w - w_h\|_{\hat{W}} \le C_{18}\Big[h^s(1 + \sigma_m^{1/2} + \sigma_w^{-1/2})\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4 \times (H^s_{\Omega_2})^4} + h^{p-2}(1 + \sigma_m^{-1/2} + \sigma_w^{1/2})\|w\|_{H^p_{\Omega_1} \times H^p_{\Omega_2}}\Big].$$

$$\begin{gathered} \|JM_n(m - m_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le \\ \le C_{18}\sigma_m^{-1/2}h^{-1/2}\Big[h^s(1 + \sigma_m^{1/2} + \sigma_w^{-1/2})\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4 \times (H^s_{\Omega_2})^4} + h^{p-2}(1 + \sigma_m^{-1/2} + \sigma_w^{1/2})\|w\|_{H^p_{\Omega_1} \times H^p_{\Omega_2}}\Big]. \\ \|J(w - w_h)\|_{L_{2,\partial\Omega_{12}}} \le \\ \le C_{18}\sigma_w^{-1/2}h^{3/2}\Big[h^s(1 + \sigma_m^{1/2} + \sigma_w^{-1/2})\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4 \times (H^s_{\Omega_2})^4} + h^{p-2}(1 + \sigma_m^{-1/2} + \sigma_w^{1/2})\|w\|_{H^p_{\Omega_1} \times H^p_{\Omega_2}}\Big], \end{gathered} \tag{73}$$
$$p = \min(k+1, r), \quad s = \min(k+1, r-2).$$

Из (73) следует, что сходимость имеет место, если степень аппроксимирующих сплайнов $k \ge 2$, причем скорость сходимости такая же, как для схемы Германна–Мийоси на стыкующихся сетках (см. [11]).

Уточним оценку для $\|w - w_h\|_{H^1_{\Omega_1} \times H^1_{\Omega_2}}$. При доказательстве будем пользоваться методикой из [11]. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta^2 w^d = d(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega,$$
$$w^d|_{\partial\Omega} = \partial_n w^d|_{\partial\Omega} = 0.$$

Пусть $d \in H^{-1}_\Omega$, тогда $w^d \in H^3_\Omega$. Введем обозначение $m^d_{ij} = \partial^2_{ij} w^d$. Имеет место следующая оценка:

$$\|w^d\|_{H^3_\Omega} + \|m^d\|_{(H^1_\Omega)^4} \le A\|d\|_{H^{-1}_\Omega}.$$

В случае наличия интерфейса $\partial\Omega_{12}$, разделяющего Ω на две непересекающиеся подобласти Ω_1 и Ω_2, для $w^d = (w^d_1, w^d_2) \in H^3_{\Omega_1} \times H^3_{\Omega_2}$ и $m^d = (m^d_1, m^d_2) \in H^1_{\Omega_1} \times H^1_{\Omega_2}$, справедливо неравенство

$$\|w^d\|_{H^3_{\Omega_1} \times H^3_{\Omega_2}} + \|m^d\|_{(H^1_{\Omega_1})^4 \times (H^1_{\Omega_2})^4} \le A\|d\|_{H^{-1}_{\Omega_1} \times H^{-1}_{\Omega_2}}, \tag{74}$$

где $d = (d_1, d_2) \in H^{-1}_{\Omega_1} \times H^{-1}_{\Omega_2}$.

Кроме того, предположим, что выполняется условие

$$Q_n(m^d) = (Q_{n_1}(m^d_1), Q_{n_2}(m^d_2)) \in L_{2,\partial\Omega_{12}} \times L_{2,\partial\Omega_{12}}.$$

Пусть (m, w) – решение задачи (30), (31), $w \in \overline{W} \cap (H^r_{\Omega_1} \times H^r_{\Omega_2})$, $m \in \overline{M} \cap ((H^{r-2}_{\Omega_1})^4 \times (H^{r-2}_{\Omega_2})^4)$, $r \ge 7/2$, (m_h, w_h) – решение задачи (40), (41), σ_m выбрано согласно (60), а σ_w – согласно (61).

Нетрудно проверить, используя, в частности, теорему 3, выполнимость следующих вариационных равенств:

$$a'(m^d, m) - b'(m, w^d) = 0, \quad b'(m^d, w) + c(w^d, w) = (d, w), \tag{75}$$

$$a'(m^d, m_h) - b'(m_h, w^d) = 0, \quad b'(m^d, w_h) + c(w^d, w_h) = (d, w_h), \tag{76}$$

$$a'(m, \mu_h) - b'(\mu_h, w) = 0 \quad \forall\mu_h \in M_h, \quad b'(m, \omega_h) + c(w, \omega_h) = \langle q, \omega_h\rangle \quad \forall\omega_h \in W_h, \tag{77}$$

$$a'(m_h, \mu_h) - b'(\mu_h, w_h) = 0 \quad \forall\mu_h \in M_h, \quad b'(m_h, \omega_h) + c(w_h, \omega_h) = \langle q, \omega_h\rangle \quad \forall\omega_h \in W_h. \tag{78}$$

Здесь (d, w) – отношение двойственности между $H^{-1}_{\Omega_1} \times H^{-1}_{\Omega_2}$ и $H^1_{\Omega_1} \times H^1_{\Omega_2}$.

Из (75)–(78) следует, что

$$\begin{gathered} a'(m - m_h, m^d - \mu_h) - b'(m^d - \mu_h, w - w_h) + b'(m - m_h, w^d - \omega_h) + \\ + c(w^d - w_h, w - w_h) = (d, w - w_h) \quad \forall\omega_h \in W_h, \quad \forall\mu_h \in M_h. \end{gathered} \tag{79}$$

Полагая в (79) $\mu_h \in \Pi_h m^d$, $\omega_h = L_h w^d$ и используя леммы 6, 7, теорему 5 и неравенство (74), получаем

$$\begin{gathered} |(d, w - w_h)| \le C_{19}\|(m^d - \Pi_h m^d, w^d - L_h w^d)\| \|(m - m_h, w - w_h)\| \le \\ \le C_{20}h(1 + \sigma_m^{1/2} + \sigma_w^{1/2})(\|w^d\|_{H^3_{\Omega_1} \times H^3_{\Omega_2}} + \|m^d\|_{(H^1_{\Omega_1})^4 \times (H^1_{\Omega_2})^4})\|(m - m_h, w - w_h)\| \le \\ \le C_{21}h(1 + \sigma_m^{1/2} + \sigma_w^{1/2})\|d\|_{H^{-1}_{\Omega_1} \times H^{-1}_{\Omega_2}}\Big[h^s(1 + \sigma_m^{1/2} + \sigma_w^{-1/2})\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4 \times (H^s_{\Omega_2})^4} + h^{p-2}(1 + \sigma_m^{-1/2} + \sigma_w^{1/2})\|w\|_{H^p_{\Omega_1} \times H^p_{\Omega_2}}\Big]. \end{gathered} \tag{80}$$

Из (80) следует, что

$$\begin{gathered} \|w - w_h\|_{H^1_{\Omega_1} \times H^1_{\Omega_2}} \le C_{21}h(1 + \sigma_m^{1/2} + \sigma_w^{1/2}) \times \\ \times\Big[h^s(1 + \sigma_m^{1/2} + \sigma_w^{-1/2})\|m\|_{(H^s_{\Omega_1})^4 \times (H^s_{\Omega_2})^4} + h^{p-2}(1 + \sigma_m^{-1/2} + \sigma_w^{1/2})\|w\|_{H^p_{\Omega_1} \times H^p_{\Omega_2}}\Big]. \end{gathered} \tag{81}$$

Из (81) следует, что скорость сходимости w_h к w в норме $H^1_{\Omega_1} \times H^1_{\Omega_2}$ такая же, как и для случая стыкующихся сеток (см. [11]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Babuska I.* Eroor-bounds for finite element method // Numer. Math. 1971. V. 16. P. 322–333.
2. *Nitsche J.A.* Convergence of nonconforming methods // Math. Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations. New York: Academic Press. 1974. P. 15–53.
3. *Becker R., Hansbo P., Stenberg R.* A finite element method for domain decomposition with non-matching grids // Math. Model. and Numer. analys. 2003. V. 37. № 2. P. 209–225.
4. *Le Tallec P., Sassi T.* Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach // Math. Comp. 1995. V. 64. P. 1367–1396.
5. *Babuska I.* The finite element method with penalty // Math. Comp. 1973. V. 27. P. 221–228.
6. *Aubin J.P.* Approximation des problemes aux limites non homogenes et regularite de la convergence // Calcolo. 1969. V. 6. P. 117–139.
7. *Maslovskaya L.V., Maslovskaya O.M.* The penalty method for grids matching in finite element methods // Izvestiya VUZOV. Mathematics. 2006. № 10. P. 33–43.
8. *Maslovskaya L.V., Maslovskaya O.M.* Some methods of grids matching in finite elements method Kazan. 21–24 September 2007. P. 186–189.
9. *Brezzi F., Raviart P.A.* Mixed finite element methods for 4th order elliptic equations // Numer. Analys. New York: Acad. Press. 1976. № 3. P. 315–338.
10. *Falk R.S., Osborn J.E.* Error estimates for mixed methods R.A.I.R.O // Analys. Numer. 1980. V. 14. № 3. P. 249–277.
11. *Babuska I., Osborn J., Pitkaranta J.* Analysis of mixed methods using mesh dependent norms // Math. Comput. 1980. V. 35. P. 1039–1062.
12. *Maslovskaya L.V.* The behavior of the solution of biharmonic equation in domains with edge points // Differential Equat. 1983. V. 19. № 12. P. 2172–2175.
13. *Ciarlet Ph.* The finite element method for elliptic problems. M.: Mir, 1980.
14. *Brezzi F.* On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers // R.A.I.R.O. R2. 1974. V. 8. P. 129–151.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 696–699

УДК 519.63

НОВЫЕ МЕТОДЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2009 г. Н. В. Широбоков

(454080 Челябинск, пр-т Ленина, 76, Южно-Уральский гос. ун-т)

e-mail: snv@susu.ac.ru

Поступила в редакцию 29.03.2008 г.

Предлагаются новые методы расщепления второго и третьего порядков для дифференциальных уравнений в частных производных эволюционного типа в двумерном пространстве. Вывод методов основан на виде диагонально-неявных методов, применяемых для численного решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Найденные методы являются абсолютно и безусловно устойчивыми. Приведены тестовые расчеты. Библ. 4. Табл. 2.

Ключевые слова: двумерные эволюционные уравнения, методы Рунге–Кутты, диагонально-неявные методы, жесткие задачи, методы расщепления, уравнение Бюргерса.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть в эволюционном уравнении

$$u_t = Lu + f(t, x), \quad u = u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

дифференциальный оператор L является суммой операторов L_1 и L_2. Для численного решения (1) будем применять метод прямых, поэтому в дальнейшем будем считать все перечисленные операторы дискретными аппроксимациями по пространственным переменным. Ниже речь идет только о порядках аппроксимации по временно́й переменной t.

Предлагаются новые методы решения уравнения (1), основанные на идее построения многостадийных диагонально-неявных методов типа Рунге–Кутты, применяемых для решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U^{n+1} = U^n + \tau\sum_{i=1}^{4} b_i(LY_i + f_i), \tag{2}$$

$$Y_i = U^n + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(LY_j + f_j) + \tau a_{ii}(\Lambda_i Y_i + f_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

где

$$U^n \approx u(t_n, x), \quad \tau = t_{n+1} - t_n, \quad f_i = f(t_n + c_i\tau, x), \quad \Lambda_i = L - \tau a_{ii}L_1L_2.$$

Коэффициенты методов a_{ij}, c_i, b_i подбираются так, чтобы порядок аппроксимации метода равнялся 4. Ниже находятся условия достижимости указанного порядка аппроксимации и коэффициенты предложенных методов.

Отметим, что уравнения (3) при любом i имеют расщепимый вид

$$(E - \tau a_{ii}L_1)(E - \tau a_{ii}L_2)Y_i = U^n + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(LY_j + f_j) + \tau a_{ii}f_i,$$

который можно представить через две легко программируемые стадии:

$$(E - \tau a_{ii}L_1)Z_i = U^n + \tau\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(LY_j + f_j) + \tau a_{ii}f_i, \quad (E - \tau a_{ii}L_2)Y_i = Z_i.$$

В дальнейшем предполагается, что $|b_i| \le 1$, $0 \le c_i \le 1$, $0 < a_{ii} < 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

2. УСЛОВИЯ АППРОКСИМАЦИИ

Пусть $U^n = u(t_n\ x)$, $f(t, x) = 0$. Порядок аппроксимации метода (2), (3) равен 4, если $U^{n+1} - u(t_{n+1}, x) = O(\tau^5)$. Применяя к данной разности формулу Тейлора, получаем условия аппроксимации:

$$\sum_{i=1}^{4} b_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\sum_{k=1}^{j} a_{jk} = \frac{1}{6}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\sum_{k=1}^{j} a_{jk}\sum_{s=1}^{k} a_{ks} = \frac{1}{24}, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i a_{ii}^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i\sum_{j=1}^{i} a_{ij}a_{jj}^2 = 0. \tag{5}$$

Поскольку правая часть (1) не зависит явно от времени, то естественно считать, что $c_i = 0$. Заметим, что (4) и первое уравнение (5) совпадают с обычными условиями аппроксимации неявных методов Рунге–Кутты из [1]. Заметным отличием от стандартных условий аппроксимации являются последние два уравнения (5), которые показывают, что не существует методов (2), (3) четвертого порядка аппроксимации с положительными весами b_i.

Для решения системы уравнений (4), (5) достаточно исключить a_{43}, a_{42} из двух последних уравнений (4), а затем из оставшихся уравнений найти b_1, b_2, b_3 и b_4.

При $f(t, x) \ne 0$ к условиям аппроксимации (4), (5) следует добавить еще 7 дополнительных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{4} b_i c_i = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i a_i^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i a_i^3 = \frac{1}{4}, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i\sum_{j=1}^{i} a_{ij}c_j = \frac{1}{6}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\sum_{k=1}^{j} a_{jk}c_k = \frac{1}{24}, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i\sum_{j=1}^{i} a_{ij}c_j^2 = \frac{1}{12}, \quad \sum_{i=1}^{4} b_i a_{ii}^2\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = 0. \tag{7}$$

Здесь только последнее уравнение не совпадает с обычными условиями аппроксимации неявных методов Рунге–Кутты.

Для решения системы уравнений (4)–(7) исключаем последовательно коэффициенты a_{42}, a_{41}, a_{31}, a_{43}, a_{32}, a_{21} из второго уравнения (4), четвертого уравнения (6), третьего уравнения (7), второго уравнения (7), первого уравнения (5), третьего уравнения (4). Затем находим b_1, b_2, b_3, b_4 из первого уравнения (4) и первых трех уравнений (6). Оставшиеся 3 уравнения следует рассматривать как уравнения с неизвестными a_{22}, a_{33}, a_{44} и свободными параметрами a_{11}, c_1, c_2, c_3, c_4: при заданных значениях свободных параметров неизвестные находятся численным методом, например методом Ньютона.

3. ВЫБОР КОЭФФИЦИЕНТОВ

Имеется большой произвол в выборе коэффициентов методов (2), (3), поскольку решение системы уравнений аппроксимации зависит от большого количества свободных параметров. Мы предлагаем выбирать коэффициенты по методике, изложенной в [2], [3].

Рассмотрим модельное уравнение $\frac{du}{dt} = \lambda u$, $\lambda \in C$. Считая, что $L_1 u = \frac{\lambda}{2}u$, $L_2 u = \frac{\lambda}{2}u$, применяем к этому уравнению метод расщепления (2), (3). В результате U^{n+1} будет выражено через U^n с помощью некоторой функции R: $U^{n+1} = R(\lambda\tau)U^n$. Функция комплексного переменного $R(z)$ называется функцией устойчивости метода. Областью устойчивости называется множество тех z, при которых $|R(z)| \le 1$. Метод называется $A(0)$-устойчивым, если его область устойчивости содержит интервал $(-\infty; 0)$.

Определение. Численный метод (2), (3) называется *оптимальным*, если среди всех $A(0)$-устойчивых методов вида (2), (3), имеющих порядок аппроксимации 4, он доставляет минимум функционалу

$$J = \max_{z \in [-1;\, 0]} |R(z) - \exp(z)|.$$

После нахождения решения системы уравнений аппроксимации функционал J становится недифференцируемой функцией свободных параметров. Для нахождения оптимальных методов требуется найти условный минимум этой функции.

При $f(t, x) = 0$ численное решение задачи минимизации функционала J приводит к **методу 1**:

0	0.378			
0	–0.262	0.275		
0	0.141	0.399	0.248	
0	–0.260	–0.208867620659	–0.013042833947	0.710
	0.767275491781	0.171983277531	0.346269015357	–0.285527784669

При $f(t, x) \neq 0$ получаем **метод 2**:

0.288	0.3			
0.47	0.159198955905	0.454580021759		
0.74	0.602883913954	–0.137276161428	0.234222897272	
0.088	1.606006281448	0.836922354580	0.948867365391	0.479152865967
	0.842831210088	–0.587989865477	0.717861789255	0.027296866133

4. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

В качестве тестовых примеров рассмотрим две задачи, связанные с уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(t, x, y), \quad \nu = \mathrm{const} > 0, \quad (x, y) \in V = [0;\, 1] \times [0;\, 1], \quad 0 \le t \le 1.$$

В этих задачах начальные, граничные условия и функция $f(t, x, y)$ подобраны так, чтобы точным решением **задачи 1** являлась функция

$$u(t, x, y) = \left[1 + \exp\left(\frac{2x + 2y - t}{4\nu}\right)\right]^{-1},$$

а **задачи 2** – функция

$$u(t, x, y) = \exp[-10(x - yt)^2].$$

Численные расчеты проводились на равномерной пространственной сетке с шагом $\Delta x = \Delta y = 1/M$ и с постоянным временным шагом $\tau = 1/N$. Производные второго порядка $L_1 u = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $L_2 u = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ были аппроксимированы обычным образом на трехточечном шаблоне. Условия на границе S квадрата V для оптимальных методов вычислялись по формуле $Y_i|_S = u(t, x, y)|_{(x, y) \in S,\, t = t_n + c_i\tau}$, $Z_i|_S = u(t, x, y)|_{(x, y) \in S,\, t = t_n + c_i\tau}$.

Указанные выше методы сравнивались с методом стабилизации из [4, формула (3.22)] (метод ST) и с методом предиктор-корректор из [4, формула (3.42)] (метод PK). Эти методы имеют второй порядок аппроксимации по времени, граничные условия выбирались так же, как в [3].

Результаты расчетов даны в табл. 1. В ней приведена квадратичная погрешность численных расчетов

$$e_2 = \sqrt{\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} (u(1, x_i, y_j) - u_{ij}^N)^2},$$

Таблица 1

Численные методы	Задача 1		Задача 2	
	$\nu = 0.01$, $\tau = 0.05$, $\Delta x = 0.05$	$\nu = 0.001$, $\tau = 0.025$, $\Delta x = 0.025$	$\nu = 0.01$, $\tau = 0.05$, $\Delta x = 0.05$	$\nu = 0.001$, $\tau = 0.05$, $\Delta x = 0.05$
Метод 2	0.0089315	0.0364559	0.0004824	0.0000180
Метод ST	0.0137404	0.1514914	0.0007617	0.0001212
Метод РК	0.0156731	0.1508395	0.0067292	0.0015701

Таблица 2

Методы	$\nu = 0.01$, $\tau = 0.02$, $\Delta x = 0.02$	$\nu = 0.005$, $\tau = 0.01$, $\Delta x = 0.01$	$\nu = 0.001$, $\tau = 0.01$, $\Delta x = 0.002$
Метод 2	0.0080067	0.0065031	0.0143772
Метод ST	0.1412722	0.3098214	0.4684609
Метод РК	0.0098279	0.0186698	117537044.14

где $u(1, x_i, y_j)$ и u_{ij}^N – соответственно, точное и приближенное значение решения в момент времени $t = 1$ в расчетных точках (x_i, y_j).

Приведем также результаты тестирования на двумерном уравнении Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + f(t, x, y), \quad (x, y) \in V = [0; 1] \times [0; 1], \quad 0 \le t \le 1,$$

с точным решением задачи 1.

Здесь операторы $L_1 u = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial x}$, $L_2 u = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial u}{\partial y}$ аппроксимировались стандартным образом:

$$(L_1 u)_{ij}^n = \nu\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} - u_{ij}^{n-1}\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x},$$

а оператор $L = L_1 + L_2$ в (2) и (3) вычислялся “точнее”, например коэффициент u_{ij}^{n-1} в последней формуле заменялся на u_{ij}^n. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Как в случае жесткой задачи ($\nu = 0.01$), так и в случае нежесткой задачи ($\nu = 0.001$) оптимальный метод 2 справляется с решением задач лучше, чем методы стабилизации и предиктор-корректора. Метод 2 имеет более высокий порядок аппроксимации, чем другие методы, и может применяться с бóльшим временны́м шагом.

Отметим также, что метод 2 является не только $A(0)$-устойчивым, но и безусловно устойчивым (см. [4]) в смысле теории устойчивости разностных схем уравнений математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.
2. *Широбоков Н.В.* Диагонально-неявные схемы Рунге–Кутты // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 7. С. 1013–1018.
3. *Широбоков Н.В.* Новые методы расщепления для двумерных эволюционных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 7. С. 1187–1191.
4. *Марчук Г.И.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 700–714

УДК 519.634

АЛГОРИТМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА[1)]

© 2009 г. В. М. Ковеня, А. Ю. Слюняев

(630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6, Ин-т вычисл. технологий СО РАН)

e-mail: kovenya@ict.nsc.ru; slyunyaev@nqs.ru

Поступила в редакцию 01.04.2008 г.
Переработанный вариант 02.09.2008 г.

Для численного решения уравнений Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа предложены неявные конечно-разностные схемы приближенной факторизации и схемы типа предиктор–корректор, основанные на специальном расщеплении операторов. Схемы реализуются скалярными прогонками и безусловно устойчивы. Проведенные расчеты двумерных сложных течений подтвердили достаточную точность предложенных алгоритмов и их эффективность. Библ. 13. Фиг. 9.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса для вязкого газа, неявная разностная схема, метод расщепления.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа являются базовой моделью при решении широких классов задач аэро- и гидродинамики. При различных предположениях о характере исследуемых течений из них легко получить различные упрощенные модели – уравнения Эйлера, пограничного слоя, “параболизованные” уравнения и т.д. Поэтому задача построения эффективных и экономичных численных алгоритмов именно для решения уравнений Навье–Стокса является актуальной и сегодня, несмотря на существование различных численных методов (см., например, [1]–[6]). Решения этих уравнений характеризуются, как правило, наличием подобластей больших градиентов и других особенностей типа пограничных слоев и висячих скачков, отрывных зон и т. д., что накладывает жесткие требования на применяемые численные алгоритмы. Эти алгоритмы должны обладать необходимой точностью, иметь достаточный запас устойчивости, удовлетворять свойствам консервативности и экономичности с возможностью получения решения задачи за разумное время на существующих ЭВМ. Применение явных разностных схем для решения уравнений Навье–Стокса неэффективно в силу жестких ограничений на шаги расчетной сетки, особенно при нахождении стационарного решения методом установления, поэтому наиболее часто используются неявные разностные схемы, свободные от ограничений на устойчивость или имеющие более слабые ограничения. Обзор наиболее употребительных разностных схем приведен, например, в [1–6].

При построении неявных разностных схем обычно используются методы факторизации и расщепления (см. [2]–[7]), позволяющие свести решение исходных многомерных задач к последовательному (или параллельному) решению их одномерных аналогов. Но решение одномерных задач неявными схемами приводит к необходимости обращения матриц, размерность которых возрастает с ростом числа уравнений и увеличением размерности задач, и, как следствие, к значительному росту числа арифметических операций на узел расчетной сетки. Введение расщепления в одномерных задачах позволяет освободиться от этого недостатка и свести реализацию схем на дробных шагах к скалярным прогонкам или к схемам “бегущего счета” как, например, в схемах из [2], [7]. Однако введение расщепления (или факторизации) операторов в исходной многомерной задаче приводит к появлению дополнительных членов в разностной схеме – диссипативных членов и членов более высокого порядка и, как следствие, к ухудшению свойств численного алгоритма. Поэтому при построении экономичных алгоритмов расщепление операторов следует выбирать таким образом, чтобы минимизировать влияние этих членов.

[1)] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (коды проектов № 08-01-00264а), Интеграционный проект СО РАН № 26, 103.

В работе предлагаются разностные схемы, основанные на расщеплении исходных многомерных уравнений Навье–Стокса на их одномерные аналоги с последующим расщеплением одномерных задач таким образом, чтобы реализация схем на дробных шагах сводилась к скалярным прогонкам, т.е. они были экономичны по числу операций на узел сетки. Построенные разностные схемы безусловно устойчивы или имеют слабые ограничения на устойчивость, а влияние расщепления в них минимально, т.е. их свойства были близки к свойствам нефакторизованных схем. Схема минимальной диссипации для решения одномерных задач газовой динамики предложена ранее в [8]. Ниже предлагаются разностные схемы приближенной факторизации и схемы типа предиктор – корректор для численного решения уравнений Навье–Стокса в декартовых и криволинейных координатах. Приведены результаты тестирования предложенных алгоритмов, результаты расчетов течений вязкого газа в плоском канале со вдувом газа с части его поверхности и результаты обтекания тела сложной конфигурации, моделирующие течение в воздухозаборнике.

1. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Построение разностных схем, основанных на расщеплении операторов, изложим вначале для одномерных уравнений газовой динамики и Навье–Стокса в декартовых координатах, а затем дадим их обобщение на многомерный случай. Представим систему уравнений Навье–Стокса в дивергентной форме в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x}, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p - \mu\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ vH - \kappa\dfrac{\partial T}{\partial x} - \mu\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad E = \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right), \quad H = E + p.$$

Для замыкания системы уравнений (1) зададим уравнения состояния

$$p = p(\rho, e), \quad e = e(T) = c_v T \tag{2}$$

и зависимости вязкости и теплопроводности от температуры $\mu = \mu(T)$, $\kappa = \kappa(T)$. При $\mu = \kappa = 0$ система уравнений (1) описывает уравнения газовой динамики. Наряду с консервативной формой представим исходные уравнения (1) в недивергентной и предельно-дивергентной формах:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{B}\mathbf{f} + \mathbf{F} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}. \tag{3}$$

Отметим эквивалентность записи уравнений Навье–Стокса в дивергентном (1) и в не дивергентном (3) виде. Очевидно, выбор вектора **f** задает форму матричных операторов **B**, что дает возможность рассматривать различные классы разностных схем. Для уравнений газовой динамики и уравнений Навье–Стокса искомыми функциями обычно выбирают плотность, скорость, а также давление или температуру, что определяется заданием краевых условий. Однако вид матричных операторов **B** для различных компонент вектора **f** существенно различается. Действительно, для уравнения состояния $p = (\gamma - 1)\rho e$ матрица **B** принимает вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v\dfrac{\partial}{\partial x} & \rho\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ a^2\dfrac{\partial}{\partial x} & v\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial x}\mu\dfrac{\partial}{\partial x} & b^2\dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & c^2\dfrac{\partial}{\partial x} & v\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{\rho c_v}\dfrac{\partial}{\partial x}\kappa\dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$a^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad b^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial T}, \quad c^2 = \frac{p}{\rho c_v},$$

или

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}v & 0 & 0 \\ 0 & v\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial}{\partial x} & a^2\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & c^2\frac{\partial}{\partial x} & v\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\kappa\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_1\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$a^2 = \frac{1}{\rho}, \quad c^2 = \frac{p}{c_v}, \quad k = \frac{\kappa}{c_v}\frac{\partial p}{\partial T}, \quad \mu_1 = \frac{\mu}{\rho c_v}\frac{\partial p}{\partial T}.$$

Заметим, что уравнение неразрывности записано в дивергентном виде, что позволяет упростить вид матричного оператора **B**.

Введем в расчетной области $\Omega = \{0 \le t \le T, 0 \le x \le 1\}$, в которой отыскивается численное решение, разностную сетку с временны́м и пространственным шагами τ, h соответственно. Аппроксимируем конвективные члены и члены с давлением в **B** разностными операторами Λ или $\bar{\Lambda}$ с порядком $O(h^k)$ по таким формулам (см., например, [2]):

для $k = 1$ полагаем (несимметричная противопотоковая аппроксимация) следующее:

$$\text{если} \quad v \le 0, \quad \text{то} \quad \Lambda = \Lambda_+, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda_-,$$

$$\text{если} \quad v \ge 0, \quad \text{то} \quad \Lambda = \Lambda_-, \quad \bar{\Lambda} = \Lambda_+;$$

при симметричной аппроксимации производных для $k = 2$ полагаем

$$\Lambda = \bar{\Lambda} = (\Lambda_- + \Lambda_+)/2.$$

Здесь $\Lambda_\pm = \mp(I - T_{\pm 1})/h$, $T_{\pm 1} f_l = f_{l \pm 1}$ – оператор сдвига. Вторые производные $\frac{\partial}{\partial x}\eta\frac{\partial}{\partial x}$ в матричном операторе **B** аппроксимируем симметричными операторами $\Lambda\eta\Lambda$ со вторым порядком $O(h^2)$. Вектор потоков $\partial\mathbf{W}/\partial x$ в системе уравнений (1) также аппроксимируем симметричным оператором $\Lambda\mathbf{W}_h$ со вторым порядком. С учетом введенных аппроксимаций разностный оператор $\mathbf{B}_h$ аппроксимирует дифференциальный оператор **B** с порядком $O(h^k)$ в (4) по формулам

$$\mathrm{B}_h = \begin{pmatrix} v\Lambda & \rho\Lambda & 0 \\ a^2\bar{\Lambda} & v\Lambda - b_1 & b^2\bar{\Lambda} \\ 0 & c^2\Lambda & v\Lambda - b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad b_1 = \frac{1}{\rho}\Lambda\mu\Lambda, \quad b_2 = \frac{1}{\rho c_v}\Lambda\kappa\Lambda,$$

и в (5) – по формулам

$$\mathrm{B}_h = \begin{pmatrix} \Lambda v & 0 & 0 \\ 0 & v\Lambda - b_1 & a^2\bar{\Lambda} \\ 0 & c^2\Lambda & v\Lambda - b_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad b_1 = \frac{1}{\rho}\Lambda\mu\Lambda, \quad b_2 = \Lambda\kappa\Lambda.$$

В дальнейшем при построении разностных схем аппроксимацию первых производных в операторах $\mathbf{B}_h$ будем задавать несимметричной с учетом знака скорости с первым порядком, а в операторе правых частей $\Lambda\mathbf{W}_h^n$ – симметричной со вторым порядком. Отметим, что при несимметричной аппроксимации первых производных в операторе $\mathbf{B}_h$ для получения безусловно устойчивых схем аппроксимацию членов с давлением в уравнении движения необходимо выбирать по сопряженным к конвективным членам формулам (см. [2]). Известно, что симметричная аппроксимация оператора $\Lambda_j\mathbf{W}_j$ в разностной схеме приводит к осцилляциям решения. Для их подавления введем сглаживающий оператор второго порядка малости, подобно [8], [9], следующего вида:

$$\Lambda W_l = \frac{W_{l+1} - W_{l-1}}{2h} - a\,\mathrm{sign}(v)\varepsilon\frac{W_{l+1} - 2W_l + W_{l-1}}{2h},$$

$$\text{где}\quad \varepsilon = \begin{cases} \dfrac{|W_{l+1} - 2W_l + W_{l-1}|}{|W_{l+1} - W_l| + |W_l - W_{l-1}|}, \\ 0, \quad \text{если} \quad |W_{l+1} - W_l| + |W_l - W_{l-1}| = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Для построения экономичных разностных схем, реализуемых скалярными прогонками, представим матричный оператор $\mathbf{B}_h$ в виде суммы двух операторов:

$$\mathbf{B}_h = \mathbf{B}_h^1 + \mathbf{B}_h^2. \tag{7}$$

Для численного решения системы уравнений Навье–Стокса рассмотрим два класса разностных схем: схему приближенной факторизации и схему предиктор–корректор. Схема приближенной факторизации

$$(\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_h^1)(\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_h^2)\frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n\Lambda\mathbf{W}_h^n, \tag{8}$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\xi^n = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n\Lambda\mathbf{W}_h^n,$$

$$(\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_h^1)\boldsymbol{\xi}^{n+1/2} = \xi^n,$$

$$(\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_h^2)\boldsymbol{\xi}^{n+1} = \xi^{n+1/2},$$

$$\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau\xi^{n+1},$$

аппроксимирует уравнения (1) с порядком $O(\tau + h^2)$ при всех α. При установлении схема консервативна, т.е. $\Lambda\mathbf{W}_h^n = 0$ в силу того, что $\mathbf{A}^{-1} \neq 0$.

Схема предиктор–корректор

$$(\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_h^1)\mathbf{f}^{n+1/4} = \mathbf{f}^n,$$

$$(\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_h^2)\mathbf{f}^{n+1/2} = \mathbf{f}^{n+1/4}, \tag{9}$$

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = \mathbf{W}_h^{n+1/2}$$

аппроксимирует уравнения (1) с порядком $O(\tau^2 + h^2)$ при $\alpha = 0.5 + O(\tau)$ и консервативна при решении нестационарных и стационарных задач, так как основана на аппроксимации с уравнений (1) на этапе корректора в дивергентной форме. Введение расщепления операторов вида (8) приводит к появлению в разностных схемах (8), (9) дополнительных членов $\tau^2\alpha^2\mathbf{B}_h^1\mathbf{B}_h^2$ – диссипативных членов второго порядка малости, отсутствующих в исходной постановке задачи. Поэтому расщепление матричных операторов $\mathbf{B}_h$ необходимо задавать (выбирать) таким образом, чтобы построенные разностные схемы (8) и (9) сохраняли свойство безусловной устойчивости и имели минимальную диссипацию, т.е. минимальное число дополнительных членов. Для выбранного вектора искомых функций $\mathbf{f}$ в (4) существует единственное расщепление матричного оператора $\mathbf{B}_h$ на сумму в форме

$$\mathbf{B}_h^1 = \begin{pmatrix} 0 & \rho\Lambda & 0 \\ a^2\overline{\Lambda} & v\Lambda - b_1 & b^2\overline{\Lambda} \\ 0 & c^2\Lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_h^2 = \begin{pmatrix} \Lambda v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v\Lambda - b_2 \end{pmatrix},$$

при котором диссипативный член $\mathbf{D} = (\tau\alpha)^2\mathbf{B}_h^1\mathbf{B}_h^2$ возникает лишь в уравнении движения. Для вектора $\mathbf{f} = (\rho, v, p)^{\text{т}}$ из (5) также существует единственное расщепление $\mathbf{B}_h$ на их сумму:

$$\mathbf{B}_h^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2\overline{\Lambda} \\ 0 & c^2\Lambda & v\Lambda - b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_h^2 = \begin{pmatrix} \Lambda v & 0 & 0 \\ 0 & v\Lambda - b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и дополнительный диссипативный член $\mathbf{D}$ возникает в уравнении энергии. Спектральным методом нетрудно показать, что для линеаризованных уравнений схемы (8) и (9) обладают свойством безусловной устойчивости при $\alpha = 0.5 + O(\tau)$. Другие расщепления приводят или к большему числу дополнительных членов в разностных схемах, или к потере безусловной устойчивости.

Замечание. При решении уравнений Эйлера в качестве переменных могут выбираться плотность, импульс и давление. Тогда имеем

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}v & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x}v & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & c^2\frac{\partial}{\partial x} & v\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad c^2 = \gamma p,$$

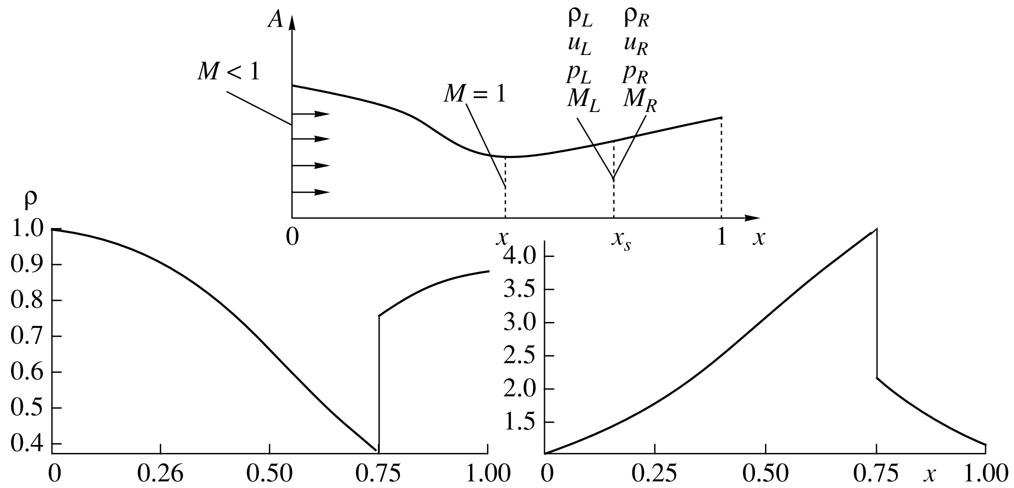
т.е. уравнения неразрывности и движения записываются в дивергентной форме, что может приводить к повышению точности при проведении расчетов. Разностные схемы (8) и (9) при расщеплении матрицы $\mathbf{B}_h$ на их сумму в виде

$$\mathbf{B}_h^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\Lambda} \\ 0 & c^2\Lambda & v\Lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_h^2 = \begin{pmatrix} \Lambda v & 0 & 0 \\ 0 & v\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

обладают теми же свойствами, что и рассмотренные выше расщепления.

2. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Для апробации предложенного численного алгоритма и оценки его эффективности были проведены многочисленные расчеты одномерных и двумерных течений в приближении уравнений газовой динамики и уравнений Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа. Проведенные расчеты подтвердили теоретические оценки по устойчивости схем и ее достаточной точности при аппроксимации исходных уравнений со вторым порядком по времени и пространству. В качестве одномерных задач рассматривались две задачи: численно находилось нестационарное решение задачи о распаде произвольного разрыва и численно (методом установления) отыскивалось стационарное решение задачи о квазиодномерном течении в канале переменного сечения. Обе задачи имеют точное решение и могут служить тестами для проверки алгоритма. Численные решения, полученные по предложенным схемам (8) и (9), практически совпадали между собой и с достаточной точностью совпадали с точными решениями. Для примера ниже приведены распределения плотности и скорости в канале переменного сечения после установления (фиг. 1).



Фиг. 1.

Образующая канала задавалась по формуле $A(x) = A_* + (1 - A_*)\left(1 - \dfrac{x}{x_*}\right)^2$, $0 \le x \le 1$. При $x = x_* = 0.5$ площадь канала $A = A_* = 0.5$ минимальна. На входе в канал при $x = 0$ и выходе из него при $x = 1$ задавался дозвуковой поток с параметрами:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_{x = 0} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0237498 \\ 8.0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_{x = 1} = \begin{pmatrix} 0.8835893 \\ 1.1586268 \\ 7.0315580 \end{pmatrix}.$$

Расчеты проводились на равномерной сетке с числом узлов $N = 401$. Течение подбиралось таким образом, чтобы внутри канала в сечении $x_s = 0.75$ формировался скачок, т.е. точное решение было разрывным. Для заданных параметров течения и формы канала точное значение искомых функций на разрыве слева и справа от него были равны:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_{x = L} = \begin{pmatrix} 0.3727226 \\ 4.3946838 \\ 2.0092313 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}_{x = R} = \begin{pmatrix} 0.7570965 \\ 2.1635258 \\ 5.6638622 \end{pmatrix}.$$

Для схем первого порядка расчеты могли проводиться практически с любыми числами Куранта (например, при $K = 10^3$). Несогласованная аппроксимация производных в предложенных схемах (на дробных шагах с первым порядком и в правой части со вторым в схеме приближенной факторизации или на этапе корректора в схеме предиктор–корректор) приводила к некоторым ограничениям на временной шаг. Наилучшая скорость сходимости схем к стационарному решению достигалась при временных шагах, соответствующих числам Куранта $K \approx 7$.

Как можно видеть на фиг. 1, разностные схемы (8), (9) обладают достаточной точностью, ударная волна размазывается на две-три ячейки (сплошная линия – точное решение, точки – расчет), обе схемы правильно передают скорости движения фронтов, а введенное сглаживание практически устраняет осцилляции решения, присущие схемам второго порядка аппроксимации.

3. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Построение разностных схем в многомерном случае проведем вначале для уравнений газовой динамики, а затем дадим их обобщение и для уравнений Навье–Стокса, в том числе и для уравнений в произвольных криволинейных координатах. Ограничимся для простоты изложения двумерным случаем для уравнения состояния совершенного газа $p = (\gamma - 1)\rho e$. Тогда исходные уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = -\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x_j}, \quad p = p(\rho, e), \tag{10}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p \\ \rho v_2 v_j + \delta_j^2 p \\ v_j H \end{pmatrix}, \quad E = \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right), \quad H = p + E.$$

Наряду с консервативной формой (10) приведем уравнения Эйлера к не дивергентному и предельно дивергентному виду

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{2} \mathbf{B}_j \mathbf{f} + \mathbf{F} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{W}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}, \quad p = p(\rho, e). \tag{11}$$

Для вектора искомых функций $\mathbf{f} = (\rho, v_1, v_2, p)^T$ матричные операторы примут вид

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & \delta_j^1 a^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & \delta_j^2 a^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & \delta_j^1 c^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & \delta_j^2 c^2 \frac{\partial}{\partial x_j} & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \quad c^2 = \gamma p, \quad a^2 = \frac{1}{\rho}.$$

Подобно одномерному случаю представим матричные операторы $\mathbf{B}_j$ в виде

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_j^1 + \mathbf{B}_j^2,$$

где

$$\mathbf{B}_j^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_j^1 a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_j^2 a^2 \\ 0 & \delta_j^1 c^2 & \delta_j^2 c^2 & v_j \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathbf{B}_j^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \frac{\partial}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Расщепление операторов $\mathbf{B}_j$ на их сумму является оптимальным и в многомерном случае, так как приводит к минимальному числу дополнительных членов, возникающих в схемах расщепления при аппроксимации уравнений.

Подобно одномерному случаю аппроксимацию первых производных в операторах $\mathbf{B}_{jh}$ будем задавать несимметричной с учетом знака скорости с первым порядком, а в операторе правых частей $\mathbf{W}_h^n$ – симметричной со вторым порядком. Для численного решения системы уравнений (1) рассмотрим две разностные схемы:

1) схема приближенной факторизации

$$\prod_{j=1}^{2}(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{jh}^{1})(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{jh}^{2})\frac{\mathbf{f}^{n+1}-\mathbf{f}^{n}}{\tau} = -(A_h^{-1})^n\mathbf{W}_h^n, \tag{12}$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах:

$$\xi^n = -(\mathbf{A}_h^{-1})^n\mathbf{W}_h^n,$$
$$(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^{1})\xi^{n+1/4} = \xi^n,$$
$$(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^{2})\xi^{n+1/2} = \xi^{n+1/4},$$
$$(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{2h}^{1})\xi^{n+3/4} = \xi^{n+1/2},$$
$$(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{2h}^{2})\xi^{n+1} = \xi^{n+3/4},$$
$$\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n+\tau\xi^{n+1};$$

2) схема предиктор–корректор

$$\begin{gathered}
(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^{1})\mathbf{f}^{n+1/8} = \mathbf{f}^n,\\
(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^{2})\mathbf{f}^{n+2/8} = \mathbf{f}^{n+1/8},\\
(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{2h}^{1})\mathbf{f}^{n+3/8} = \mathbf{f}^{n+2/8},\\
(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{2h}^{2})\mathbf{f}^{n+1/2} = \mathbf{f}^{n+3/8},\\
\frac{\mathbf{U}^{n+1}-\mathbf{U}^n}{\tau} = \mathbf{W}_h^{n+1/2}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Разностная схема (12) аппроксимирует исходные уравнения с порядком $O(\tau + h^2)$, а схема (13) – с порядком $O(\tau^2 + h^2)$ при $\alpha = 0.5 + O(\tau)$. Как показывает линейный анализ устойчивости, обе схемы являются безусловно устойчивыми при $\alpha \ge 0.5$. Как и в одномерном случае, разностная схема (13) консервативна, а (12) консервативна лишь при установлении. Реализация схемы приближенной факторизации (12) на дробных шагах при нахождении невязок $\xi^{n+l/4}$ или схемы(13) на этапе предиктора при вычислении вектора $\mathbf{f}^{n+l/8}$ сводится к трехточечным скалярным прогонкам. Опишем их реализацию, в частности, на примере схемы (13). На первом ($j = 1$) и третьем ($j = 2$) дробных шагах решение разностных уравнений

$$(\mathbf{I}+\tau\alpha\mathbf{B}_{jh}^{1})\mathbf{f}^{n+(2j-1)/8} = \mathbf{f}^{n+(j-1)/4}$$

сводится к решению системы уравнений

$$\rho^{n+(2j-1)/8} = \rho^{n+(j-1)/4},$$
$$v_1^{n+(2j-1)/8}-v_1^{n+(j-1)/4}+\tau\alpha\delta_j^1a^2\bar{\Lambda}_jp^{n+(2j-1)/8} = 0,$$
$$v_2^{n+(2j-1)/8}-v_2^{n+(j-1)/4}+\tau\alpha\delta_j^2a^2\bar{\Lambda}_jp^{n+(2j-1)/8} = 0,$$
$$p^{n+(2j-1)/8}+\tau\alpha v_j^n\Lambda_jp^{n+(2j-1)/8}+\tau\alpha c^2\Lambda_jv_j^{n+(2j-1)/8} = p^{n+(j-1)/4}.$$

Из первого уравнения системы разностных уравнений следует, что значение плотности на новых шагах сохраняется с предыдущего шага. Исключая компоненты скорости $v_l^{n+(2j-1)/8}$ из последнего уравнения системы, получим разностное уравнение для давления

$$[1+\tau\alpha v_j^n\Lambda_j-\tau^2\alpha^2c^2\Lambda_ja^2\bar{\Lambda}_j]p^{n+(2j-1)/8} = p^{n+(j-1)/4}-\tau\alpha c^2\Lambda_jv_j^{n+(j-1)/4}.$$

Его решение находится трехточечными скалярными прогонками, после чего явно вычисляются компоненты скорости $v_j^{n+(2j-1)/8}$ по каждому направлению x_j. На четных дробных шагах $n + j/4$, $j = 1, 2$, система разностных уравнений $(\mathbf{I} + \tau\alpha\mathbf{B}_{1h}^2)\mathbf{f}^{n+j/4} = \mathbf{f}^{n+(2j-1)/8}$ в скалярном виде примет вид

$$\rho^{n+j/4} + \tau\alpha\Lambda_j v_j^n \rho^{n+j/4} = \rho^{n+(2j-1)/8},$$

$$v_1^{n+j/4} + \tau\alpha v_j^n \Lambda_j v_1^{n+j/4} = v_1^{n+(2j-1)/8},$$

$$v_2^{n+j/4} + \tau\alpha v_j^n \Lambda_j v_2^{n+j/4} = v_2^{n+(2j-1)/8},$$

$$p^{n+j/4} = p^{n+(2j-1)/8}.$$

Решение первых трех уравнений может быть получено скалярными трехточечными прогонками независимо для каждого уравнения, а значение давления на новом слое переносится с предыдущего слоя. Наконец, из последнего уравнения схемы (13) на этапе корректора явно определяются значения всех функций на новом временно́м шаге. Таким образом, решение системы уравнений газовой динамики по схемам предиктор–корректор сводятся к скалярным трехточечным прогонкам. Отметим, что число прогонок по каждому направлению совпадает с числом уравнений в отличие от ранее предложенных схем расщепления (см. [2]), что при переходе с n-го слоя на $n + 1$-й дает экономию по числу арифметических операций на реализацию схемы на 33% в двумерном случае и 25% в трехмерном.

Остановимся на особенностях построения разностных схем для уравнений Навье–Стокса вязкого сжимаемого теплопроводного газа

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{U}}}{\partial t} = \overline{\mathbf{W}} + \overline{\mathbf{G}}, \quad \overline{\mathbf{W}} = -\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\overline{\mathbf{W}}_j}{\partial x_j}, \tag{14}$$

где для $N = 2$

$$\overline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ E \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{W}}_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_j^1 p - \sigma_j^1 \\ \rho v_2 v_j + \delta_j^2 p - \sigma_j^2 \\ v_j H + Q_j - \sum_{l=1}^{2} v_l \sigma_j^l \end{pmatrix}, \quad p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T),$$

$\sigma_j^i = \delta_j^i \lambda \operatorname{div}\mathbf{v} + \mu(\partial v_j/\partial x_i + \partial v_i/\partial x_j)$, $Q_j = -\kappa_0 \partial T/\partial x_j$, $\lambda = \mu' - \frac{2}{3}\mu$, $\kappa = \kappa_0/c_p$, а κ_0, μ', μ – коэффициенты теплопроводности, первой и второй вязкости соответственно, $\mathbf{G}$ – вектор внешних сил.

При проведении численных расчетов, как правило, применяются неравномерные сетки. Это связано с необходимостью сгущения шагов сетки в областях больших градиентов для получения детальной картины течения и повышения точности расчета. Обычно применяют преобразования координат, переводящие исходную расчетную область в единичный квадрат или полосу, а требуемое сгущение координат задается в преобразовании координат (см., например, [7]). Ниже используется этот подход.

Введем в физической расчетной односвязной области Ω, в которой будем отыскивать численное решение, невырожденное преобразование координат

$$q_j = q_j(x_i), \quad \text{где} \quad j, i = 1, 2. \tag{15}$$

Будем полагать, что для него существует обратное преобразование координат $x_j = x_j(q_i)$.

С учетом преобразования система уравнений Навье–Стокса (14) в новых переменных q_j вновь может быть записана в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = -\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial q_j}. \tag{16}$$

Здесь

$$\mathbf{U} = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \rho U_j \\ \rho v_1 U_j + q_j^1 p - G_j^1 \\ \rho v_2 U_j + q_j^2 p - G_j^2 \\ (E+p)U_j + Q_j - R_j \end{pmatrix},$$

а $J = \det\begin{pmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^1 \end{pmatrix} = q_1^1 q_2^1 - q_1^2 q_2^1$ – якобиан преобразования координат, где

$$q_j^l = \frac{\partial q_l}{\partial x_j}, \quad U_j = \sum_{i=1}^{2} q_j^i v_i, \quad G_j^l = \sum_{m=1}^{2} q_m^j \sigma_l^m, \quad R_j = \kappa \sum_{l=1}^{2} q_j^l \frac{\partial T}{\partial q_l}, \quad Q_j = \sum_{m=1}^{1} v_m \sigma_j^m,$$

$$\sigma_j^i = \delta_j^i \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \sum_{l=1}^{2}\left(q_i^l \frac{\partial v_j}{\partial q_l} + q_j^l \frac{\partial v_i}{\partial q_l}\right), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} q_j^l \frac{\partial v_j}{\partial q_l}, \quad \lambda = \mu' - \frac{2}{3}\mu.$$

Представим систему уравнений Навье–Стокса (16) в недивергентном виде:

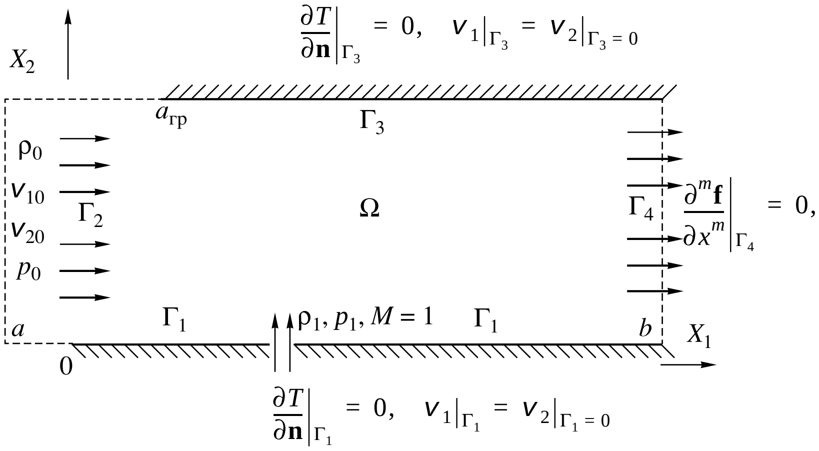
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} \mathbf{B}_j \mathbf{f} = \mathbf{F}. \tag{17}$$

Здесь матричные операторы $\mathbf{B}_j$ содержат конвективные члены, члены с давлением и вязкие члены, содержащие лишь повторные производные по каждому направлению q_j, а вектор $\mathbf{F}$ – оставшиеся члены уравнений. Выберем в качестве искомых функций плотность, компоненты скорости и давление. Тогда матричные операторы $\mathbf{B}_j$ из (17) примут вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_1 \\ v_2 \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_j} U_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_j \frac{\partial}{\partial q_j} - G_j^1 & 0 & a_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & 0 & U_j \frac{\partial}{\partial q_j} - G_j^2 & a_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} \\ 0 & c_j^1 \frac{\partial}{\partial q_j} & c_j^2 \frac{\partial}{\partial q_j} & U_j \frac{\partial}{\partial q_j} - G_j^3 \end{pmatrix},$$

где

$$a_j^l = \frac{q_j^l}{\rho}, \quad c_j^l = \gamma p q_j^l, \quad G_j^l = \frac{1}{\rho}\sum_{m=1}^{2} q_m^j \frac{\partial}{\partial q_j} b_m^l q_l^j \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad G_j^3 = \sum_{m=1}^{2} q_m^j \frac{\partial}{\partial q_j} \kappa q_m^j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{\rho}.$$



Фиг. 2.

Аппроксимируем исходные операторы $\mathbf{B}_j$ разностными операторами $\mathbf{B}_{jh}$ с порядком $O(h^k)$ и подобно одномерному случаю введем расщепление операторов $\mathbf{B}_{jh}$ на их сумму:

$$\mathbf{B}_{jh}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_j^1\bar{\Lambda}_j \\ 0 & 0 & 0 & a_j^2\bar{\Lambda}_j \\ 0 & c_j^1\Lambda_j & c_j^2\Lambda_j & U_j^n\Lambda_j - G_{jh}^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{jh}^2 = \begin{pmatrix} \Lambda_j U_j^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_j^n\Lambda_j - G_{jh}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_j^n\Lambda_j - G_{jh}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что вид матричных операторов $\mathbf{B}_{jh}^l$ в новых переменных подобен виду этих же операторов в декартовых координатах. Тогда для численного решения уравнений Навье–Стокса (16) в новых переменных можно использовать разностные схемы (12) или (13), причем их реализация на дробных шагах с точностью до коэффициентов совпадает с реализацией схем в декартовых координатах.

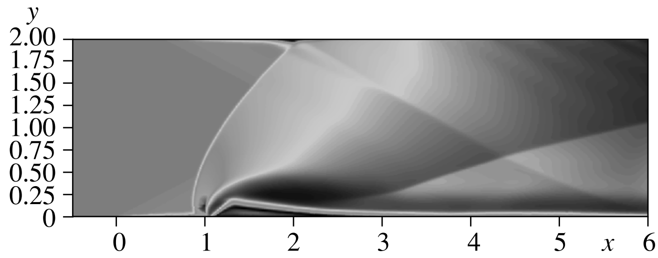
4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Для определения эффективности предложенных алгоритмов в многомерном случае и оценки точности были проведены расчеты двумерных задач, в которых имелись подобласти больших градиентов, такие как скачки уплотнения и отрывные зоны. В качестве первой задачи изучалось течение газа в канале, а в качестве второй – сверх- и гиперзвуковые течения газа около элементов модельного летательного аппарата (ЛА).

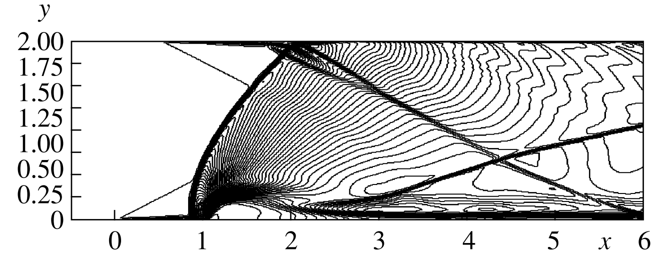
4.1. Задача о течении газа в канале

В качестве примеров расчетов приведены результаты моделирования течений газа в канале при скорости набегающего потока $M_0 = 2.25$ при наличии вдува газа с части нижней поверхности. Решение данной задачи характеризуется наличием сильного головного скачка уплотнения около источника вдува газа, а также сложной картиной взаимодействия ударных волн за источником возмущения.

Для удобства численного интегрирования и анализа результатов исходные уравнения Навье–Стокса были приведены к безразмерному виду. В качестве безразмерных параметров были выбраны следующие величины: высота канала L, скорость набегающего потока v_0, плотность газа ρ_0, температура T_0. Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = L\rho_0 v_0/\mu_0$ определялось по параметрам набегающего потока. Здесь и далее коэффициент динамической вязкости задавался функцией от температуры по степенному закону $\mu = T^\omega$, где $0.5 \le \omega \le 1.0$ (в расчетах $\omega = 0.76$), теплопроводность λ – по за-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

кону $\lambda = \mu' - \frac{2}{3}\mu$, где μ' – второй коэффициент вязкости, μ – динамический коэффициент вязкости, в расчетах μ' полагается равным нулю.

Стационарное решение задачи находилось в приближении уравнений вязкого газа в преобразованных координатах (15) по разностной схеме вида (12). Расчетная область (фиг. 2), в которой находилось решение задачи, представляет собой прямоугольник размером 6.5×2.0 единиц, внутри прямоугольника находится канал. Начало расчетной области находится в точке $x_1 = -0.5$, нижняя стенка канала начинается в точке $x_1 = 0.0$, верхняя стенка канала смещена относительно нижней стенки вправо на $x_1 = 0.5$.

На границах расчетной области задавались следующие краевые условия: на границе Γ_2 при $x_1 = -0.5$ – невозмущенный сверхзвуковой поток, параллельный оси x_1, на линиях $x_2 = 0$, $-0.5 \le x_1 \le 0.0$ и $x_2 = 2$, $-0.5 \le x_1 \le 0.5$ – условия симметрии

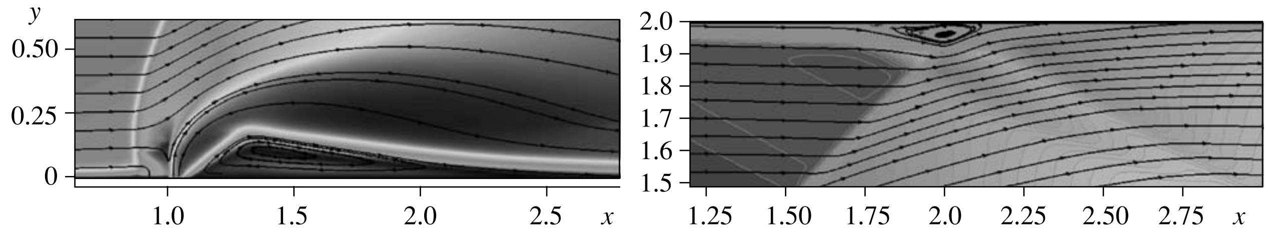
$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \quad v_2 = 0,$$

на стенках канала на Γ_1, Γ_3 – условия прилипания и тепловой изоляции $v_j = 0$, $\partial T/\partial x_2 = 0$, на выходе из канала на Γ_4 – мягкие условия

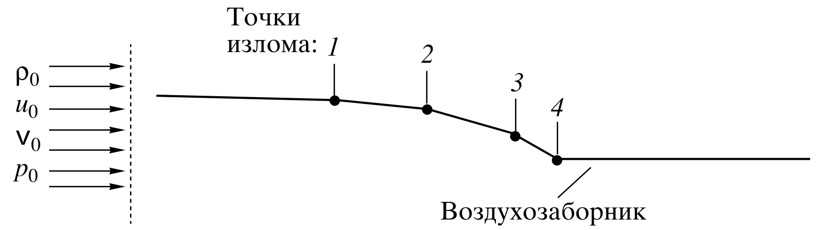
$$\frac{\partial \mathbf{f}^m}{\partial x_2^m} = 0, \tag{18}$$

где $m = 1$ или 2. На нижней стенке канала задавался источник вдува газа, начинающийся в точке $x = 1.0$, шириной 0.05 единицы. Скорость вдува газа полагалась звуковой, т.е. $M_1 = 1.0$, газ вдувался с параметрами $\rho_1 = 4\rho_0$, $p_1 = 4p_0$, $T_1 = T_0$. Характеристики набегающего потока выбирались следующими: число Рейнольдса $Re = 10^4$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.72$, $\omega = 0.76$. В качестве начального распределения (при $t = 0$) внутри области задавалось несогласованное распределение параметров потока – постоянные скорость, плотность и температура.

Решение задачи отыскивалось методом установления, критерием установления полагалось выполнение условия $(\rho^{n+1} - \rho^n)/\tau\rho^n \le 10^{-4}$ во всех узлах расчетной области. Расчет выполнен на сетке 521×161 узел. Установление к стационарному решению достигалось за $\approx 7 \times 10^3$ итераций при несогласованном задании начального поля, а при задании в качестве начальных условий ре-



Фиг. 5.



Фиг. 6.

шения задачи при других параметрах число итераций до сходимости уменьшалось в ≈3 раза (до $\approx 2.5 \times 10^3$ итераций).

На фиг. 3 и 4 приведено распределение поля скорости и изолинии плотности газа при числе M = 2.25.

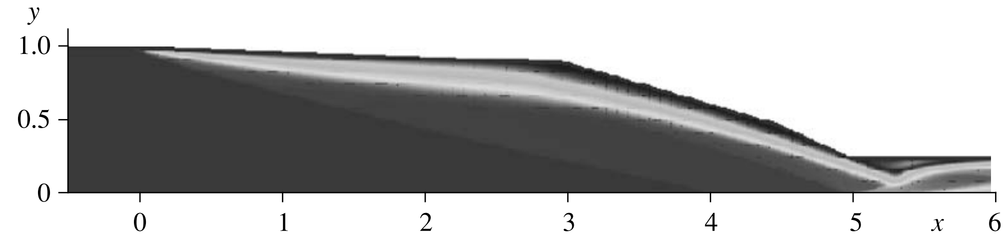
На рисунках четко выделяются слабые скачки от кромок канала и хорошо виден головной скачок уплотнения, возникающий перед источником вдува газа. На нижней стенке за источником вдува (фиг. 5а) возникает протяженная зона возвратного течения, за которой развивается пограничный слой. Над зоной отрыва и пограничного слоя формируется висячий скачок уплотнения, который ниже по течению взаимодействует со скачком, отраженным от верхней стенки канала. Возникший от вдува скачок уплотнения взаимодействует с пограничным слоем около верхней стенки канала и инициирует его отрыв (фиг. 5б).

В процессе взаимодействия падающего головного скачка и оторвавшегося, а затем присоединившегося пограничного слоя возникает система из двух скачков и волны разрежения между ними. На некотором расстоянии от верхней стенки скачки пересекаются, образуя один скачок, движущийся к нижней стенке. Отметим, что только использование схемы второго порядка аппроксимации позволило получить детальную картину взаимодействующих скачков без применения специальных алгоритмов их выделения. Попытки получения данной картины течения по схеме первого порядка не увенчались успехом даже на очень мелких сетках. Некоторые результаты расчетов при других параметрах набегающего потока приведены в [12].

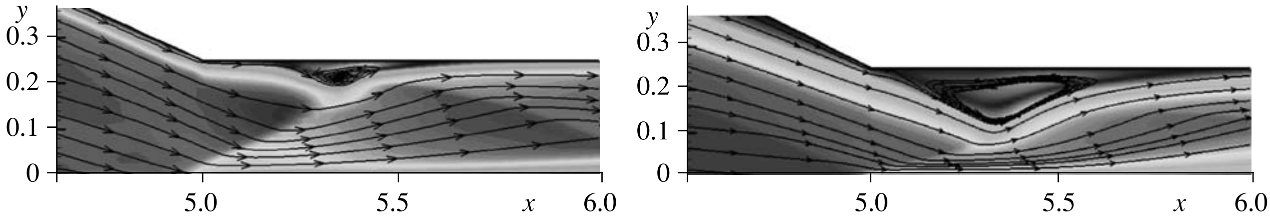
4.2. Течение газа около элементов модельного летательного аппарата

Во второй серии расчетов было проведено моделирование течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа около элементов летательного аппарата, взятого из [13]. Аппарат имеет заостренную переднюю кромку (фиг. 6). Его нижняя образующая до входа в канал воздухозаборника имеет три излома: первый в точке $x = 3.0$, второй в точке $x = 3.8$, третий в точке $x = 4.5$. Первая часть несущей поверхности имеет наклон 1°54′, вторая 15°49′, третья 16°, четвертая 24°. Ось x направим по нижней стенке плоского канала воздухозаборника, а за характерный линейный масштаб L возьмем ординату носка обтекаемого тела (передней точки верхней образующей воздухозаборника). При таком масштабировании высота канала воздухозаборника равна 0.25. Ниже приводятся некоторые результаты расчетов течений при сверх- и гиперзвуковых скоростях набегающего потока только около несущей части летательного аппарата – расчетной области Ω_1 (фиг. 6), включая и течение в канале.

Как и ранее, стационарное решение задачи находилось в приближении уравнений Навье–Стокса в преобразованных координатах (15) по разностной схеме вида (12) методом установле-



Фиг. 7.



Фиг. 8.

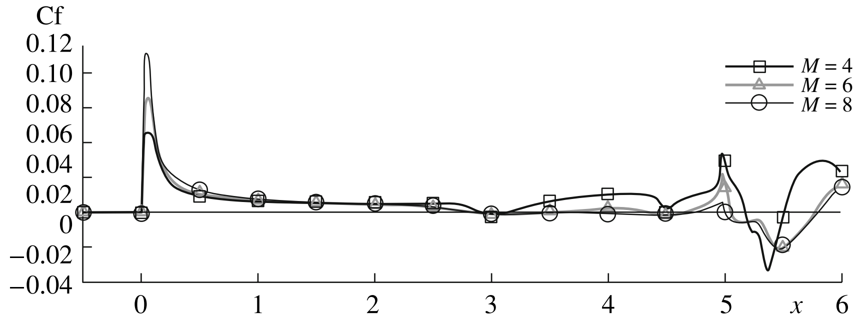
ния. На границе области при $x_1 = -0.5$, $0 \le x_2 \le 1.0$ и $x_2 = 1$, $-0.5 \le x_1 \le 0$ задавался невозмущенный сверхзвуковой поток, параллельный оси x_1, на стенках канала – условия прилипания $v_1 = v_2 = 0$ и тепловой изоляции $\partial T/\partial \mathbf{n} = 0$, а на границе $x_2 = 0$, $-0.5 \le x_1 \le 5.0$ и на выходе из канала – мягкие краевые условия (18). Число Маха набегающего потока варьировалось в пределах M_0 от 4 до 8, число $Re = 10^4$, $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.72$, $\omega = 0.76$. При выполнении расчетов разностные сетки варьировались. Основные расчеты выполнены на сетке 261×161 узел. Расчеты на более подробных сетках не приводили к отличиям в численном решении более чем на 2%. В качестве начального распределения задавались невозмущенные значения скорости, плотности и температуры, соответствующие их значениям во входном сечении. Как правило, для получения стационарного решения от несогласованных начальных данных на выбранной сетке требовалось $\approx 6 \times 10^3$ итераций, при задании в качестве начального распределения решения, полученного для других параметров (например, с другим числом Маха), установление с точностью до 0.01% достигалось за $\approx 2 \times 10^3$ итераций.

На фиг. 7 представлено распределение поля скорости при обтекании головной части ЛА сверхзвуковым потоком газа при M = 8. Из рисунка видно, что у несущей поверхности ЛА в области излома *1* образуется зона развитого пограничного слоя, на передней кромке формируется головной скачок уплотнения, в окрестности точки *1* излома образующей поверхности возникает висячий скачок. Заметим, что при меньших числах Маха набегающего потока область пограничного слоя тоньше.

Значительно различаются картины течения при входе в канал воздухозаборника. Как видно из фиг. 8а, при M = 4 от нижней стенки канала формируется скачок уплотнения, а около верхней стенки канала образуется зона отрыва пограничного слоя, которая занимает 16% от высоты канала $\approx 0.04L$. При увеличении скорости набегающего потока в 2 раза (M = 8) толщина области возвратного течения значительно увеличивается и достигает ≈ 50 (фиг. 8б).

На фиг. 9 представлены распределения коэффициента поверхностного трения, по которым можно оценить зависимость длины отрывной зоны от различных чисел Маха. Из данного рисунка видно, что в первой ($x = 3.0$) и третьей ($x = 4.5$) точках излома несущей поверхности наблюдаются режимы, близкие к отрыву пограничного слоя (значения коэффициента трения близки в нулю).

Увеличение области возвратного течения, по-видимому, приводит к существенному уменьшению ширины эффективного сечения канала воздухозаборника и к образованию конфигурации течения типа течения в “жидком сопле Ловаля” (фиг. 8б). При прохождении потока через сужение канала происходит резкое торможение потока газа, после чего происходит быстрое восстановление скорости до величин, близких к значениям на входе в канал воздухозаборника. Для по-



Фиг. 9.

лучения более детальной картины течения внутри канала воздухозаборника необходимо проведение расчетов на более подробных сетках.

ВЫВОДЫ

Приведенные результаты моделирования внутренних течений в канале с возникновением зон ударного перехода, их взаимодействием между собой, со стенами канала и зонами отрыва пограничного слоя характеризуют эффективность предлагаемого метода и его достаточную точность даже без привлечения алгоритмов сгущения сеток. Пример моделирования сверх- и гиперзвуковых течений около ЛА показал применимость алгоритма для расчета комбинированных задач аэродинамики (внутренних и внешних) и пригодность его для расчета обтекания тел сложной формы. Простота реализации схемы на дробных шагах, возможность изменения параметров потока и шагов сетки в широком диапазоне (на основании большого запаса устойчивости схемы), экономичность алгоритма делают его эффективным инструментом для исследования проблем аэродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Флетчер К.* Численные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
2. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, СО, 1981.
3. Computer and Fluids // Spec. Iss., 6th Internat. Symp. on CFD. 1998. V. 27. № 5–6.
4. Computational Fluid Dynamics Journal // Spec. Iss. dedicated to prof. H. Daiguji. 1999. V. 8. № 2.
5. Computational Fluid Dynamics Journal // 4th Asian Workshop on CFD. 2004. V. 13. № 2.
6. Computer and Fluids // Spec. Iss. dedicated to prof. R. Peuret. 2002. V. 31. № 4–7.
7. *Ковеня В.М.* Разностные методы решения многомерных задач: Курс лекций. Новосибирск: НГУ, 2004.
8. *Ковеня В.М., Лебедев А.С.* Модификации метода расщепления для построения экономичных разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 6. С. 886–897.
9. *Ковеня В.М., Слюняев А.Ю.* Модификации алгоритмов расщепления для решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12. № 3. С. 71–86.
10. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
11. *Лебедев А.С., Черный С.Г.* Практикум по численному решению уравнений в частных производных. Новосибирск: НГУ, 2000.
12. *Ковеня В.М., Слюняев А.Ю.* Моделирование сверхзвуковых течений газа в канале // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12. Спец. вып. 4. С. 41–50.
13. *He Yuanyuan, Le Jialing, Ni Hongli.* Numerical research of airframe/engine integrative hypersonic vehicle // Internat. Conf. Methods of Aerophys. Res. 2004. Proc. Part II. P. 94–100.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 715–721

УДК 519.642

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

© 2009 г. Ц. Э. Терджян**, А. Х. Хачатрян*

(*0019 Ереван, ул. Маршала Баграмяна, 24[а], ИМНАН Армения; **0009 Ереван, ул. Теряна, 74, Гос. Аграрный ун-т)

e-mail: aghavard@hotbox.ru; terjyan1973@yahoo.com

Поступила в редакцию 10.06.2008 г.

Рассматривается одна система интегральных уравнений свертки на полупрямой с необратимым матричным интегральным оператором, символ которого имеет нуль четвертого порядка. Применение метода специальной факторизации дает возможность выделить необратимые факторы из исходного необратимого оператора и свести систему к новой системе с невырожденным интегральным оператором. Доказана структуральная теорема существования решения исходной системы. Библ. 8.

Ключевые слова: необратимый оператор, факторизация, символ оператора, система интегральных уравнений Винера–Хопфа, матричный интегральный оператор, структуральная теория существования решения.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая система интегральных уравнений с разностным 2×2 матричным ядром:

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt, \tag{1}$$

или в операторном виде:

$$(J - \hat{K}) f = g.$$

Здесь $g = (g_1, g_2)^т$ и $f = (f_1, f_2)^т$ – заданные и искомые вектор-столбцы (т – знак транспонирования), J – единичный оператор, $\hat{K}$ – матричный оператор Винера–Хопфа вида

$$(\hat{K} f)(x) = \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt, \tag{2}$$

где

$$K(x) = (K_{ij}(x))_{i,\, j = 1,\, 2} = \int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{p}} G_{ij}(p) dp. \tag{3}$$

Здесь $G(p) = (G_{ij}(p))_{i,\, j = 1,\, 2}$ – знакопеременная измеримая матриц-функция, удовлетворяющая условиям

$$G(p) p \in L_1^2(0, \infty), \quad 2\int_0^\infty G(p) p dp = I, \tag{4}$$

где $I = (\delta_{ij})_{i,\, j = 1}^2$ – единичная матрица.

Из (4) следует, что

$$K \in L_1^2(-\infty, +\infty), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)dx = I.$$

Равенство (4) играет существенную роль в наших дальнейших рассмотрениях.

Уравнение (1), кроме самостоятельного математического интереса, имеет важные применения в физической кинетике и в других приложениях естествознания (см. [1]–[3]).

Уравнение (1) представляет собой систему интегральных уравнений с необратимым матричным интегральным оператором, символ которого имеет нуль четвертого порядка. Такая высокая степень вырождения усложняет прямое численное решение системы (1).

В настоящей работе с применением метода специальной факторизации удается свести исходную систему к новой системе с невырожденным матричным интегральным оператором. Накладывая дополнительные условия на ядро, доказывается структуральная теорема существования решения системы (1), (3), (4).

1. НЕОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАТОРА $J - \hat{K}$

Обозначим через C_l пространство непрерывных на $[0, +\infty)$ функций, обладающих конечным пределом $f(+\infty)$ в $+\infty$, $C_0 \subset C_l$ состоит из функций, для которых $f(+\infty) = 0$. Пусть E – одно из следующих банаховых пространств $L_p(0, +\infty)$, $p \geqslant 1$, $M(0, +\infty) = L_\infty(0, +\infty)$, C_0 и др. Пусть $E^2 = E \times E$ – пространство двумерных вектор-столбцов с элементами из пространства E. Пусть $\hat{K} = (K_{ij})$ – матричный интегральный оператор Винера–Хопфа вида (2)–(4). Вопрос об обратимости оператора $J - \hat{K}$ в пространстве E^2 и другие его важные свойства определяются с помощью символа $I - \overline{K}(s)$, где $\overline{K}(s)$ – преобразование Фурье от K:

$$\overline{K}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)e^{isx}dx.$$

(Преобразование Фурье понимается по компонентам.) Согласно теории систем интегральных уравнений Винера–Хопфа (см. [4]–[6]) для обратимости оператора $J - \hat{K}$ в любом из пространств E^2 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) символ оператора не вырожден, т.е.

$$\det[I - \overline{K}(s)] \neq 0, \quad s \in (-\infty, +\infty); \tag{5}$$

б) частные индексы равны нулю, т.е.

$$\chi = \operatorname{ind}\det[I - \overline{K}(s)] = 0. \tag{6}$$

Однако из равенства (4) следует, что условие (5) для системы (1) в точке $s = 0$ нарушается, т.е. $\det[I - \overline{K}(0)] = 0$. Из равенства (4) следует, что оператор $J - \hat{K}$ необратим в E^2, поэтому система (1) выпадает из общей теории систем интегральных уравнений Винера–Хопфа (ИУВХ) и относится к особым случаям этих систем.

Ниже будет показано, что специфика системы (1) позволяет свести ее к новой системе с обратимым матричным интегральным оператором, символ которого не вырожден в точке $s = 0$.

2. СПЕЦИАЛЬНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ СИМВОЛА

Здесь и ниже рассмотрим построение специальной факторизации для оператора $J - \hat{K}$.

Предложенный подход исходит из факторизационной интерпретации метода “Albedoshifting” (см. [7], [8]).

Из (3) и (4) имеем

$$I - \bar{K}(s) = \int_0^{\infty} \frac{p^2 s^2 2pG(p)}{1 + p^2 s^2} dp. \tag{7}$$

Пусть $\beta > 0$. Из (7) имеем

$$I - \bar{K}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \beta^2} \int_0^{\infty} \frac{[1 + p^2 s^2 - (1 - p^2 \beta^2)] 2pG(p)}{1 + p^2 s^2} dp = \frac{s^2}{s^2 + \beta^2}\left[I - \int_0^{\infty} \frac{2pG(p)h(p)dp}{1 + p^2 s^2}\right], \tag{8}$$

где

$$h(p) = h(p, \beta) = 1 - p^2 \beta^2. \tag{9}$$

Таким образом,

$$I - \bar{K}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \beta^2}[I - \bar{T}(s)], \tag{10}$$

где

$$T(x) = (T_{ij}(x))_{i,\, j = 1,\, 2} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{|x|}{p}} G_{ij}(p) h(p) dp. \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть функции* $K_{ij} \in L_1(-\infty, +\infty)$, $i, j = 1, 2$. *Тогда для того чтобы* $T_{ij} \in L_1(-\infty, \infty)$, *достаточно, чтобы имело место*

$$m_2(K_{ij}) :\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K_{ij}(x) x^2 dx < +\infty \quad \left(\textit{или}\ \ 2\int_0^{\infty} |G_{ij}(p)| p^3 dp < +\infty,\ i, j = 1, 2\right).$$

Доказательство. Предположим, что $K_{ij} \in L_1(-\infty, +\infty)$, $m_2(K_{ij}) < +\infty$, $i, j = 1, 2$. При произвольном $r > 0$ имеем

$$\int_0^r |T_{ij}(x)| dx \le \int_0^{\infty}\int_0^r e^{-\frac{x}{p}} dx |G_{ij}(p)||h(p)| dp = \int_0^{\infty} |G_{ij}(p)| p |1 - \beta^2 p^2| \left(1 - e^{-\frac{r}{p}}\right) dp \le$$

$$\le \int_0^{\infty} |G_{ij}(p)| p |1 - \beta^2 p^2| dp < +\infty.$$

Из произвольности $r > 0$ следует, что $T_{ij} \in L_1(0, +\infty)$. Но, с другой стороны, поскольку T_{ij} (при каждом i, j) – четная функция, то

$$\exists \int_{-\infty}^0 |T_{ij}(x)| dx = \int_0^{\infty} |T_{ij}(x)| dx < +\infty,$$

откуда, в свою очередь, следует, что

$$T_{ij} \in L_1(-\infty, +\infty).$$

Лемма доказана.

Нетрудно проверить, что

$$\bar{T}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) dx = \begin{pmatrix} 1 - a_{11}\beta^2 & -a_{12}\beta^2 \\ -a_{21}\beta^2 & 1 - a_{22}\beta^2 \end{pmatrix},$$

$$A = (a_{ij}) = 2\int_0^\infty G_{ij}(p)p^3dp < +\infty.$$

Предполагается, что $\det A \neq 0$. Следовательно,

$$\det(I - \overline{T}(0)) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\beta^4 \neq 0. \qquad (12)$$

Доказана

Лемма 2. *Символ* $I - \overline{K}(s)$ *допускает разложение вида* (10), *где* $I - \overline{T}(s)$ – *символ оператора* $J - \hat{T}$ *с ядром* (11); *более того, в точке* $s = 0$ *имеет место условие* (12).

3. ФАКТОРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРА $J - \overline{K}$

Ниже разложение (10) будет использовано для построения факторизации для оператора $J - \hat{K}$.

Введем нижние и верхние вольтерровы матричные операторы $\hat{U}^{\pm} = \begin{pmatrix} \hat{U}^{\pm} & 0 \\ 0 & \hat{U}^{\pm} \end{pmatrix}$:

$$(\hat{U}^{-}f)(x) = \beta\int_x^\infty e^{-\beta(t-x)}f(t)dt, \quad (\hat{U}^{+}f)(x) = \beta\int_0^x e^{-\beta(x-t)}f(t)dt. \qquad (13)$$

Символы операторов $I - \overline{U}^{\pm}$ задаются формулами

$$I - \overline{U}^{\pm}(s) = I - \begin{pmatrix} \dfrac{\beta}{\beta \mp is} & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{\beta \mp is} \end{pmatrix} = \left(\frac{\mp is}{\beta \mp is}\delta_{mj}\right)_{m,\, j\, =\, 1,\, 2}. \qquad (14)$$

Правую часть в (10) можно переписать в виде матричного произведения

$$I - \overline{K}(s) = \lfloor I - \overline{U}^{-}(s)\rfloor[I - \overline{T}(s)]\lfloor I - \overline{U}^{+}(s)\rfloor. \qquad (15)$$

Рассмотрим произведение операторов

$$(J - \hat{U}^{-})(J - \hat{T})(J - \hat{U}^{+}), \qquad (16)$$

где операторы (матричные) $J - \hat{U}^{\pm}$ определяются согласно (13), а $\hat{T}$ – интегральный оператор Винера–Хопфа с ядром $T(x - t)$. Из общих свойств ИУВХ (см. [4]) следует, что произведение (16) является интегральным оператором Винера–Хопфа. Из результатов работы [4] следует, что символ оператора $J - \hat{K}$ равен произведению символов операторов, фигурирующих в (15). Поэтому символ оператора (16) совпадает с символом оператора $J - \hat{K}$.

Следовательно, имеет место равенство

$$J - \hat{K} = (J - \hat{U}^{-})(J - \hat{T})(J - \hat{U}^{+}). \qquad (17)$$

Итак, доказана

Теорема 1. *Оператор* $J - \hat{K}$ *допускает разложение* (17), *где* $\beta > 0$ – *произвольное число. Операторы* $\hat{U}^{\pm} = \hat{U}^{\pm}_{\beta}$ *и ядро* T *определяются согласно* (13) *и* (11) *соответственно.*

Отметим следующее обстоятельство: операторы $J - \hat{U}^{-}$ и $J - \hat{U}^{+}$ взаимно сопряжены, а оператор $\hat{T}$ сохраняет свойство самосопряженности исходного оператора.

4. О СВОЙСТВАХ ЯДРА ОПЕРАТОРА $\hat{T}$

Операторы $J - \hat{U}^{\pm}$, фигурирующие в (16), необратимы в пространстве E^2, поскольку $I - \overline{U}(0) = 0$. Из (12) видно, что символ оператора $J - \hat{T}$ в точке $s = 0$ для $\forall\beta > 0$ отличен от нуля. Отсутствие других нулей функции $F(s) = \det[I - \overline{T}(s)]$ можно установить, если предположить, что исходный символ $I - \hat{K}(s)$ удовлетворяет условию (5) при $s \neq 0$. Однако сказанное выше вовсе не означает, что оператор $J - \overline{T}$ обратим в пространстве E^2. Для нормы скалярного ИУВХ имеет место оценка (см. [4])

$$\|\hat{W}\|_E \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |W(x)|dx.$$

Пусть $f \in E^2$ – произвольная вектор-функция. Рассмотрим следующую вектор-функцию:

$$\varphi = \hat{T}f,$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^{\text{т}}$; $f = (f_1, f_2)^{\text{т}}$; $\hat{T} = (T_{ij})$ – матричный интегральный оператор. Оценим норму функции в каждом из пространств E^2. Нетрудно убедиться, что в любом из пространств E^2 имеет место оценка

$$\|\varphi\|_{E^2} \leqslant \max(\lambda(\beta);\, \mu(\beta))\|f\|_{E^2}, \tag{18}$$

где

$$\lambda(\beta) = \|\hat{T}_{11}\|_E + \|\hat{T}_{21}\|_E, \quad \mu(\beta) = \|\hat{T}_{12}\|_E + \|\hat{T}_{22}\|_E. \tag{19}$$

Для того чтобы интегральный (матричный) оператор $\hat{T}$ был сжимающим достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sigma = \max(\lambda(\beta);\, \mu(\beta)) < 1. \tag{20}$$

Условие (20) можно обеспечить за счет выбора свободного параметра $\beta > 0$.

5. ПРИМЕНЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ (1), (3), (4)

Рассмотрим уравнение (1). Факторизация (17) сводит его к последовательному решению следующих связанных уравнений:

$$(J - \hat{U}^-)\rho = g, \tag{21}$$

$$(J - \hat{T})F = \rho, \tag{22}$$

$$(J - \hat{U}^+)f = F. \tag{23}$$

Раскрывая операторное уравнение (21), получаем два несвязанных уравнения для определения элементов вектора $\rho = (\rho_1, \rho_2)^{\text{т}}$:

$$\rho_k(x) = g_k(x) + \beta\int_x^{\infty} e^{-\beta(t-x)}\rho_k(t)dt, \quad k = 1, 2. \tag{24}$$

Легко проверить, что решения этих уравнений имеют вид

$$\rho_k = g_k(x) + \beta\int_x^{\infty} g_k(t)dt, \quad k = 1, 2. \tag{25}$$

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 3. *Пусть* $0 \leqslant g \in L_1^2(0, \infty)$ – *произвольная измеримая функция. Тогда для того, чтобы имело место*

$$\rho(x) = \int_x^\infty g(t)dt \in L_1^2(0, \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$m_1(g) := \int_0^\infty xg(x)dx < +\infty.$$

Теперь рассмотрим вопрос о решении уравнения (22). В силу того, что в пространстве E^2 оператор $\hat{T}$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $\sigma < 1$, то уравнение (22) имеет решение, которое обладает следующим свойством:

$$F \in L_1^2(0, +\infty), \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 0. \tag{26}$$

Наконец, решение исходного уравнения (23) имеет вид

$$f(x) = \beta\int_0^x F(t)dt + F(x). \tag{27}$$

Итак справедлива

Теорема 2. *Пусть* $0 \leqslant g \in L_1^2(0, \infty)$ *и* $\exists\beta > 0$, *при котором выполняется условие* (20). *Тогда система интегральных уравнений Винера–Хопфа* (1), (3), (4) *имеет решение следующей структуры:*

$$f(x) = F(x) + \varphi(x), \quad F \in L_1^2(0, \infty), \quad \varphi \in C_l(0, +\infty).$$

6. ПРИЛОЖЕНИЕ В ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

Задача температурного скачка в кинетической теории газов в рамках линеаризованной модели Больцмана является одной из центральных задач физической кинетики (см. [1]). Эта задача сводится к особой (не эллиптической) системе интегральных уравнений свертки на полупрямой с разностным 2×2-матричным знакопеременным ядром (см. [2], [3]):

$$K_{ij}(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{p}} G_{ij}(p)dp, \tag{28}$$

где

$$G_{11}(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}p}e^{-p^2}, \quad G_{22}(p) = \frac{2}{3p\sqrt{\pi}}e^{-p^2}\left[\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right],$$

$$G_{12}(p) = G_{21}(p) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}p}e^{-p^2}\left(p^2 - \frac{1}{2}\right), \quad 0 < \alpha < \frac{1}{4}.$$

Тогда имеем

$$T_{ij}(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{p}} G_{ij}(p)(1 - p^2\beta^2)dp. \tag{29}$$

Легко можно проверить, что условия (4) и (12) выполняются. Рассмотрим следующие интегралы:

$$J_n = \int_0^\infty e^{-p^2} p^{2n} dp = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}.$$

Ядерные функции T_{ij} выражаются через J_n. Используя очевидное неравенство $|a||b| \leqslant (a^2+b^2)/2$, с учетом (19), (29) имеем

$$\lambda(\beta) \leqslant 2\int_0^\infty |G_{11}(p)||1-p^2\beta^2|pdp + 2\int_0^\infty |G_{12}(p)||1-p^2\beta^2|pdp =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-p^2}|(1-p^2\beta^2)|dp + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-p^2}\left|p^2-\frac{1}{2}\right||1-p^2\beta^2|dp < \frac{3}{8}(1+\alpha)\beta^4 - \frac{(1+\alpha)}{2}\beta^2 + \frac{3}{4}\alpha + 1,$$

$$\mu(\beta) \leqslant 2\int_0^\infty |G_{22}(p)||1-p^2\beta^2|pdp + 2\int_0^\infty |G_{21}(p)||1-p^2\beta^2|pdp =$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-p^2}\left[\left(p^2-\frac{1}{2}\right)^2+1\right]|(1-p^2\beta^2)|dp + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-p^2}\left|p^2-\frac{1}{2}\right||1-p^2\beta^2|dp <$$

$$< \frac{(15+3\alpha)}{8}\beta^4 - \frac{(7+3\alpha)}{6}\beta^2 + \frac{3}{4}\alpha + 1.$$

Можно убедиться, что при значениях $\alpha \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$ существуют значения β, для которых $\sigma =$ $= \max(\lambda(\beta); \mu(\beta)) < 1$.

Например, если $\alpha = 0, 1$, то $\beta \in (0.45137; 0.740072)$.

Замечание. Предложенный нами подход основан на выделении необратимых факторов $J - \hat{U}^{\pm}$ из исходного необратимого оператора $J - \hat{K}$. Качественные свойства решения задачи определяются свойствами оператора $J - \hat{U}^{\pm}$, которые найдены не приближенно, а точно. Свойство самосопряженности оператора $\hat{T}$ играет важную роль в вопросе эффективного численного решения уравнения (22).

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Н.Б. Енгибаряну и Х.А. Хачатряну за обсуждения и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cercignani C.* The Boltzmann equation and it's applications. New York: Springer, 1988.
2. *Barichello L.B., Siewert C.E.* The temperature-jump problem in rarefied gas dynamics // EJAM. 2000. № 11. P. 353–364.
3. *Andriyan S.M., Khachatryan A.Kh.* On one problem in physical kinetics // Comput. Math. Math. Physics. 2005. V. 45. № 11. P. 1982–1989.
4. *Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техн. Матем. анализ. 1984. Т. 22. С. 175–242.
5. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи матем. наук. 1968. Т. 13. № 2. С. 3–72.
6. *Енгибарян Н.Б., Арабаджян Л.Г.* Системы интегральных уравнений Винера–Хопфа и нелинейные уравнения факторизации // Матем. сб. 1984. Т. 124. № 6. С. 189–216.
7. *Ivanov V.V., Rybicki G.B., Kasaurov A.M.* Albedo shifting, harward smithsonian center for astrophysics. Preprint Series № 3478, 1992.
8. *Енгибарян Н.Б., Енгибарян Б.Н.* О методе сдвига альбедо // Астрофиз. 1995. Т. 38. Вып. 3. С. 417–431.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 722–733

УДК 519.634

ЛУЧЕВЫЕ ПРИФРОНТОВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ В КАЧЕСТВЕ СРЕДСТВА ВЫДЕЛЕНИЯ РАЗРЫВОВ В ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТАХ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ[1)]

© 2009 г. Е. А. Герасименко*, А. В. Завертан**

*(*690041 Владивосток, ул. Радио, 5, ИАПУ ДВО РАН; **690600 Владивосток, ул. Гоголя, 39а, ВГУЭС)*

e-mail: ekaterina_gerasi@mail.ru; alex_zavertan@mail.ru

Поступила в редакцию 10.04.2008 г.

Положение поверхностей разрывов скоростей и интенсивности разрывов на них на каждом временно́м шаге расчетов динамики деформирования предлагается определять посредством включения в неявную конечно-разностную схему расчетов асимптотического (лучевого) разложения решения за этими фронтальными поверхностями. Указывается метод построения лучевых разложений, основывающийся на рекуррентной записи геометрических и кинематических условий совместности разрывов производных функций, терпящих разрыв на движущейся поверхности. Предлагаемое иллюстрируется на простейшем примере антиплоского движения несжимаемой упругой среды. Библ. 19. Фиг. 7. Табл. 1.

Ключевые слова: методы выделения разрывов, лучевой метод, нелинейная упругость, ударные волны, задачи газовой динамики.

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритмические приемы указания на каждом временно́м шаге газодинамических расчетов положения поверхностей разрывов и величин разрывов разработаны, и их изложение составляет часто содержание отдельных параграфов в обобщающих изданиях (см., например, [1]–[4]). Однако в динамике деформируемых тел аналогичные приемы чаще всего оказываются неприменимыми. Связано это с тем, что распространение граничных возмущений по деформируемым телам представляет собой совокупность, по существу, двух взаимодействующих процессов – распространения деформаций изменения объема (как в газовой динамике) и формы. При этом закономерности в распространении сдвиговых деформаций оказываются принципиально отличными от более изученных закономерностей в распространении объемных деформаций (см. [5]). Указанные усложнения по сравнению с газовой динамикой привели к тому, что алгоритмы выделения разрывов в динамике деформируемых тел до настоящего времени не рассматривались, а расчеты проводились на основе различных схем сквозного счета (см. [6]–[8]). В тех случаях, когда нестационарность задачи особенно существенна, от схем сквозного счета приходится отказываться и проблема выделения разрывов становится первостепенной. В [9], [10] для этой цели предложено использовать прифронтовые асимптотические разложения. Одним из наиболее эффективных способов построения таких разложений является лучевой метод, с историей развития которого можно познакомиться в обзорной публикации [11]. Метод обрел популярность в 60–80-е годы прошлого века в теории пластического течения, гиперболической теории теплообмена, динамических задачах теории упругости, при исследовании слабых волн в нелинейно-упругой среде. Позднее было разработано обобщение метода на случай ударного деформирования (см. [12], [13]). Оказалось, что построенные таким образом прифронтовые разложения решений позволяют отслеживать положение волновых фронтов в процессе численного решения краевых задач ударного деформирования. Такой прием уже реализован для плоских ударных волн в [10]. В настоящей статье предлагается алгоритм выделения поверхностей разрывов деформаций в численных расчетах неодномерных задач динамики деформирования с криволинейными и расходящимися лучами. Иллюстрацией предлагаемому алгоритму служит решение двумерной задачи об анти-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-009).

плоском движении несжимаемой нелинейно-упругой среды, аналитическое решение которой лучевым методом подробно изложено в [18].

1. ОБЩИЕ МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ СРЕДЫ

Система уравнений адиабатического движения нелинейно-упругой несжимаемой изотропной среды имеет вид

$$\begin{gathered}
v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_i),\\
2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \quad \sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{jk}}(\delta_{ik} - 2\alpha_{ik}),\\
W = (a-\mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \ldots,\\
\dot{u}_i = \partial u_i/\partial t, \quad u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j,
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где x_i, $i = 1, 2, 3$, – декартовы прямоугольные координаты; u_i и v_i – компоненты векторов перемещения и скорости точек среды; α_{ij} и σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Эйлера–Коши; $\rho = \mathrm{const}$ – плотность среды; W – функция упругого потенциала среды с малой нелинейностью, заданная ее разложением в ряд Тейлора в окрестности свободного состояния; $I_1 = \alpha_{ii}$ и $I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}$ – инварианты тензора деформаций; p_0 – добавочное гидростатическое давление; μ, a, b, κ, θ, c, d, k – упругие модули среды. Условие несжимаемости позволяет остановиться на изучении только сдвиговых деформационных процессов, исключая объемное деформирование. Последнее тем более интересно, что в литературе исследование поперечных волн представлено скромнее, нежели продольных.

Уравнения системы (1.1) представляют собой законы сохранения в дифференциальной форме и выполняются всюду, где входящие в них функции непрерывны. Далее рассматривается случай, когда терпят разрыв производные первого порядка от поля перемещений, т.е. задача включает ударные волны. На ударных волнах сохраняют силу интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии, которые принимают вид динамических условий совместности:

$$\begin{gathered}
[\rho(v_i\nu_i - G)] = 0,\\
[\sigma_{ij}]\nu_j = \rho^{+}(\overset{+}{v}_j\nu_j - G)[v_i],\\
\overset{+}{\sigma}_{ij}[v_i]\nu_j = \rho^{+}(\overset{+}{v}_i\nu_i - G)\left(\frac{[v_i][v_i]}{2} - [e]\right) - [q_j]\nu_j,
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где ν_i – единичная нормаль к поверхности разрывов Σ, направленная в сторону движения Σ; индексами + и – обозначены значения величин перед волной и за ней соответственно; G – скорость движения Σ в направлении нормали. Помимо (1.2), разрывы функций на Σ связаны с разрывами их производных, геометрическими и кинематическими условиями совместности

$$\begin{gathered}
[f_{,i}] = \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]\nu_i + a^{\alpha\beta}[f]_{,\beta}g_{ij}x_{j,\alpha},\\
[\dot{f}] = \frac{\delta[f]}{\delta t} - \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]G,\\
[f] = f^{+} - f^{-}, \quad \frac{\partial f}{\partial \nu} = f_{,i}\nu_i, \quad \alpha, \beta = 1, 2,
\end{gathered} \tag{1.3}$$

а с разрывами производных k-го порядка – рекуррентными соотношениями (см. [14], [15]). В (1.3) g_{ij} и $\alpha^{\alpha\beta}$ – компоненты пространственной и поверхностной метрики; обозначению f могут соответствовать компоненты любого тензорного поля на Σ или в пространстве, а греческими индексами после запятой обозначена операция ковариантного дифференцирования по поверхностной координате, $\delta/\delta t$ – операция дифференцирования по времени в данной точке, Σ – дельта-производная (см. [16]).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что несжимаемая среда, в которой имеется цилиндрическая полость с направляющей L_0 в форме эллипса

$$x_1 = f_1(y) = a_1\cos y,$$
$$x_2 = f_2(y) = a_2\sin y, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2\pi,$$

до момента удара не деформирована. Начиная с момента $t = 0$, в среде осуществляется антиплоское движение

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u(x_1, x_2, t),$$

вызванное ударным воздействием на L_0, которое приводит к граничным перемещениям

$$u|_{L_0} = F(y, t), \quad F(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k F}{\partial t^k}\bigg|_0 t^k \approx v_0(y)t + \frac{a_0(y)t^2}{2} + \ldots, \tag{2.1}$$

где y – параметр вдоль L_0. Будем считать, что граничное условие (2.1) задано симметрично относительно координатных осей, поэтому рассмотрим решение только в первом квадранте $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$. Условие $v_0 \neq 0$ приводит к мгновенному формированию поперечной ударной волны $\Sigma(t)$ с момента времени $t = 0$, которая отделяет зону деформирования от зоны покоя в материале.

Из (1.2) находим скорость ударной волны $G(y, t)$ в виде асимиптотического ряда по ее интенсивности:

$$G = C\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\left(\frac{\omega_1}{C}\right)^{2k}\right) = C\left(1 + \gamma_1\frac{\omega_1^2}{C^2} + \ldots\right), \quad C = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

$$\gamma_1 = \frac{a + b + \kappa + d}{2\mu}, \quad \omega_1 = [\dot{u}].$$

Следствием непрерывности поля перемещений на фронте $\Sigma(t)$ будет условие

$$u|_{\mathbf{r}_\Sigma} = 0, \quad \mathbf{r}_\Sigma(y, t) = \mathbf{r}_0(y) + \int_0^t G(y, \xi)\boldsymbol{\nu}(y, \xi)d\xi, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{r}_0(y)$ и $\mathbf{r}_\Sigma(y, t)$ – радиус-векторы некоторой точки с постоянным значением параметра y в начальный и текущей моменты времени соответственно. Отметим, что в двумерном случае компоненты вектора нормали $\boldsymbol{\nu}(y, t)$ – неизвестные величины, которые должны быть определены совместно с полем перемещений и геометрией фронта волны в процессе решения задачи. Из (1.1) следует система уравнений двумерного антиплоского движения среды

$$\begin{gathered} u_{,11}\{1 + 3\alpha u_{,1}^2 + \alpha u_{,2}^2\} + u_{,22}\{1 + \alpha u_{,1}^2 + 3\alpha u_{,2}^2\} + 4\alpha u_{,12}u_{,1}u_{,2} + \ldots = \frac{\ddot{u}}{C^2} + \ldots, \\ -p_{,1} - 2\varphi_1 u_{,11}u_{,1} - 2\varphi_2 u_{,12}u_{,2} - (1 + \gamma)(u_{,12}u_{,2} + u_{,22}u_{,1}) + \ldots = 0, \\ -p_{,2} - 2\varphi_1 u_{,22}u_{,2} - 2\varphi_2 u_{,12}u_{,1} - (1 + \gamma)(u_{,11}u_{,2} + u_{,12}u_{,1}) + \ldots = 0, \\ \alpha = \frac{a + b + \kappa + d}{\mu}, \quad \gamma = \frac{a}{\mu}, \quad \varphi_1 = \frac{\beta}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{2b + \kappa}{2\mu}, \quad p = \frac{p_0 - a + \mu}{\mu}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Отметим, что система трех уравнений (2.3) содержит только две неизвестные функции $u(x_1, x_2, t)$ и $p(x_1, x_2, t)$ и тем самым переопределена. Следовательно, антиплоское движение в несжимаемой среде осуществимо только при тождественном равенстве двух последних уравнений. Это возможно при специальных дополнительных соотношениях между константами упругого потенциала, результатом выполнения которых становится представление (см. [17], [18])

$$W = -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu)I_1I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + \frac{b - \mu}{4}I_2^2 + \left(b - \mu - \frac{3}{2}\theta\right)I_1^2I_2 + \ldots,$$

где μ, b, θ, c – независимые константы среды, через которые выражены остальные.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЛУЧЕВОЕ РЕШЕНИЕ

За фронтом ударной волны Σ поле перемещений будем искать в виде лучевого ряда

$$u^I(s, y, t) \approx u^0(s, y, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\omega_k(y, t_\Sigma)(t - t_\Sigma)^k, \quad t \geq t_\Sigma,$$
$$t_\Sigma(y, s) = \int_0^s G^{-1}(y, \xi)d\xi, \quad \omega_k = \left[\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right], \tag{3.1}$$

в котором s – лучевая координата (расстояние от $\Sigma(0)$ до данной точки пространства вдоль луча), y – координата эйконала, индексами 0 и I обозначено решение в области перед Σ и за Σ соответственно.

Для ударных волн коэффициенты лучевого ряда ω_k в (3.1) удовлетворяют бесконечной системе нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\delta\omega_k/\delta t = g_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.2}$$

которая представляет собой записанное в разрывах на Σ уравнение движения (2.3) относительно функции $u(s, y, t)$ и его частные производные по времени соответствующего порядка. В отличие от уравнений затухания для линеаризованных задач или для слабых волн, система (3.2) не рекуррентна и, следовательно, не допускает последовательного интегрирования. Адаптировать традиционный лучевой метод для задач ударного деформирования удалось благодаря включению в (3.1) дополнительных разложений разрывов в ряды по δ-производным в окрестности нуля (см. [12]):

$$\omega_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\delta^n\omega_{k0}}{\delta t^n}t^n, \quad \frac{\delta^n\omega_{k0}}{\delta t^n} = \left.\frac{\delta^n\omega_k}{\delta t^n}\right|_{t=0}. \tag{3.3}$$

Такой подход предполагает, что решение строится для малых послеударных времен. Уравнения (3.2) справедливы также при $t = 0$ и совместно с (3.1), (3.3) и граничным условием (2.1) составляют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно постоянных ω_{k0} лучевого ряда.

Например, для выполнения краевого условия (2.1), выраженного усеченным рядом до квадратичных слагаемых включительно, достаточно ограничиться нулевым шагом метода и определить только величины ω_{10}, ω_{20}, $\delta\omega_{10}/\delta t$. Если краевое условие (2.1) включает больше слагаемых, то потребуется и большее число шагов метода.

Первое уравнение из (3.2), записанное при $t = 0$, дает связь между искомыми величинами

$$\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} = \frac{2\alpha C^{-2}\omega_{10}^2\omega_{20} + 2H_0C\omega_{10}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\frac{\omega_{10}^2}{C^2}\right)}{2 + 3\alpha\omega_{10}^2C^{-2} - \frac{3}{2}\alpha^2\omega_{10}^4C^{-4} + \ldots} + \ldots,$$
$$H_0 = \frac{-a_1a_2}{2(a_1^2\sin^2 y + a_2^2\cos^2 y)^{3/2}}, \tag{3.4}$$

где H_0 – средняя кривизна $\Sigma(0)$, e – эксцентриситет эллипса. С учетом разложений (3.3) расстояние вдоль луча определяется по формуле

$$s = \int_0^t G(y, \xi)d\xi = C\left(1 + \frac{\alpha}{2}\omega_{10}^2C^{-2}\right)t + \alpha C^{-1}\omega_{10}\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}\frac{t^2}{2} + \ldots. \tag{3.5}$$

Обращение зависимости (3.5) позволяет определить момент, когда фронт ударной волны прошел через данную точку пространства:

$$t_\Sigma(s, y) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\frac{\omega_{10}^2}{C^2} + \ldots\right)\frac{s}{C} - \frac{\alpha}{2}C^{-2}\omega_{10}\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}\left(\frac{s}{C}\right)^2 + \ldots. \tag{3.6}$$

Лучевое разложение (3.1) для функции перемещения за волной с учетом (3.3)–(3.6) перепишется в виде

$$u(s, y, t) = -\left(\omega_{10} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}t_\Sigma + \ldots\right)(t - t_\Sigma) - \frac{1}{2}(\omega_{20} + \ldots)(t - t_\Sigma)^2 + \ldots, \tag{3.7}$$

где многоточием обозначены слагаемые более высокого порядка. Сопоставление краевого условия (2.1) с рядом (3.7), в котором s нужно положить равным 0, показывает, что $\omega_{10} = -V_0$, $\omega_{20} = -a_0$. Геометрия волнового фронта задается соотношениями, следующими из (2.2):

$$x_i = f_i(y, t) = f_{i0}(y) + \int_0^t G(y, \xi)\nu_i(y, \xi)d\xi, \tag{3.8}$$

причем компоненты вектора нормали ν_i зависят от текущего положения волнового фронта, что не позволяет проинтегрировать (3.8). Аппроксимируя ν_i рядами, аналогичными (3.3), и вычисляя их δ-производные согласно правилам, определенным в [14], получаем

$$\begin{gathered}\nu_i(y, t) = \nu_{i0} + \frac{\delta\nu_{i0}}{\delta t}t + \ldots, \\ \nu_{10} = \frac{a_2}{a_1\sqrt{a_2^2 - a_1^2\operatorname{tg}^2 y}}, \quad \nu_{20} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2\operatorname{ctg}^2 y}}, \\ \left.\frac{\delta\nu_i}{\delta t}\right|_{t=0} = -\frac{\alpha}{C}a^{11}x_{i,y}\omega_1\omega_{1,y}\big|_{t=0} = -\frac{\alpha}{C}a_0^{11}x_{i0,y}\omega_{10}\omega_{10,y}.\end{gathered} \tag{3.9}$$

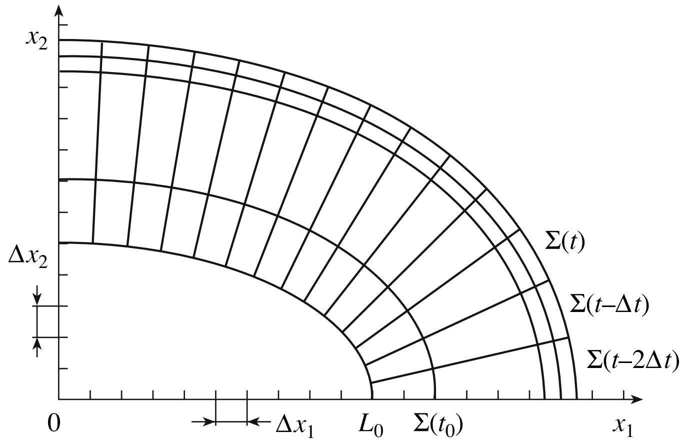
Подставляя (3.9), (3.3) и (3.4) в (3.8), после несложных преобразований получаем параметрическое представление поверхности разрывов $\Sigma(t)$:

$$\begin{gathered}x_1 = f_1(y, t) = a_1\cos y + \frac{a_2C\left(1 + \frac{\alpha}{2}\omega_{10}^2C^{-2}\right)t}{\sqrt{a_2^2 + a_1^2\operatorname{tg}^2 y}} + \\ + \left\{\frac{\alpha a_1^2\omega_{10}\omega_{10,y}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\omega_{10}^2C^{-2}\right)}{a_1^2 + a_2^2\operatorname{ctg}^2 y} + \frac{\alpha a_2\omega_{10}\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}}{C\sqrt{a_2^2 + a_1^2\operatorname{tg}^2 y}}\right\}\frac{t^2}{2} + \ldots, \\ x_2 = f_2(y, t) = a_2\sin y + \frac{a_1C\left(1 + \frac{\alpha}{2}\omega_{10}^2C^{-2}\right)t}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2\operatorname{ctg}^2 y}} + \\ + \left\{-\frac{a_2^2\alpha\omega_{10}\omega_{10,y}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\omega_{10}^2C^{-2}\right)}{a_2^2 + a_1^2\operatorname{tg}^2 y} + \frac{\alpha a_1\omega_{10}\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}}{C\sqrt{a_1^2 + a_2^2\operatorname{ctg}^2 y}}\right\}\frac{t^2}{2} + \ldots.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Таким образом, построено аналитическое решение задачи, пригодное для малых послеударных времен. Расчет процесса дальнейшего деформирования проведем численно, определяя на каждом шаге новое положение поверхности разрывов с помощью прифронтового лучевого разложения и используя аналитическое решение (3.7) в качестве начальных данных для численной схемы.

4. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РАСЧЕТОВ

Полагаем, что до момента $t = t_0$ (см. фиг. 1) лучевое решение (3.7) является приемлемым, а положение волнового фронта описывается зависимостями (3.10). Начиная с момента $t = t_0$ уравне-



Фиг. 1.

ния движения интегрируем численно с помощью неявной конечно-разностной схемы. Для этого введем равномерную прямоугольную сетку с шагами Δt и Δx_1, Δx_2 по времени и пространству соответственно, в узлах которой и будем искать решение. Входящие в уравнения частные производные заменим их конечно-разностными аппроксимациями по соседним узлам сетки:

$$u_{,1} \approx \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2, t) - u(x_1 - \Delta x_1, x_2, t)}{2\Delta x_1},$$

$$u_{,2} \approx \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2, t) - u(x_1, x_2 - \Delta x_2, t)}{2\Delta x_2},$$

$$u_{,11} \approx \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t) + u(x_1 - \Delta x_1, x_2, t)}{\Delta x_1^2},$$

$$u_{,22} \approx \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t) + u(x_1, x_2 - \Delta x_2, t)}{\Delta x_2^2},$$

$$\begin{aligned} u_{,12} \approx \frac{1}{4\Delta x_1 \Delta x_2}(u(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, t) - u(x_1 + \Delta x_1, x_2 - \Delta x_2, t) - \\ - u(x_1 - \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, t) + u(x_1 - \Delta x_1, x_2 - \Delta x_2, t)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

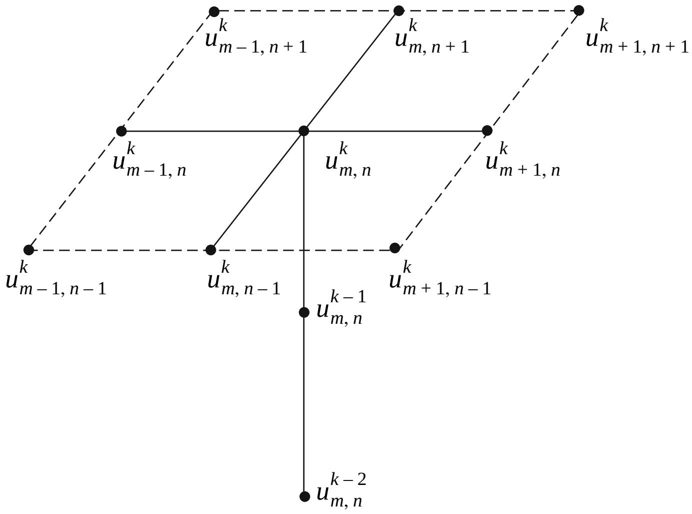
$$\dot{u} \approx \frac{u(x_1, x_2, t) - u(x_1, x_2, t - \Delta t)}{\Delta t},$$

$$\ddot{u} \approx \frac{u(x_1, x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t - \Delta t) + u(x_1, x_2, t - 2\Delta t)}{\Delta t^2}.$$

Подставляя (4.1) в первое из уравнений (2.3), получаем следующую разностную схему:

$$\frac{u^k_{m+1,n} - 2u^k_{m,n} + u^k_{m-1,n}}{\Delta x_1^2}\left[1 + 3\alpha\frac{(u^k_{m+1,n} - u^k_{m-1,n})^2}{4\Delta x_1^2} + \alpha\frac{(u^k_{m,n+1} - u^k_{m,n-1})^2}{4\Delta x_2^2}\right] +$$

$$+ \frac{u^k_{m,n+1} - 2u^k_{m,n} + u^k_{m,n-1}}{\Delta x_2^2}\left[1 + \alpha\frac{(u^k_{m+1,n} - u^k_{m-1,n})^2}{4\Delta x_1^2} + 3\alpha\frac{(u^k_{m,n+1} - u^k_{m,n-1})^2}{4\Delta x_2^2}\right] +$$



Фиг. 2.

$$+\frac{\alpha(u^k_{m+1,n+1}-u^k_{m+1,n-1}-u^k_{m-1,n+1}+u^k_{m-1,n-1})}{4\Delta x_1^2\Delta x_2^2}(u^k_{m+1,n}-u^k_{m-1,n})(u^k_{m,n+1}-u^k_{m,n-1}) = \tag{4.2}$$

$$= \frac{u^k_{m,n}-2u^{k-1}_{m,n}+u^{k-2}_{m,n}}{C^2\Delta t^2},$$

$$u^k_{m,n} = u(m\Delta x_1, n\Delta x_2, k\Delta t), \quad m, n, k = 0, 1, 2\dots.$$

Вычисления по схеме (4.2) должны производиться на шаблоне, показанном на фиг. 2. Для узлов, лежащих на координатных осях, недостающие значения перемещений в точках $(-\Delta x_1, n\Delta x_2)$ и $(m\Delta x_1, -\Delta x_2)$ получим из соображений симметрии:

$$u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2) = u(x_1, -x_2).$$

Положение фронта ударной волны на каждом временно́м слое, границу L_0, а также заданные на них функции будем интерполировать кубическими сплайнами с числом узлов, много меньшим числа пересечений сплайна с линиями сетки. Пусть, для простоты, узлы сплайнов, соответствующие функциям, заданным на одной границе, совпадают. Также учтем, что при движении $\Sigma(t)$ значение параметра y, соответствующие любому узлу, остается неизменным.

Поскольку на пересечении фронта с Ox_1 функции $f_1(y, t)$ и $f_2(y, t)$ имеют максимум и перегиб соответственно, а на пересечении с Ox_2 меняются ролями, то граничные условия для сплайнов, интерполирующих координатные функции волнового фронта, должны быть заданы следующим образом:

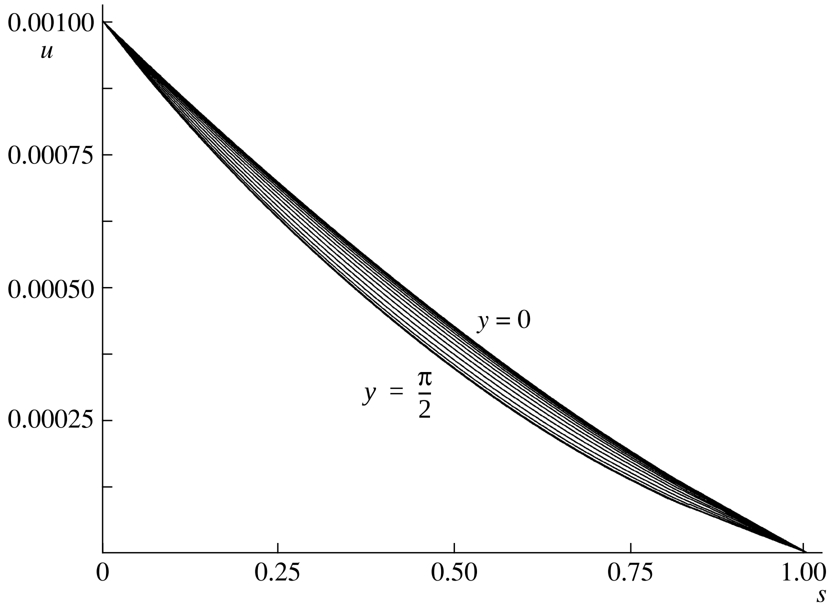
$$f_1'(0, t) = 0, \quad f_2'\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad f_2''(0, t) = 0, \quad f_1''\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad f_i' = \frac{\partial f_i}{\partial y}.$$

Аналогичным образом будем интерполировать функции, заданные на $\Sigma(t)$, такие как ω_1 и ω_2. В силу симметричности, у функции, заданной на границе, на пересечении с осью координат обращается в ноль первая производная по параметру y. Следовательно, граничные условия для них будут иметь

$$\omega_1'\big|_{y=0} = \omega_1'\big|_{y=\pi/2} = \omega_2'\big|_{y=0} = \omega_2'\big|_{y=\pi/2}. \tag{4.3}$$

Отметим, что численная схема имеет первый порядок аппроксимации как по пространственным переменным, так и по времени, так как для приграничных узлов, шаблон которых пересекает L_0, построить симметричные конечно-разностные выражения для производных по пространственным координатам невозможно.

Для расчета по схеме (4.2) необходимо знать перемещения во всех узлах из деформированной области, в том числе прифронтовых. В то же время для узлов сетки из области, лежащей между



Фиг. 3.

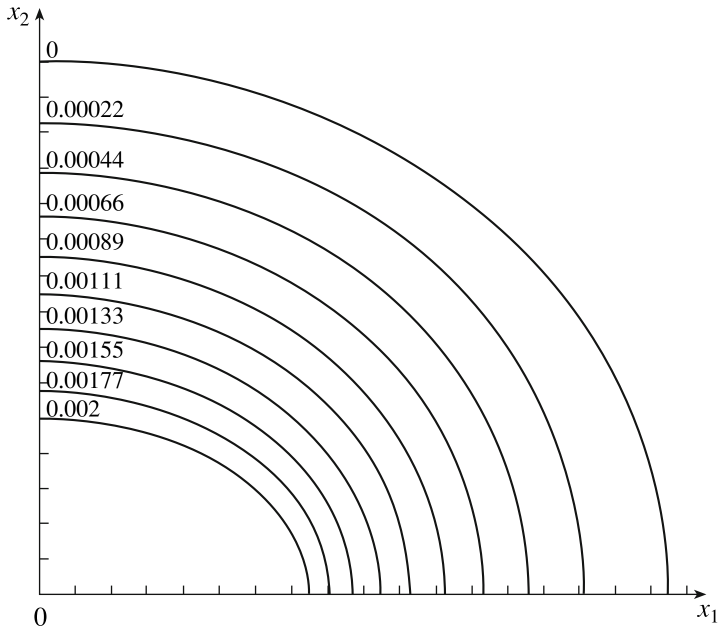
поверхностью разрывов на последнем временно́м слое $\Sigma(t)$ и ее положением на позапрошлом временно́м слое $\Sigma(t - 2\Delta t)$ (см. фиг. 1), записать конечно-разностные выражения для второй производной по времени нельзя, так как соответствующие узлы с предыдущих временны́х слоев не попадают в деформированную область. С другой стороны, в прифронтовой зоне имеем аналитическое решение (3.7), но оно справедливо лишь для достаточно малых времен. Будем считать, что перемещения в окрестности волнового фронта в произвольный момент времени описываются тем же рядом (3.7), но константы ω_{10} и ω_{20} входят в него в качестве неизвестных параметров. Таким образом, приближенное аналитическое решение представляет собой уравнение относительно перемещения и набора неизвестных величин – констант лучевого разложения. Эти уравнения, записанные для узлов, перемещения в которых могут быть вычислены по конечно-разностной формуле и в то же время достаточно близких к поверхности разрывов, позволяют замкнуть систему.

С этой целью рассмотрим отдельный узел сплайна, описывающего $\Sigma(t - 2\Delta t)$. Перемещения точек среды, совпадающих с рассматриваемыми узлами, можно получить путем интерполирования по соседним узлам сетки. Для интерполирования используем формулу Тейлора, считая, что разложение производится относительно ближайшей точки из деформированной области, для которой можно записать конечно-разностные уравнения (4.2). Входящие в формулу производные, как и раньше, аппроксимируем конечными разностями. С другой стороны, для рассматриваемых узлов можно записать уравнение (3.7), в котором ω_{10}, ω_{20}, $\delta\omega_{10}/\delta t$ зависят только от луча, а t_Σ для данной точки – константа. Поэтому имеем

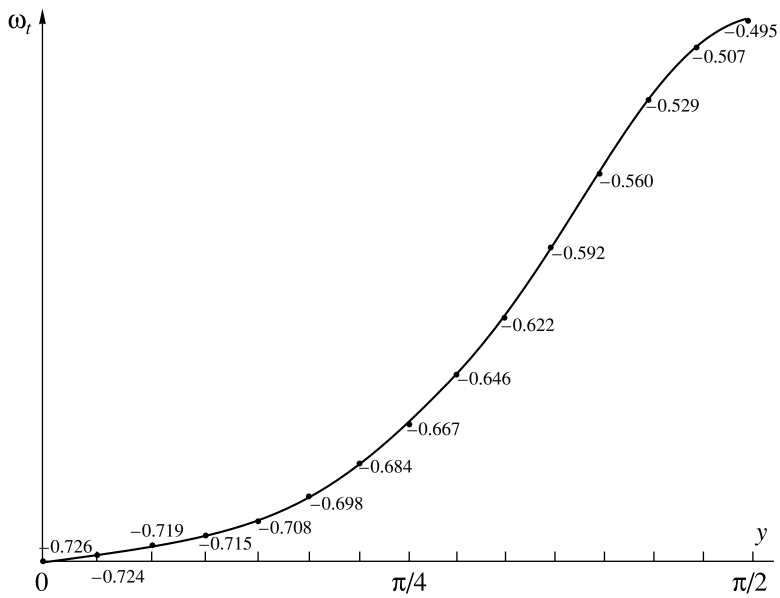
$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\left(\omega_{10} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}t_\Sigma\right) - \omega_{20}(t - t_\Sigma), \\ \ddot{u} &= -\omega_{20}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Полагая эти выражения уравнениями относительно ω_{10} и ω_{20}, вычисляем значения параметров для данного узла. Частные производные $\dot{u}$ и $\ddot{u}$ в (4.4) могут быть получены с помощью конечно-разностных формул (4.1). Положим для удобства на последнем временно́м слое $t = 0$, тогда $t_\Sigma =$ $= -2\Delta t$ и из (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= -\frac{u_{m,n}^k - u_{m,n}^{k-1}}{\Delta t} - 2\Delta t\frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} + 2\Delta t\omega_{20}, \\ \omega_{20} &= -\frac{u_{m,n}^k - 2u_{m,n}^{k-1} + u_{m,n}^{k-2}}{\Delta t^2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$



Фиг. 4.

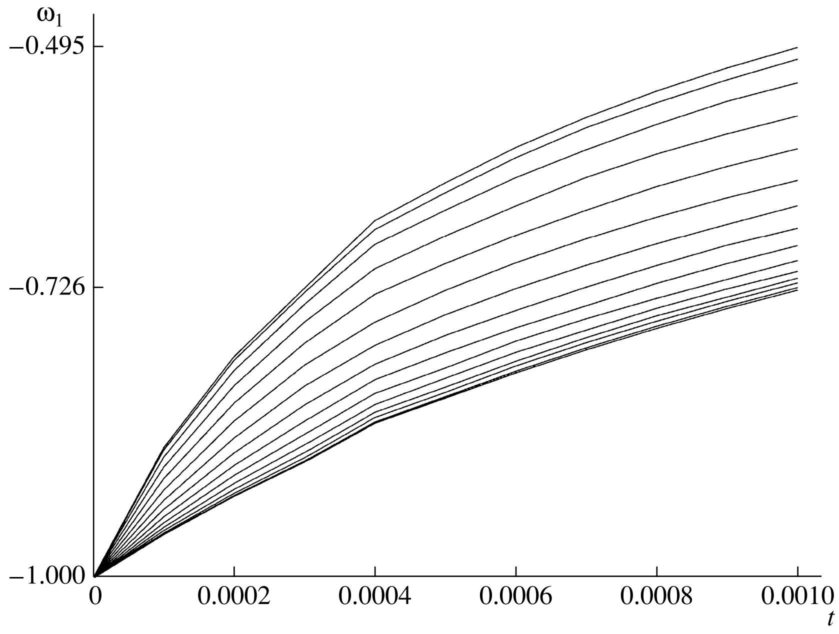


Фиг. 5.

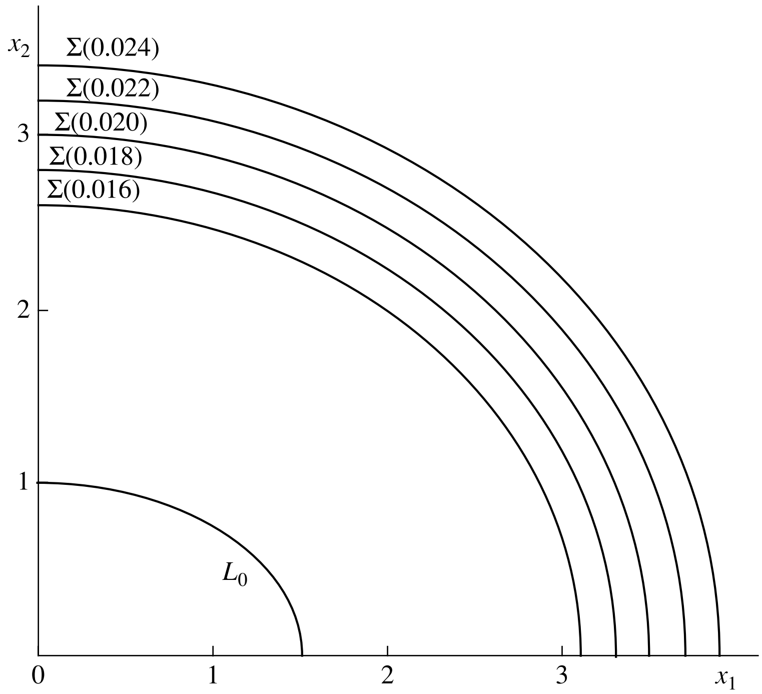
Для вычисления δ-производной в (4.5) используем конечно-разностное выражение

$$\frac{\delta\omega_1}{\delta t}(y, t) \approx \frac{\omega_1(y, t) - \omega_1(y, t - \Delta t)}{\Delta t}. \tag{4.6}$$

Система нелинейных алгебраических уравнений, включающая конечно-разностные уравнения (4.2) для внутренних узлов деформированной области, и лучевые разложения для точек, совпадающих с узлами поверхности разрыва на позапрошлом временно́м слое, решается методом простой итерации. В качестве начального приближения для очередного слоя используются значения перемещений, полученные при подстановке в аналитическое решение параметров ω_1^{k-1} и ω_2^{k-1}



Фиг. 6.



Фиг. 7.

предыдущего слоя и времени $t = \Delta t$. За начальное приближение параметров разложения ω_1 и ω_2 принимаются $\omega_1^k \approx \omega_1^{k-1} + \dfrac{\delta\omega_{10}}{\delta t}\Delta t$ и $\omega_1^k \approx \omega_2^{k-1}$ соответственно; $\delta\omega_{10}/\delta t$ для слоя $t - \Delta t$ вычисляется по разностной формуле (4.6). Также с помощью лучевого разложения (3.7) вычисляются поля перемещений на первых двух временны́х слоях, необходимые для инициализации схемы. Константы лучевого разложения в этом случае вычисляются по граничному условию (2.1).

Таблица

$\Delta x_1 = \Delta x_2$	Δt	$\delta_{\text{ср}}$		
		$t_1 = 0.0005$	$t_2 = 0.0006$	$t_3 = 0.0007$
0.02	0.0001	0.06	0.057	0.048
0.01	0.00005	0.028	0.023	0.028
0.005	0.000025	0.016	0.02	0.028

Заметим, что для вычисления перемещения по лучевой формуле необходимо сначала определить лучевые координаты s и y. В случае, когда узлы расположены достаточно близко к поверхности разрывов, можно считать, что луч – прямая, проходящая через узел и перпендикулярная фронту. Параметр y определяется из условия параллельности нормали к сплайну в соответствующей параметру точке и вектора, началом которого является рассматриваемый узел сетки, а концом – точка сплайна, соответствующая параметру. Вычисление y производится численно методом дихотомии. Зная y, можно вычислять значения параметров лучевого разложения с помощью интерполяционного полинома, а по ним определять значение s.

Получаемые в ходе решения константы лучевого разложения используются для определения на каждой итерации положения фронта ударной волны и его геометрических параметров, входящих в лучевой ряд. Таким образом, построена неявная вычислительная схема, на каждой итерации которой сначала пересчитываются внутренние узлы области, а затем сплайны, описывающие заданные на волновом фронте функции, и положение самого фронта. Каждая итерация завершается вычислением перемещений в узлах сетки прифронтовой области, входящих в конечно-разностные уравнения.

По описанному выше алгоритму была разработана и отлажена программа, позволяющая вычислить на каждом временно́м шаге перемещения за фронтом ударной волны, положение фронта и константы лучевого разложения.

Далее приведем результаты численных расчетов. Параметры задачи выбраны следующим образом: $\alpha = 10$, $C = 10^3$ м/с, $v_0 = 1$ м/с, $a_0 = 1$ м/с^2, $a_1 = 1.5$ м, $a_2 = 1$ м. Шаги расчетной сетки составляют $\Delta t = 10^{-4}$ с, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.02$ м. На фиг. 3 показано распределение поля перемещений вдоль лучей в момент времени $t = 10^{-3}$ с в зависимости от расстояния вдоль луча. На фиг. 4 изображены изолинии функции перемещений $(u(x_1, x_2, t))$ в области, охваченной волновым движением к моменту $t = 0.002$ с. На фиг. 5 изображен график изменения интенсивности волны вдоль волнового фронта в момент времени $t = 0.001$ с, а на фиг. 6 – изменение ω_1 со временем для различных (фиксированных) лучей. Наконец, фиг. 7 иллюстрирует положение волновых фронтов на нескольких последних временных слоях ($t_1 = 0.016$ с, $t_2 = 0.018$ с, $t_3 = 0.02$ с, $t_4 = 0.022$ с) до момента $t = 0.0024$ с. Из представленных графиков видно, что более пологие участки фронта движутся быстрее, так что контур $\Sigma(t)$ стремится принять форму окружности.

Оценка сходимости и устойчивости построенной численной схемы, в силу ее нелинейности, является сложной задачей. Тем не менее для малых времен качество численного решения можно проверить экспериментально с помощью приближенного аналитического решения. Для этого построим последовательность численных решений для одного момента времени, последовательно уменьшая шаг по пространственным и временно́й координатам вдвое. Оказалось, что среднее отклонение по узлам сетки

$$\delta_{\text{ср}} = \Big(\sum_{k,m,n} \delta^k_{m,n}\Big)N^{-1}, \quad \delta^k_{m,n} = \left|\frac{U^k_{m,n} - u^k_{m,n}}{u^k_{m,n}}\right| \tag{4.7}$$

численного $u^k_{m,n}$ решения от аналитического $U^k_{m,n}$ при этом уменьшается (см. таблицу). В (4.7) N – количество узлов в деформированной области.

Для проверки качества решения в случае достаточно больших времен, когда пользоваться лучевым разложением уже нельзя, оценивалось изменение относительной погрешности решения с уменьшением шага. Оказалось, что относительная погрешность для каждого узла, соответствующего какому-либо узлу предыдущего варианта решения, уменьшается. Так, для принятых выше параметров задачи и времени $t = 0.0011$ с при последовательном уменьшении шагов сетки вдвое максимальная относительная погрешность составила 15.9% и 5.8% соответственно.

Авторы выражают искреннюю благодарность А.А. Буренину за плодотворное обсуждение и ценные замечания при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. *Любимов А.Н., Русанов В.В.* Течение газа около тупых тел. М.: Наука, 1970. Т. 1, 2.
3. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
4. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.
5. *Куликовский А.Г., Чугайкова А.П.* Классические и неклассические разрывы и их структуры в нелинейно-упругих средах с дисперсией и диссипацией. М.: МИРАН, 2007.
6. *Уилкинс М.А.* Расчет упругопластических течений // Вычисл. методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
7. *Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И.* Численное решение неодномерных задач динамики твердого деформируемого тела // Пробл. динамики упруго-пластических сред. Сер.: Механ. Новое в зарубежной литературе. М.: Мир, 1975. № 5. С. 39–84.
8. *Куропатенко В.Ф.* Методы расчета ударных волн // Дальневосточный матем. журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 45–59.
9. *Зиновьев П.В., Рагозина В.Е., Буренин А.А.* Выделение поверхностей разрывов лучевым методом в задачах динамики упругих сред // Фундаментальные и прикл. вопросы механ. Хабаровск: ХГТУ, 2003. С. 64–66.
10. *Буренин А.А., Зиновьев П.В.* К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Пробл. механ. Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 146–155.
11. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Rev. 1995. V. 48. № 1. P. 1–39.
12. *Буренин А.А., Россихин Ю.А.* Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов // Прикл. задачи механ. деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. С. 129–137.
13. *Буренин А.А.* Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный матем. сб. 1999. № 8. С. 49–72.
14. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
15. *Герасименко Е.А., Рагозина В.Е.* Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // Дальневосточный матем. журнал. 2004. Т. 5. № 1. С. 100–109.
16. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964.
17. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
18. *Буренин А.А., Рагозина В.Е.* К построению приближенных решений краевых задач ударного деформирования // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2008. № 2.
19. *Буренин А.А., Россихин Ю.А.* К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной // Прикл. механ. 1990. Т. 26. № 1. С. 103–108.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 734–753

УДК 519.634

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ НА МИНИМАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА. ПРИМЕРЫ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ПОТОКОВ С НЕУСТОЙЧИВОСТЯМИ

 О. А. Азарова

(119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: olga_azarova@list.ru

Поступила в редакцию 07.04.2008 г.
Переработанный вариант 29.09.2008 г.

Представлен один вариант из семейства разностных схем на минимальном шаблоне для расчета двумерных осесимметричных течений газа. Схема является явной, консервативной и имеет второй порядок точности по пространству и времени. Обсуждаются результаты моделирования пульсационных течений и неустойчивостей контактных разрывов. Приведены механизмы пульсаций потока и зарождения неустойчивостей. Библ. 32. Фиг. 14.

Ключевые слова: система уравнений Эйлера, схема на минимальном шаблоне, неустойчивость Рихтмайера–Мешкова, сдвиговая неустойчивость, пульсационное течение, турбулентно-подобные флуктуации.

ВВЕДЕНИЕ

Среди многочисленных подходов к повышению точности разностных схем для гиперболических систем уравнений на компактном шаблоне, не использующих решения задач о распаде разрыва, отталкиваясь от базовых свойств и геометрии шаблона, можно выделить несколько направлений, являющихся предпосылками данной работы. Порядок точности схемы может повышаться за счет увеличения количества точек, входящих в шаблон, как это происходит в пятиточечных двумерных схемах, примером которых является схема Лакса–Вендроффа (см. [1]) и ее модификации. Другим направлением является введение многослойности по времени и построение разностных операторов, использующих разложения функций в ряды Тейлора в узлах шаблона. Примером этого подхода являются неявные схемы третьего порядка по пространству и произвольного порядка по времени (в зависимости от количества слоев по времени), представленные в [2]. Обладая повышенной точностью, схемы из [2], содержат количество узлов шаблона для каждой переменной, не превышающее трех.

Семейство разностных схем на минимальном шаблоне представляет еще один подход к повышению точности схем, сочетающий в себе, с одной стороны, шаблон, не увеличивающийся с повышением порядка точности схемы, и с другой стороны – явные аппроксимации дифференциальных операторов. Построение схем на минимальном шаблоне основано на методе повышения порядка аппроксимации, предложенном в [3], который, в частности, позволяет, не увеличивая шаблон разностной схемы, получать явные схемы теоретически произвольного порядка аппроксимации. Здесь также для повышения точности схемы вводятся аппроксимации, основанные на разложениях функций в ряды в узлах шаблона. Однако дополнительно для нахождения неизвестных значений производных в узле, входящих в разложения, используются дифференциальные следствия исходной системы уравнений, аппроксимация которых происходит на том же шаблоне (см. [3], [4]). Впервые двумерная схема на минимальном (четырехточечном) шаблоне второго порядка точности для плоской симметрии течения описана в [5]. Подобные схемы допускают реализацию на подвижных сетках для произвольной симметрии течения, а также могут быть дополнены алгоритмами выделения разрывов (см. [6], [7]). В настоящей статье представлена новая модификация схемы на минимальном (четырехточечном) шаблоне для расчета двумерных осесимметричных течений газа второго порядка точности по пространству и времени, отличающаяся от использовавшихся ранее в [8], [9] формой записи систем дифференциальных следствий исходной системы и введенными аппроксимациями дифференциальных операторов. Анализ одномерного аналога схемы и сравнение расчетов, проведенных по представленной схеме и по другим известным схемам, содержится в [6], [10]–[12]. Расчетные возможности представленной схемы продемонстрированы на численном решении ряда задач.

1. ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Схема строится для системы уравнений Эйлера для идеального газа на основе подхода к повышению порядка аппроксимации схем работы [3]. Используется дивергентный вид уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{U}r}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}r}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}r}{\partial r} = \mathbf{H},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u v \\ u(E_S + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ p + \rho v^2 \\ v(E_S + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь ρ, p, u и v – соответственно, плотность, давление и продольная и поперечная компоненты скорости, $E_s = [\varepsilon + 0.5(u^2 + v^2)]$, $\varepsilon = p/[\rho(\gamma - 1)]$, $\gamma = 1.4$. Для обеспечения второго порядка аппроксимации будем использовать системы дифференциальных следствий по x и по r уравнений (1), записанных в полностью дивергентном виде (с нулевыми векторами правых частей):

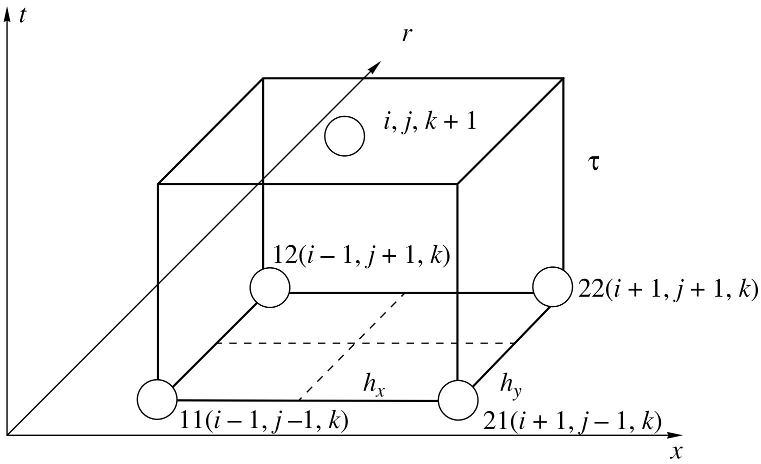
$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{U_x}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{F_x} + (\mathbf{G} - \mathbf{H})/r)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G_x}}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{U_r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F_r}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{G_r} + (\mathbf{G} - \mathbf{H})/r)}{\partial r} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Процедура построения схемы основывается на интегроинтерполяционном методе (см. [13]); используется шаблон схемы Лакса. Разностная ячейка, узлы шаблона и принятые обозначения представлены на фиг. 1. Система уравнений (1) и системы дифференциальных следствий (2) интегрируются по разностной ячейке с использованием теоремы Гаусса–Остроградского:

$$\iint_S \mathbf{U}r\,dxdr + \iint_S \mathbf{F}r\,dtdr + \iint_S \mathbf{G}r\,dtdx = \iiint_V \left(\frac{\partial \mathbf{U}r}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}r}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}r}{\partial r}\right)dV = \iiint_V \mathbf{H}\,dV,$$

$$\begin{gathered} \iint_S \mathbf{U_x}dxdr + \iint_S [\mathbf{F_x} + (\mathbf{G} - \mathbf{H})/r]dtdr + \iint_S \mathbf{G_x}dtdx = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial \mathbf{U_x}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{F_x} + (\mathbf{G} - \mathbf{H})/r)}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G_x}}{\partial r}\right)dV = 0, \\ \iint_S \mathbf{U_r}dxdr + \iint_S \mathbf{F_r}dtdr + \iint_S [\mathbf{G_r} + (\mathbf{G} - \mathbf{H})/r]dtdx = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial \mathbf{U_r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F_r}}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{G_r} + (\mathbf{G} - \mathbf{H})/r)}{\partial r}\right)dV = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Аппроксимация интегралов происходит аналогично тому, как это описано в [7]. При построении аппроксимаций предполагается кусочно-линейный вид восполнения разностного решения (1) в окрестности узла сетки. На каждом временно́м слое предполагается, что разностное решение



Фиг. 1.

системы (1) является кусочно-линейным по x и по r и решения систем уравнений для производных (2) являются кусочно-постоянными по x и по r в окрестности узла:

$$\mathbf{U}^k(x, r) = \mathbf{U}^k_{i,j} + (x - x_i)\mathbf{U}^k_{\mathbf{x}_{i,j}} + (r - r_j)\mathbf{U}^k_{\mathbf{r}_{i,j}},$$

$$\mathbf{U}^k_{\mathbf{x}}(x, r) = \mathbf{U}^k_{\mathbf{x}_{i,j}}, \quad \mathbf{U}^k_{\mathbf{r}}(x, r) = \mathbf{U}^k_{\mathbf{r}_{i,j}}$$

при $x \in (x_i - h_x, x_i + h_x)$, $r \in (r_j - h_r, r_j + h_r)$. Здесь $\varphi^k_{i,j} = \varphi(x_i, r_j, t_k)$, $x_i = ih_x$, $r_j = jh_r$, i и j – номера узлов в направлениях x и r соответственно, t_k – значение времени на k-м слое, h_x, h_r, τ – шаги по пространству и по времени. Полагается, что функции потоков имеют аналогичную форму по времени.

Для вычисления решений систем (2) используются схемы первого порядка аппроксимации. Расчетные формулы имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{k+1}_{\mathbf{x}_{i,j}} &= 0.25(\mathbf{X}_\mathbf{n} - \mathbf{X}_{2122} + \mathbf{X}_{1112} - \mathbf{X}_{1222} + \mathbf{X}_{1121})/(h_x h_r),\\
\mathbf{X}_\mathbf{n} &= h_x h_r(\mathbf{U}_{\mathbf{x}_{11}} + \mathbf{U}_{\mathbf{x}_{12}} + \mathbf{U}_{\mathbf{x}_{21}} + \mathbf{U}_{\mathbf{x}_{22}}) \quad (\mathrm{I}),\\
\mathbf{X}_\mathbf{n} &= h_r(\mathbf{U}_{21} + \mathbf{U}_{22} - \mathbf{U}_{11} - \mathbf{U}_{12}) \quad (\mathrm{II}),\\
\mathbf{X}_{2122} &= \tau h_r(\mathbf{F}_{\mathbf{x}_{21}} + \mathbf{F}_{\mathbf{x}_{22}} + (\mathbf{G}_{22} - \mathbf{H}_{22})/r_{22} + (\mathbf{G}_{21} - \mathbf{H}_{21})/r_{21}),\\
\mathbf{X}_{1112} &= \tau h_r(\mathbf{F}_{\mathbf{x}_{11}} + \mathbf{F}_{\mathbf{x}_{12}} + (\mathbf{G}_{12} - \mathbf{H}_{12})/r_{12} + (\mathbf{G}_{11} - \mathbf{H}_{11})/r_{11}),\\
\mathbf{X}_{1222} &= \tau h_x(\mathbf{G}_{\mathbf{x}_{12}} + \mathbf{G}_{\mathbf{x}_{22}}) \quad (\mathrm{I}), \quad \mathbf{X}_{1222} = \tau(\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{12}) \quad (\mathrm{II}),\\
\mathbf{X}_{1121} &= \tau h_x(\mathbf{G}_{\mathbf{x}_{11}} + \mathbf{G}_{\mathbf{x}_{21}}) \quad (\mathrm{I}), \quad \mathbf{X}_{1121} = \tau(\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{11}) \quad (\mathrm{II});
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{k+1}_{\mathbf{r}_{i,j}} &= 0.25(\mathbf{Y}_\mathbf{n} - \mathbf{Y}_{2122} + \mathbf{Y}_{1112} - \mathbf{Y}_{1222} + \mathbf{Y}_{1121})/(h_x h_r),\\
\mathbf{Y}_\mathbf{n} &= h_x h_r(\mathbf{U}_{\mathbf{r}_{11}} + \mathbf{U}_{\mathbf{r}_{12}} + \mathbf{U}_{\mathbf{r}_{21}} + \mathbf{U}_{\mathbf{r}_{22}}) \quad (\mathrm{I}),\\
\mathbf{Y}_\mathbf{n} &= h_x(\mathbf{U}_{22} - \mathbf{U}_{21} + \mathbf{U}_{12} - \mathbf{U}_{11}) \quad (\mathrm{II}),\\
\mathbf{Y}_{2122} &= \tau h_r(\mathbf{F}_{\mathbf{r}_{21}} + \mathbf{F}_{\mathbf{r}_{22}}) \quad (\mathrm{I}), \quad \mathbf{Y}_{2122} = \tau(\mathbf{F}_{22} - \mathbf{F}_{21}) \quad (\mathrm{II}),\\
\mathbf{Y}_{1112} &= \tau h_r(\mathbf{F}_{\mathbf{r}_{11}} + \mathbf{F}_{\mathbf{r}_{12}}) \quad (\mathrm{I}), \quad \mathbf{Y}_{1112} = \tau(\mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{11}) \quad (\mathrm{II}),\\
\mathbf{Y}_{1222} &= \tau h_x(\mathbf{G}_{\mathbf{r}_{12}} + \mathbf{G}_{\mathbf{r}_{22}} + (\mathbf{G}_{12} - \mathbf{H}_{12})/r_{12} + (\mathbf{G}_{22} - \mathbf{H}_{22})/r_{22}),\\
\mathbf{Y}_{1121} &= \tau h_x(\mathbf{G}_{\mathbf{r}_{11}} + \mathbf{G}_{\mathbf{r}_{21}} + (\mathbf{G}_{11} - \mathbf{H}_{11})/r_{11} + (\mathbf{G}_{21} - \mathbf{H}_{21})/r_{21}).
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь для удобства введены цифровые индексы (см. фиг. 1). В (4), (5) возможны два варианта аппроксимации интегралов (формулы, обозначенные римскими цифрами). В зависимости от применяемых вариантов аппроксимации возможно получение двух основных типов схемы – первого и второго. Допустимо также использование схем смешанного типа, когда в одной схеме используются формулы как первого, так и второго варианта аппроксимации. В приведенных ниже расчетах использовался второй тип схемы (формулы, обозначенные римской цифрой II). В [10] показано, что при такой аппроксимации интегралов по нижнему основанию происходит расширение временно́го интервала, в котором за счет использования систем для производных исходной системы повышается порядок точности схемы.

Для записи схемы для системы (1) введем две вспомогательные функции, $\mathbf{I_r}$ и $\mathbf{I_{rt}}$:

$$\mathbf{I_r}(f_0, f_{x_0}, f_{r_0}, x_0, x_n, x_k, r_0, r_n, r_k) = \int\limits_{x_n}^{x_k}\int\limits_{r_n}^{r_k} r[f_0 + f_{x_0}(x - x_0) + f_{r_0}(r - r_0)]dxdr =$$

$$= 0.5(x_k - x_n)(r_k^2 - r_n^2)(f_0 - f_{x_0}x_0 - f_{r_0}r_0) + 0.25(x_k^2 - x_n^2)(r_k^2 - r_n^2)f_{x_0} + (x_k - x_n)(r_k^3 - r_n^3)f_{r_0}/3,$$

$$\mathbf{I_{rt}}(r_m, f_0, f_{t_0}, x_0, x_n, x_k, t_0, t_n, t_k) = \int\limits_{x_n}^{x_k}\int\limits_{t_n}^{t_k} r[f_0 + f_{t_0}(t - t_0)]dxdt =$$

$$= r_m(x_k - x_n)(t_k - t_n)\{f_0 + [0.5(t_k + t_n) - t_0]f_{t_0}\},$$

имеющие смысл интегралов по граням разностной ячейки от принятого представления решения. С помощью этих функций решение системы (1) легко выражается из (3) с учетом (4), (5). Расчетные формулы для решения (1) имеют вид

$$\mathbf{U}_{i,j}^{k+1} = 0.25(\mathbf{S_h} + \tau r_j\mathbf{H_m})/(h_xh_rr_j) - \mathbf{U}_{\mathbf{r}_{i,j}}^{k+1}h_r^2/(3r_j),$$

$$\mathbf{S_h} = \mathbf{S_n} - \mathbf{S}_{2122} + \mathbf{S}_{1112} - \mathbf{S}_{1222} + \mathbf{S}_{1121},$$

$$\mathbf{S_n} = \mathbf{I_r}(\mathbf{U}_{11}, \mathbf{U}_{\mathbf{x}_{11}}, \mathbf{U}_{\mathbf{r}_{11}}, x_{11}, x_{11}, x_i, r_{11}, r_{11}, r_j) + \mathbf{I_r}(\mathbf{U}_{21}, \mathbf{U}_{\mathbf{x}_{21}}, \mathbf{U}_{\mathbf{r}_{21}}, x_{21}, x_i, x_{21}, r_{21}, r_{21}, r_j) +$$

$$+ \mathbf{I_r}(\mathbf{U}_{12}, \mathbf{U}_{\mathbf{x}_{12}}, \mathbf{U}_{\mathbf{y}_{12}}, x_{12}, x_{12}, x_i, r_{12}, r_j, r_{12}) + \mathbf{I_r}(\mathbf{U}_{22}, \mathbf{U}_{\mathbf{x}_{22}}, \mathbf{U}_{\mathbf{y}_{22}}, x_{22}, x_i, x_{22}, r_{22}, r_j, r_{22}),$$

$$\mathbf{S}_{2122} = \mathbf{I_r}(\mathbf{F}_{21}, \mathbf{F}_{\mathbf{t}_{21}}, \mathbf{F}_{\mathbf{y}_{21}}, t, t, t + \tau, r_{21}, r_{21}, r_j) + \mathbf{I_r}(\mathbf{F}_{22}, \mathbf{F}_{\mathbf{t}_{22}}, \mathbf{F}_{\mathbf{y}_{22}}, t, t, t + \tau, r_{22}, r_j, r_{22}),$$

$$\mathbf{S}_{1112} = \mathbf{I_r}(\mathbf{F}_{11}, \mathbf{F}_{\mathbf{t}_{11}}, \mathbf{F}_{\mathbf{y}_{11}}, t, t, t + \tau, r_{11}, r_{11}, r_j) + \mathbf{I_r}(\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{\mathbf{t}_{12}}, \mathbf{F}_{\mathbf{y}_{12}}, t, t, t + \tau, r_{12}, r_j, r_{12}),$$

$$\mathbf{S}_{1222} = \mathbf{I_{rt}}(y_{12}, \mathbf{G}_{12}, \mathbf{G}_{\mathbf{t}_{12}}, x_{12}, x_{12}, x_i, t, t, t + \tau) + \mathbf{I_{rt}}(y_{22}, \mathbf{G}_{22}, \mathbf{G}_{\mathbf{t}_{22}}, x_{22}, x_i, x_{22}, t, t, t + \tau),$$

$$\mathbf{S}_{1121} = \mathbf{I_{rt}}(y_{11}, \mathbf{G}_{11}, \mathbf{G}_{\mathbf{t}_{11}}, x_{11}, x_{11}, x_i, t, t, t + \tau) + \mathbf{I_{rt}}(y_{21}, \mathbf{G}_{21}, \mathbf{G}_{\mathbf{t}_{21}}, x_{21}, x_i, x_{21}, t, t, t + \tau),$$

где

$$\mathbf{H_m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25(p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Производные по t выражаются через производные по x и r с помощью недивергентной формы системы (1) и уравнения состояния идеального газа $p = \varepsilon\rho(\gamma - 1)$:

$$\rho_t = -(\rho u)_x - (\rho v)_r - \rho v/r,$$

$$(\rho u)_t = -(p + \rho u^2)_x - (\rho uv)_r - \rho uv/r,$$

$$(\rho v)_t = -(\rho uv)_x - (p + \rho v^2)_r - (p + \rho v^2)/r + p/r,$$

$$E_{S_t} = -[u(E_S + p)]_x - [v(E_S + p)]_r - v(E_S + p)/r,$$

$$u_t = [(\rho u)_t - \rho_t u]/\rho, \quad v_t = [(\rho v)_t - \rho_t v]/\rho,$$

$$p_t = (\gamma - 1)[E_{S_t} - 0.5\rho_t(u^2 + v^2) - \rho(uu_t + vv_t)],$$

$$(p + \rho u^2)_t = p_t + \rho_t u^2 + 2\rho u u_t,$$

$$(p + \rho v^2)_t = p_t + \rho_t v^2 + 2\rho v v_t,$$

$$(\rho u v)_t = \rho_t u v + \rho(u_t v + v_t u),$$

$$[u(E_S + p)]_t = u_t(E_S + p) + u(E_{S_t} + p_t),$$

$$[v(E_S + p)]_t = v_t(E_S + p) + v(E_{S_t} + p_t).$$

Принятая здесь запись схемы дает возможность простой программной реализации схемы на 1/4 ячейки, 1/2 ячейки, 3/4 ячейки, необходимой при аппроксимации граничных условий (например, на обтекаемом потоком прямоугольном теле). Для постановки граничных условий на телах с прямолинейными границами, не совпадающими с границами расчетных ячеек (например, клиновидные тела), внутренняя прямолинейная граница заменяется ступенчатой (см. [14]). Границы более сложных областей в расчетах также приближаются ступенчатыми. При таком задании граничные условия оказываются встроенными в расчетную область без нарушения свойства консервативности в окрестности внутренних границ и на оси симметрии. Принципиально возможно построение схемы на произвольной сетке, например на сетке, связанной с геометрией задачи, или на подвижной сетке, связанной с решением (см. [7]). Построение схемы в области оси симметрии проводилось аналогично, использовался предельный переход при $r \longrightarrow 0$ и раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя. На оси симметрии использовалась разностная схема для плоских течений, описанная в [15].

Построенная схема является явной, консервативной и имеет второй порядок аппроксимации (по пространству и по времени). Устойчивость схемы обеспечивается стандартным критерием Куранта–Фридрихса–Леви. В приведенных ниже расчетах число Куранта лежало в диапазоне от 0.5 до 0.9. Основным отличием представленной схемы от ранее использовавшихся схем на минимальном шаблоне для осесимметричных течений (см. [8], [9]) является полностью дивергентная форма уравнений для дифференциальных следствий исходной системы, которые используются в аппроксимациях интегралов при построении схемы. Решающее значение здесь имеет аппроксимация потоковых членов в разностных уравнениях для дифференциальных следствий. Принятый вид уравнений для производных (2) позволяет избежать решения системы алгебраических уравнений при нахождении решения в узле разностной сетки на новом временно́м слое. Кроме того, при построении аппроксимаций уравнения (2) не интегрируются по радиусу, а используются средние значения параметров внутри разностной ячейки. Эти различия уменьшают количество операций, необходимых для расчета неизвестных значений в узле разностной сетки. Заметим также, что “симметрический” вид уравнений для производных облегчает написание и отладку кодов алгоритмов.

2. РАСЧЕТЫ ПУЛЬСАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ С НЕУСТОЙЧИВОСТЯМИ КОНТАКТНЫХ РАЗРЫВОВ

2.1. Постановка задачи

Представленная схема использовалась в расчетах воздействия СВЧ-энергии на сверхзвуковое обтекание тел[1)]. Исследования проводились в рамках совместной программы с Университетом Ратгерса (Rutgers University), Нью-Джерси, США. Все приведенные результаты связаны со схемной разрешимостью контактных разрывов и являются недостижимыми в случае недостаточной точности численной методики. Расчеты проводились без введения в схему искусственной вязкости.

Проблема глобальной перестройки течения при обтекании тел сверхзвуковым потоком, содержащим тепловые неоднородности, была исследована во многих работах (см., например, [16]–[21]). Исследование проблем устойчивости потока для подобного типа задач было инициировано в [22], [23]. Развитие пульсационных режимов, возникновение неустойчивостей границ

---

1) Проект Международного научно-технического центра (МНТЦ) № 3058р.

между теплым и холодным газами, а также их турбулентное перемешивание в задачах с протяженными источниками энергии исследованы в [12], [24], [25].

На основе системы уравнений Эйлера (1) рассматривается взаимодействие источника энергии в виде бесконечного протяженного разогретого канала пониженной плотности с цилиндрическим ударным слоем. Постановка задачи аналогична постановке в работах [17] и [12], [24]. Число Маха M набегающего потока равнялось 1.89. Нормирующими величинами при переходе к безразмерным параметрам были выбраны плотность воздуха при нормальных условиях $\rho_н = 1.29$ кг/м^3, значение давления $\rho_н = 5$ атм, значение единицы длины $l_н = 10^{-2}$ м. При этом значениями нормирующих величин для времени и скорости являлись, соответственно, $t_н = 1.6 \times 10^{-5}$ с и $u_н = 6.27 \times 10^2$ м/с. В качестве начальных условий для расчета стационарного обтекания цилиндра при $t = 0$, $0 \le x < x_{гр}$, $0 \le r < r_{гр}$, $x_{гр}$, $r_{гр}$ – координаты границ расчетной области, задавались значения параметров, соответствующие нормальным условиям: $\rho_0 = 1$, $p_0 = 0.2$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0$. Граничными условиями на входной границе ($x = 0$, $0 \le r < r_{гр}$) являлись такие же значения параметров. На оси x и на границах тела ставились условия отражения, на остальных границах – условия отсутствия отражения в направлении, перпендикулярном к границе.

Источник энергии в виде протяженного разреженного канала моделировался через изменение граничного условия на входной границе (при $x = 0$), начиная с момента времени t_i, когда стационарный режим обтекания уже установился. В этот момент расчетные значения параметров в точке торможения отличались от теоретических на величину ~1% от точного значения. При $t \ge t_i$ на входной границе задавалось значение плотности $\rho(0, r, t) = \rho_i = \alpha_\rho\rho_0$ для $0 \le r \le R_i$, где R_i – радиус канала, α_ρ – числовой параметр, отражающий степень разреженности газа в канале. Другие параметры задавались равными их значениям в невозмущенном потоке. Таким образом, граничное условие на входной границе имело вид

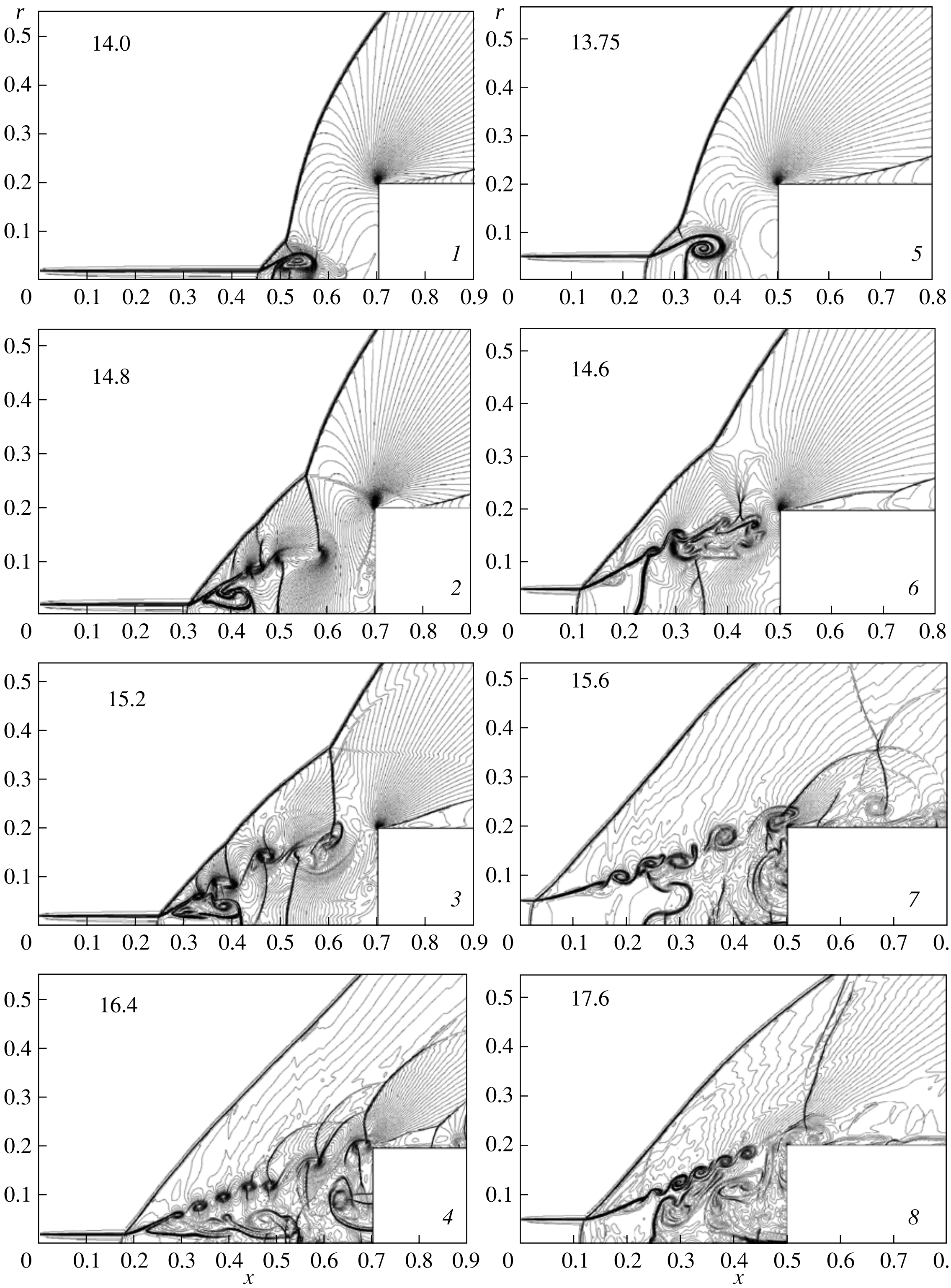
$$\rho(0, r, t) = \rho_0, \quad p(0, r, t) = p_0, \quad u(0, r, t) = u_0, \quad v(0, r, t) = v_0$$
$$\text{при} \quad 0 \le r < r_{гр} \cap t < t_i \cup R_i < r < r_{гр} \cap t \ge t_i,$$
$$\rho(0, r, t) = \rho_i = \alpha_\rho\rho_0, \quad p(0, r, t) = p_0, \quad u(0, r, t) = u_0, \quad v(0, r, t) = v_0 \quad \text{при} \quad 0 \le r \le R_i \cap t \ge t_i.$$

Такое граничное условие порождает в набегающем потоке протяженный канал пониженной плотности ρ_i радиуса R_i. Давление в канале равняется давлению невозмущенного потока, значение температуры в канале выше температуры невозмущенного потока. Разреженный канал распространяется со скоростью потока (так как его границы являются контактными разрывами) и впоследствии взаимодействует с ударным слоем. В данных расчетах $d = R_i/R = 0.1$ и 0.25 (R – радиус обтекаемого тела), $\alpha_\rho = 0.3$–0.5, $R = 0.2$, $t_i = 13.01$. Пространственные и энергетические характеристики канала согласовывались с параметрами разогретой области, полученной с помощью СВЧ-разряда (см. [19]). Отличие уравнений состояния от уравнений состояния идеального газа не учитывалось.

Использовалась ортогональная “шахматная” сетка с количеством расчетных узлов на одном временнóм слое порядка 6×10^5, шаги h_x и h_r по пространству равнялись 0.0005 (см. фиг. 1). Расчетные свойства численного метода оказались достаточными для получения пульсационного квазистационарного режима течения и воспроизведения на этих временах неустойчивостей контактных разрывов.

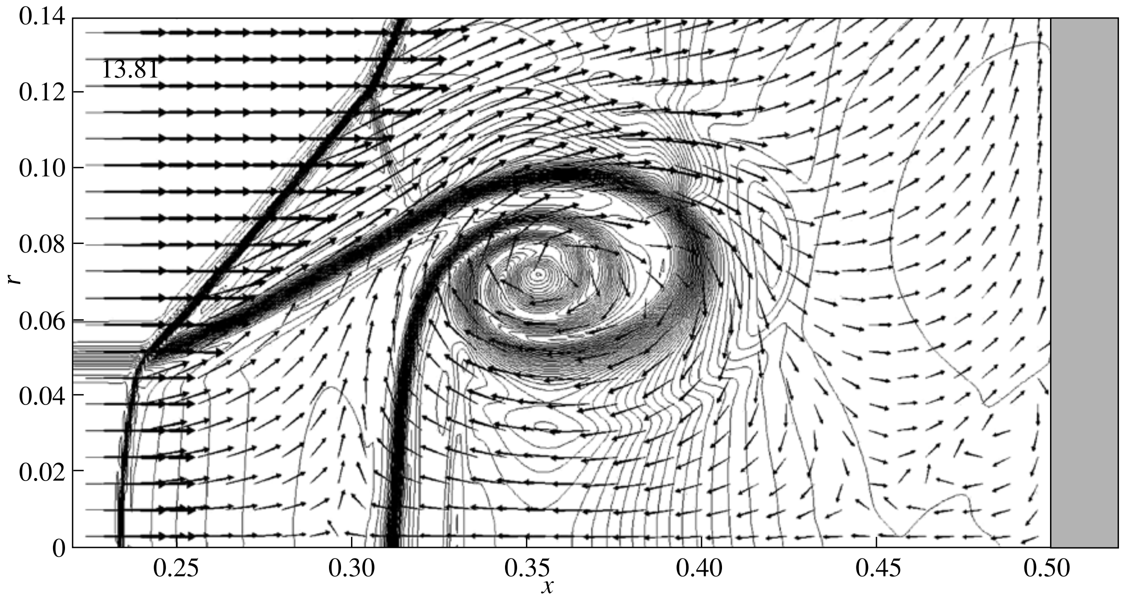
2.2. Описание процесса взаимодействия разреженного канала с ударным слоем

Основные стадии процесса взаимодействия в изохорах для $d = 0.1$ (слайды *1–4*) и $d = 0.25$ (слайды *5–8*) представлены на фиг. 2 (рисунок взят из [25]). Соответствующие значения моментов времени указаны в левом верхнем углу слайдов. Начало процесса взаимодействия связано с движением ударной волны в направлении от тела и зарождением неустойчивости контактного разрыва, подобной неустойчивости Рихтмайера–Мешкова из [26] (фиг. 2, слайды *1, 5*). Далее наблюдается образование предвестника (см. [17]), разрушение неустойчивости Рихтмайера–Мешкова и деформация разогретой области внутри ударного слоя (фиг. 2, слайды *2, 6*). При этом в случае $d = 0.1$ получено формирование разогретого канала внутри ударного слоя (фиг. 2, слайды *2–4*). Заметим, что такой же эффект был получен для процесса взаимодействия сферического ударного слоя с тонким продолговатым источником энергии (см. [23]). На следующей стадии наблюдается стохастическое зарождение сдвиговых неустойчивостей (shear-layer instabilities, см. [27], [28]), зарождение возвратно-циркуляционного течения, деформация разогретой области и



Фиг. 2.

колебания фронта головной ударной волны (фиг. 2, слайды *3, 7*). На последней стадии устанавливается колебательный характер течения и формируются основные области потока, которые с некоторой деформацией далее постоянно присутствуют в потоке. Такой режим течения в дальнейшем будем называть квазистационарным. Фронт головной ударной волны на этой стадии близок к прямолинейному и вихри выстроены в прямую линию (фиг. 2, слайды *4, 8*).



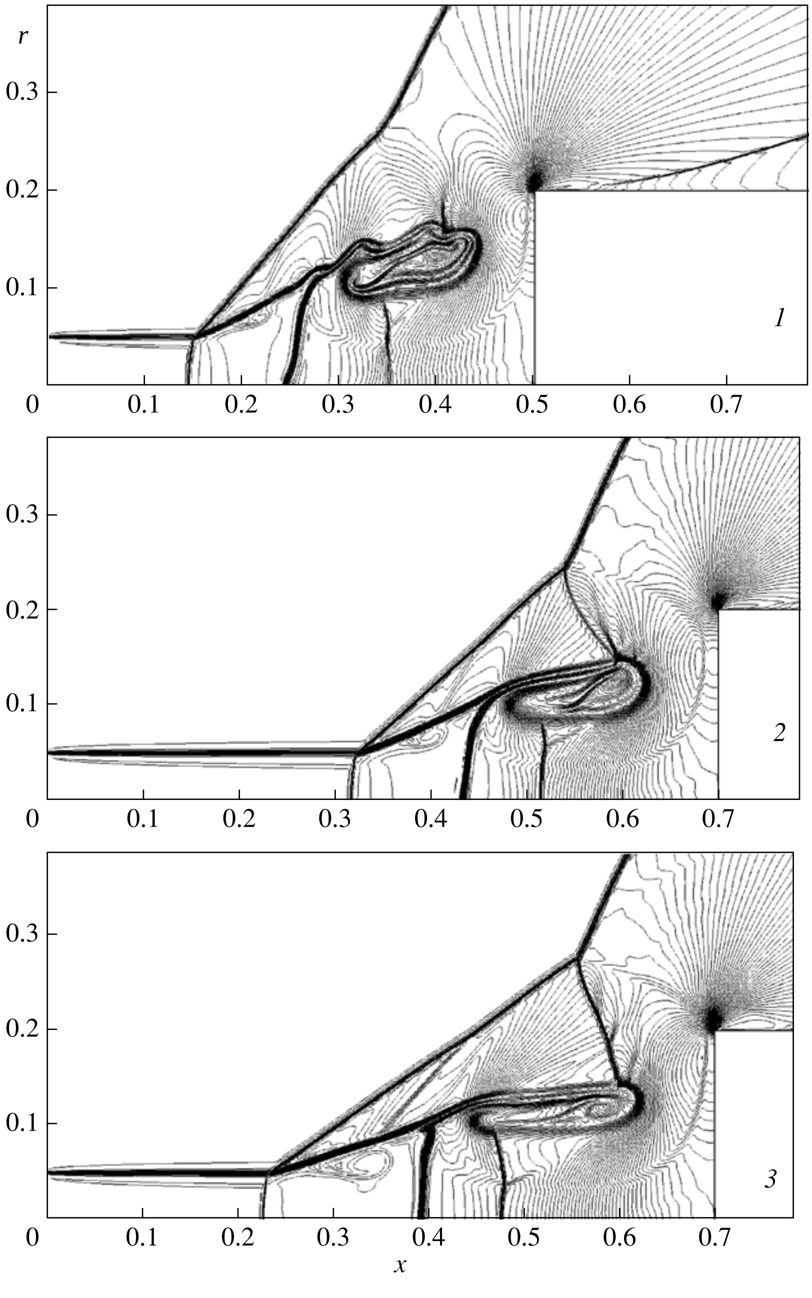
Фиг. 3.

2.3. Зарождение неустойчивостей контактных разрывов

Причиной зарождения неустойчивости, подобной неустойчивости Рихтмайера–Мешкова, является воздействие головной ударной волны на контактные разрывы (горизонтальный и вертикальный), представляющие собой границы канала (фиг. 2, слайды *1, 5*). Поле скорости при формировании этой неустойчивости перед торцом тела в увеличенном масштабе представлено на фиг. 3 (серый цвет – тело). Эта неустойчивость обусловливает тороидальное вихревое течение, регистрируемое на более грубых сетках и в экспериментах (см. [19]–[21]). Форма этого вихревого течения различна в зависимости от степени разреженности канала разряда. На фиг. 4 представлено формирование неустойчивостей Рихтмайера–Мешкова к моменту времени $t = 14.4$ для различных значений степени разреженности канала[2)]: слайд *1* – для $\alpha_\rho = 0.5$; слайд *2* – для $\alpha_\rho = 0.4$, слайд *3* – для $\alpha_\rho = 0.3$. Видно, что для большего разрежения канала характерна более вытянутая вдоль оси симметрии форма вихревого течения и разрушение вихря происходит медленнее.

Зарождение новой неустойчивости контактной границы, являющейся тангенциальным разрывом, представлено на слайдах *2–4* и *6–8* фиг. 2. Эта неустойчивость имеет сдвиговый характер. Руководствуясь обзором [28], данную неустойчивость можно характеризовать как неустойчивость тангенциального разрыва Кельвина–Гельмгольца. Действительно, в расчетах прослеживается классическая схема зарождения данной неустойчивости, приведенная в [28] для случая несжимаемой жидкости. Последовательные слайды зарождения этой неустойчивости приведены на фиг. 5 (на слайдах слева – поля плотности, справа – поля давления). Формирующаяся в результате дифракции головной ударной волны тройная конфигурация вызывает неоднородность течения, распространяющуюся к разрыву, а также вихревое течение в разогретой области внизу разрыва (фиг. 5, слайды *1, 2*). В области между вихревым течением и тангенциальным разрывом формируется узкий слой, в котором регистрируются области течения, где тангенциальная компонента скорости направлена в сторону, противоположную направлению скорости в течении за фронтом косой ударной волны над тангенциальным разрывом (фиг. 5, слайды *3, 4*). Вдоль линии разрыва формируются вихри, названные Кельвином “кошачьи глаза” (см. [28]), и зарождается поток, в котором присутствует нормальная компонента скорости (фиг. 5, слайды *5, 6*). Этот поток вызывается, с одной стороны, вихревыми структурами, расположенными вдоль тангенциального разрыва, и с другой стороны – изменением направления основного потока в разогретой зоне вблизи вертикального контактного разрыва. Этот поток и становится решающим фактором, вызывающим неустойчивость (фиг. 5, слайды *7, 8*).

2) Результаты, представленные на слайдах *2, 3* фиг. 4, получены на вычислительной базе Университета Ратгерса, США.

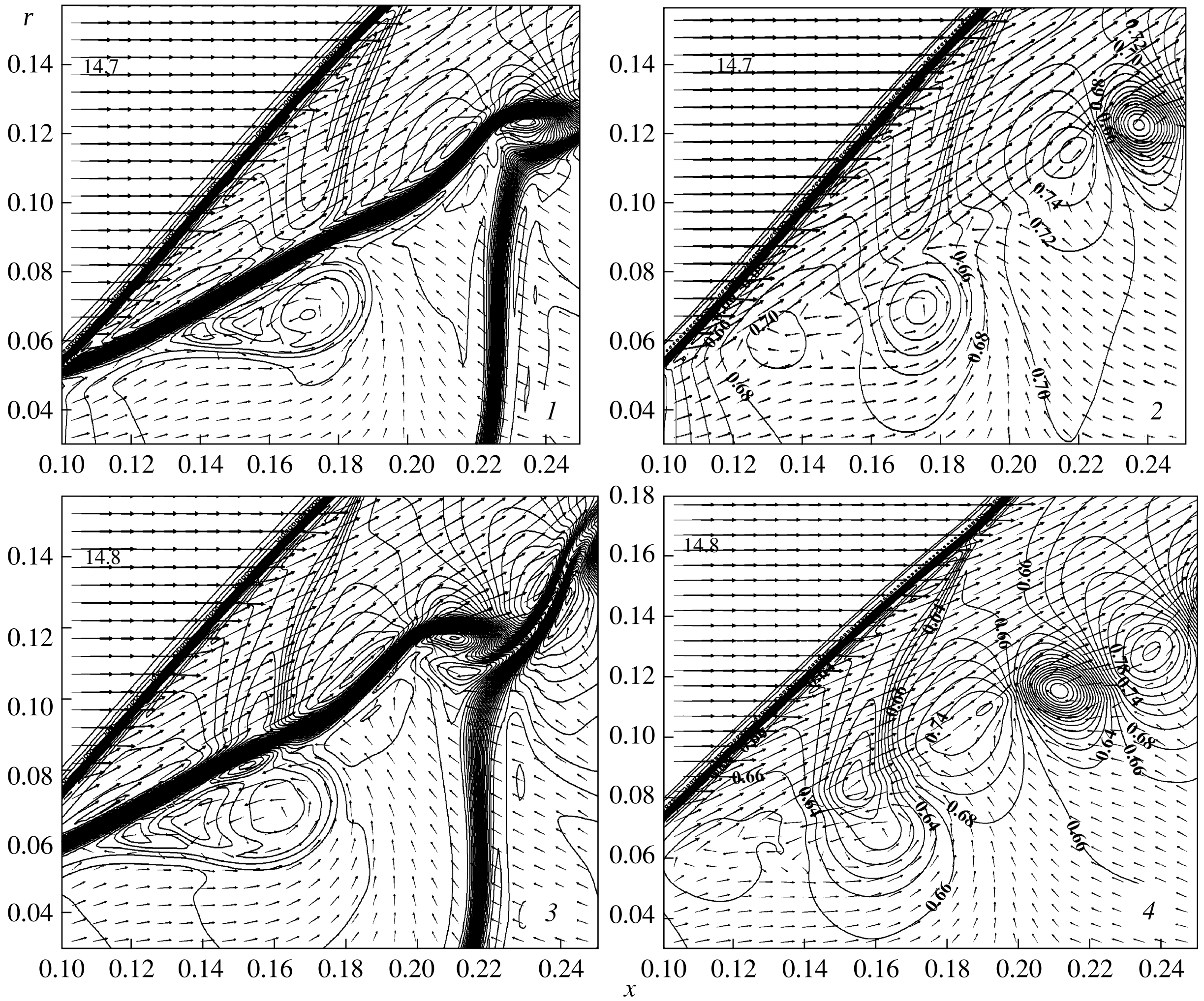


Фиг. 4.

2.4. Механизм пульсаций течения

Вихревая структура, образующаяся в результате неустойчивости, подобной неустойчивости Рихтмайера–Мешкова, достигает тела и понижает давление на торце и в результате через некоторое время головная ударная волна затормаживается. Давление в окрестности торца продолжает падать, вызывая возвратное движение головной ударной волны. Вблизи торца формируется возвратно-циркуляционное течение; позднее оно останавливает головную ударную волну и ее скорость меняет знак. Таким образом, возвратно-циркуляционное течение является причиной возникновения пульсаций головной ударной волны. Этот механизм был описан в [17], где были получены первые две пульсации головной ударной волны.

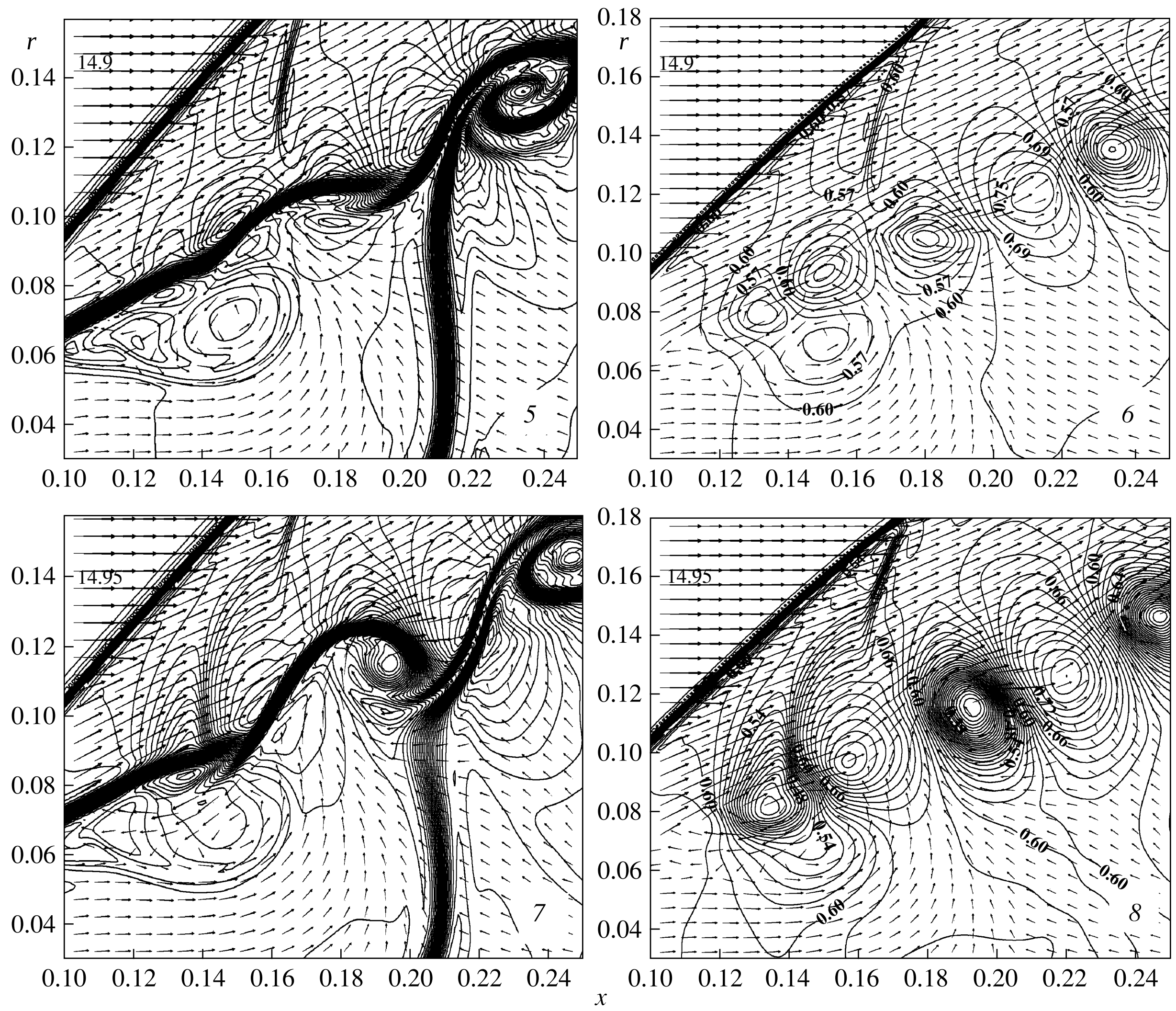
Заметим, что на стадии первоначального отхода головной ударной волны от тела движение ее координаты на оси x определяется решением задачи Римана, описывающей в одномерном приближении взаимодействие головной ударной волны и границы канала, являющейся контакт-



Фиг. 5.

ным разрывом (см. [14]). В данных расчетах значения скорости отхода головной ударной волны от своего стационарного положения отличаются от теоретических на величину порядка нескольких процентов. В расчетах также с хорошей точностью выполняется соотношение (см. [17]) $\sin\beta = \sqrt{\alpha_\rho}$, выражающее связь угла β косой волны при вершине предвестника и степени разреженности газа в канале α_ρ.

В проведенных расчетах получены дальнейшие пульсации потока, которые обусловливаются пульсациями границы разогретой области, образующейся внутри ударного слоя и ограниченной контактными разрывами. Пульсационные режимы течения для подобных задач получены и исследованы в [24]. На основании анализа полей течения можно сделать вывод, что механизм пульсаций разогретой области основан на соотношении между циркуляционным и возвратным течениями, J_c и J_r, составляющими возвратно-циркуляционное течение. Когда зарождается циркуляционный поток J_c, координата вертикальной контактной границы на оси симметрии X_0 минимальна. Возвратный поток J_r в это время максимален (фиг. 6, слайд *1*). Затем циркуляционный поток J_c возрастает, при этом возвратный поток J_r убывает и формируется поток из разогретой области J_f, вызывающий с некоторой задержкой во времени движение головной ударной волны к телу. Граница разогретой области сносится этим потоком к телу (фиг. 6, слайд *2*). Когда циркуляционный поток J_c становится максимальным, контактная граница останавливается (становится тангенциальным разрывом) и запирает поток из разогретой области J_f (фиг. 6, слайд *3*). Давление на торце восстанавливается, заставляя головную ударную волну отходить от тела. Воз-

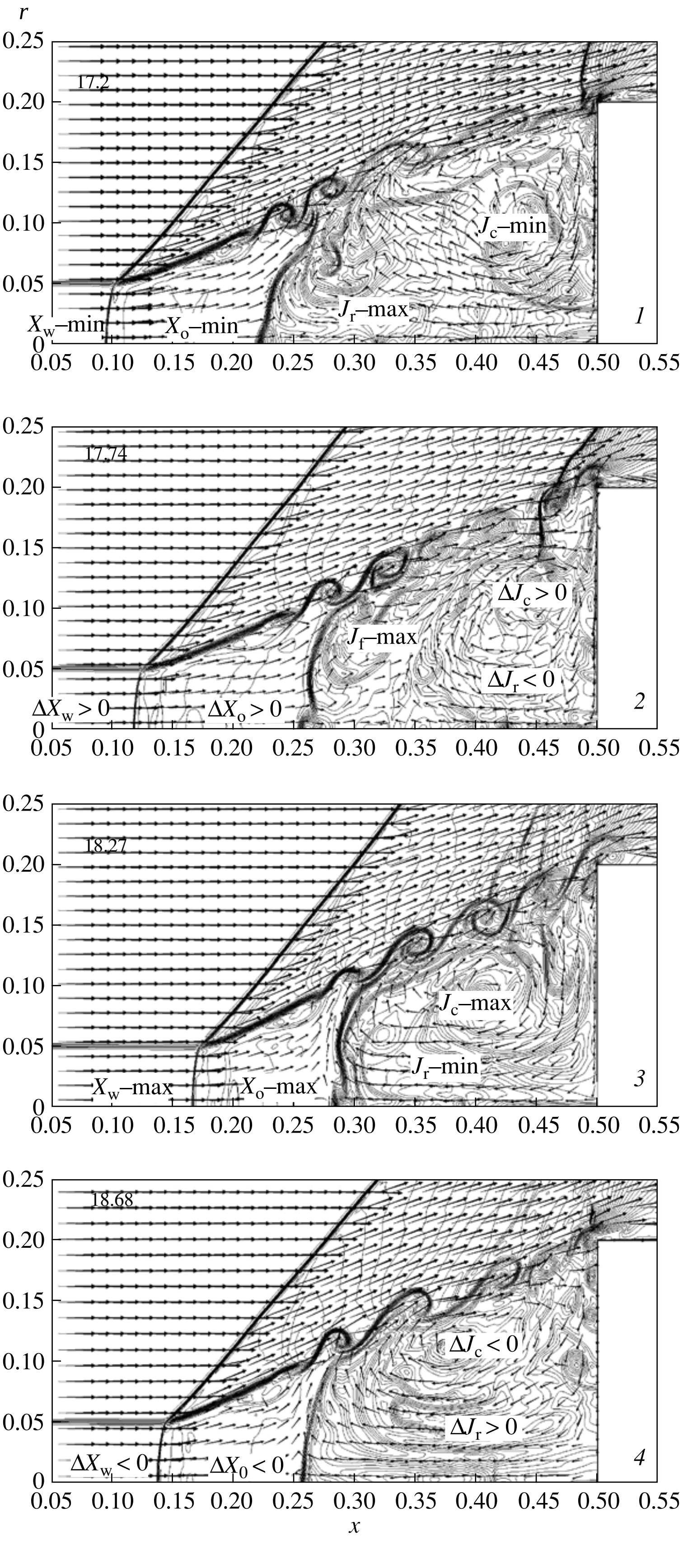


Фиг. 5. Окончание.

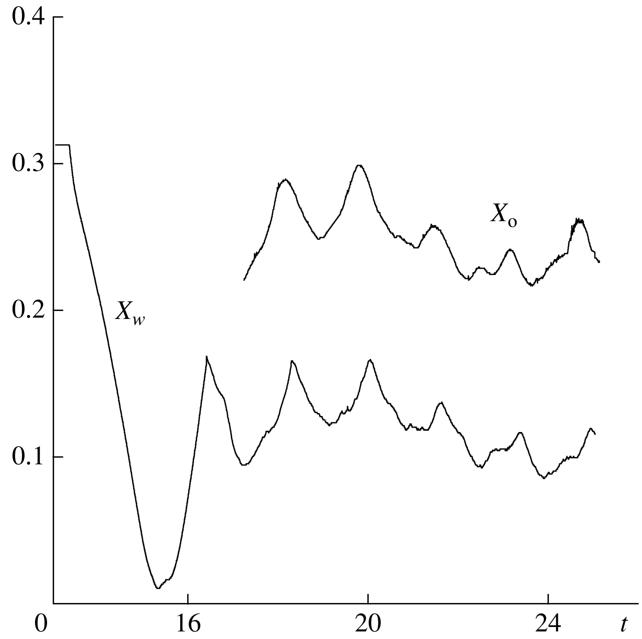
вратное течение становится более интенсивным, и контактный разрыв снова начинает свое движение от тела, сносимый этим потоком (фиг. 6, слайд *4*). Затем процесс повторяется. Таким образом, пульсации вертикально расположенного контактного разрыва являются причиной пульсационного характера течения в целом. Динамика координаты головной ударной волны X_w и координаты границы разогретой области на оси симметрии X_0 для $d = 0.25$ представлены на фиг. 7. Устанавливается такой режим течения, в котором все параметры совершают взаимозависимые колебания, происходящие с некоторым сдвигом по времени. Заметим, что некоторые элементы структуры течения в рассматриваемой задаче аналогичны возникающим в передней отрывной зоне в пульсационных течениях при сверхзвуковом обтекании цилиндрического тела с иглой, где механизм пульсаций также связан с генерацией возвратно-циркуляционного течения (см. [29], [30]). Однако в данной задаче пульсации в квазистационарном режиме обусловливаются соотношением между отдельными областями возвратно-циркуляционного течения, связанным с динамикой вертикально расположенного контактного разрыва в передней области отрыва потока.

2.5. Турбулизация отрывной области потока; явление турбулентного перемешивания

Изложенный в предыдущем пункте механизм пульсаций подтверждается траекторным анализом центров зарождающихся вихрей. Установлено, что возможны два типа динамики параметров


r
17.2
J_c–min
J_r–max
X_w–min
X_o–min
1
17.74
$\Delta J_c > 0$
J_f–max
$\Delta J_r < 0$
$\Delta X_w > 0$
$\Delta X_o > 0$
2
18.27
J_c–max
J_r–min
X_w–max
X_o–max
3
18.68
$\Delta J_c < 0$
$\Delta J_r > 0$
$\Delta X_w < 0$
$\Delta X_0 < 0$
4
x

Фиг. 6.



Фиг. 7.

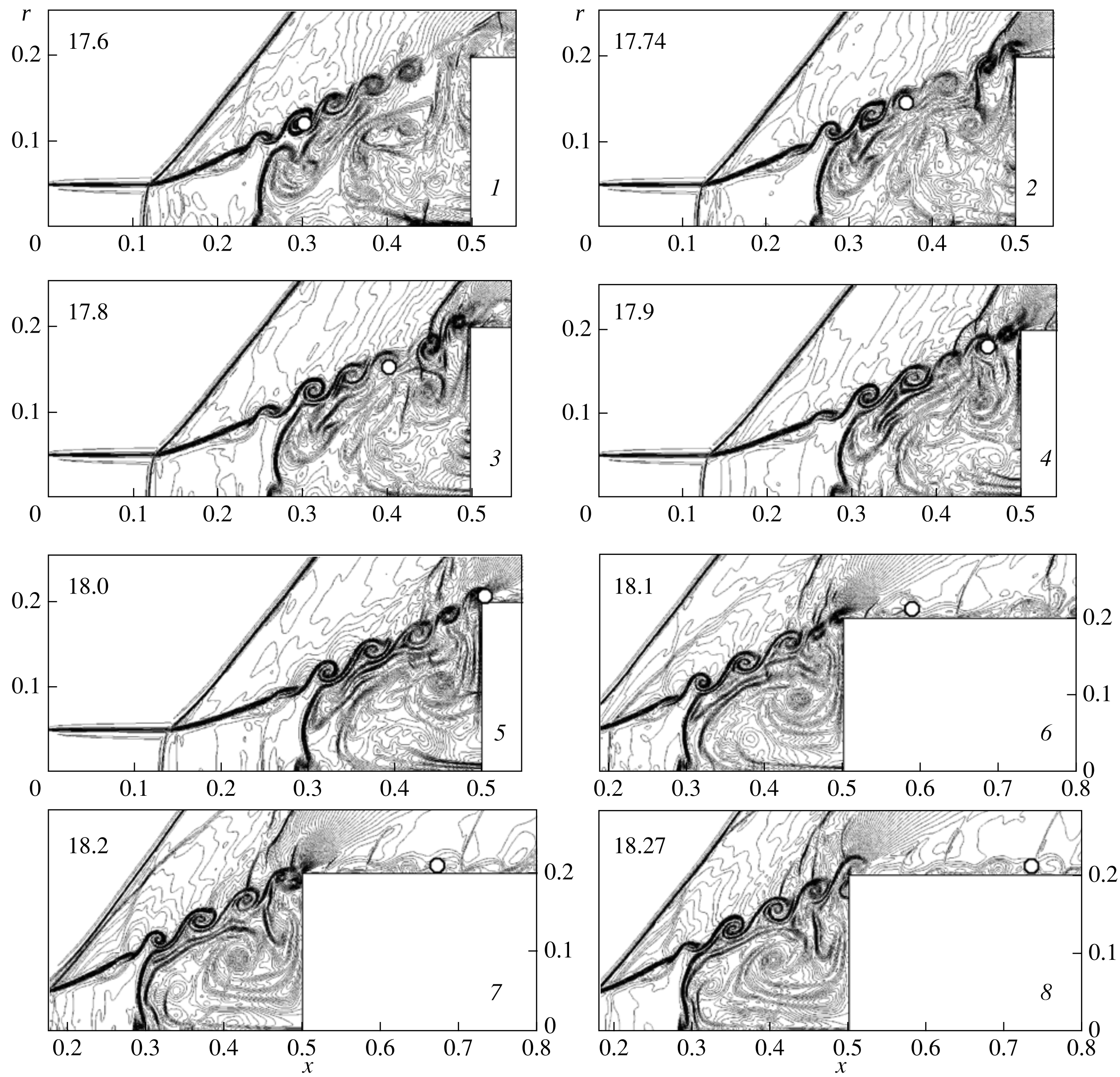
ров центров вихрей (см. [24]). В одном случае, когда поток из разогретой области J_f имеет место, вихри уносятся вместе с потоком из расчетной области (фиг. 8). На слайдах центр рассматриваемого вихря помечен светлым кружком. В другом случае, когда поток из разогретой области заперт контактным разрывом, вихри возвращаются в отрывную зону, производя турбулизацию течения в ней (фиг. 9). Динамика координат центров вихрей X_v, Y_v и величины давления в центрах вихрей P_v для двух рассмотренных типов поведения вихрей представлена на фиг. 10. Светлые кружки соответствуют моментам времени на слайдах фиг. 8, 9.

Стохастически образующиеся вихри формируют вблизи тела зону отрыва потока, содержащую турбулентноподобные флуктуации параметров. Течения с флуктуациями параметров исследовались, в частности, в [15], [31]. В случае $d = 0.1$ вихри сильнее, чем для $d = 0.25$, и сила возвратных вихрей оказалась достаточной для генерации турбулентного перемешивания горячего газа в канале, образовывающемся внутри отрывной зоны, и более холодного окружающего газа. Поля параметров течения при турбулентном перемешивании для $d = 0.1$ представлены на фиг. 11. Видно, что этот процесс связан с образованием вторичных ударных волн и дроблением контактных границ. Сжимаемая турбулентность в области границ разогретого канала может быть охарактеризована как турбулентность, задаваемая энтропийной модой в начальном поле флуктуаций: плотность меняется резко, в то время как давление остается близким к постоянному (см. [15]). При уменьшении количества возвратных вихрей турбулентное перемешивание ослабевает. Поля плотности и давления для $d = 0.1$ при возрастании интенсивности процесса турбулентного перемешивания внутри ударного слоя представлены на фиг. 11.

В случае $d = 0.25$ вихри слабее, горячий канал внутри отрывной области не образовывается. Турбулентное перемешивание генерируется на начальной стадии за счет стохастически образовывающихся первичных вихрей. Расчетное поле плотности для этого случая ($d = 0.25$) при $t = 16.05$ представлено на фиг. 12.

2.6. Динамика основных параметров течения

Подробный анализ динамики подобных течений представлен в [12], [24]. Остановимся здесь на некоторых моментах, связанных с особенностями проведения расчетов. Динамика определя-

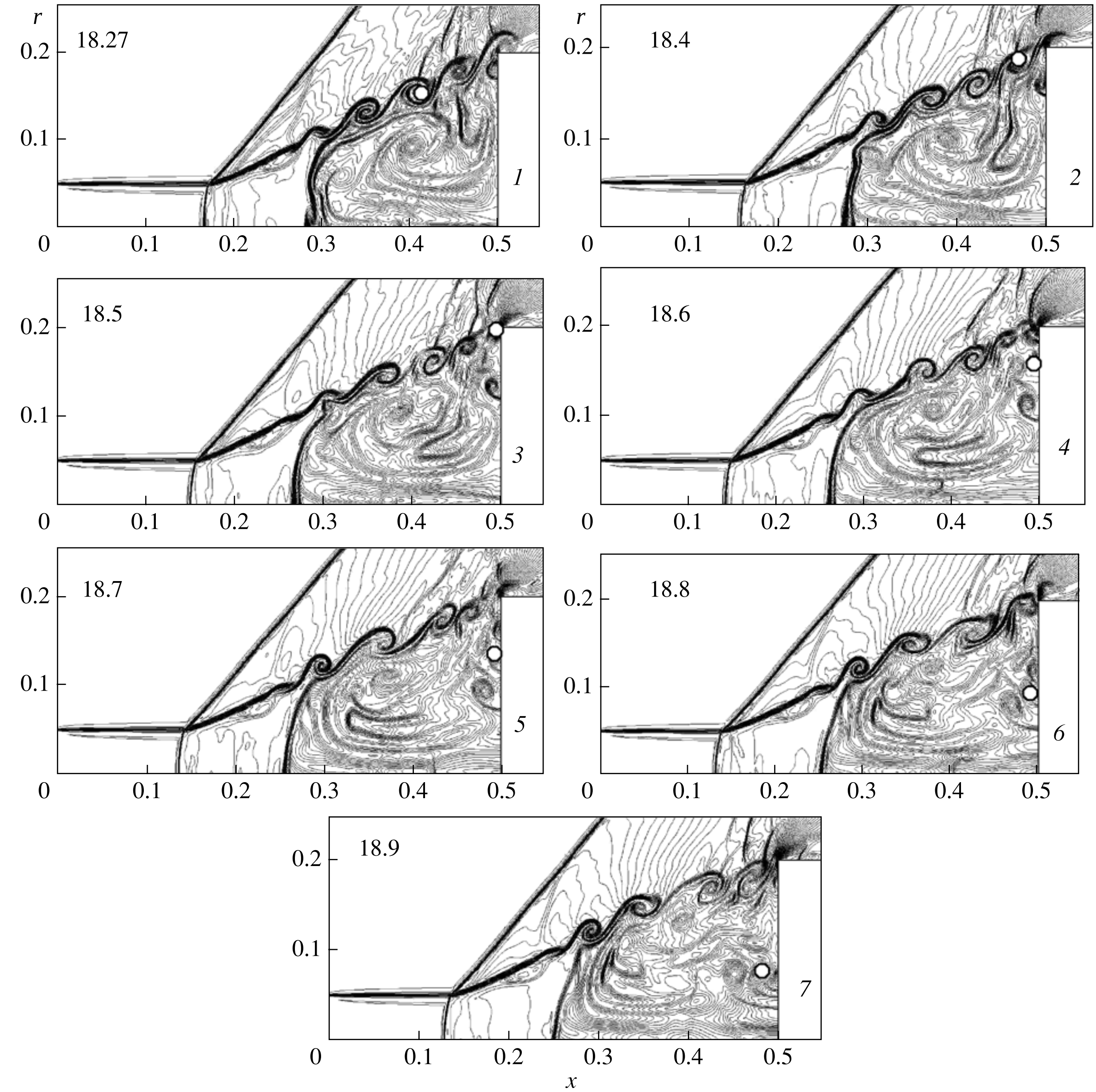


Фиг. 8.

ющих параметров течения для $d = 0.25$ представлена на фиг. 13: (а) – давление и (б) – плотность в точке торможения, p_{st} и ρ_{st}; (в) F – сила сопротивления торца (деленная на 2π). Здесь

$$F = \int_0^{R_b} prdr.$$

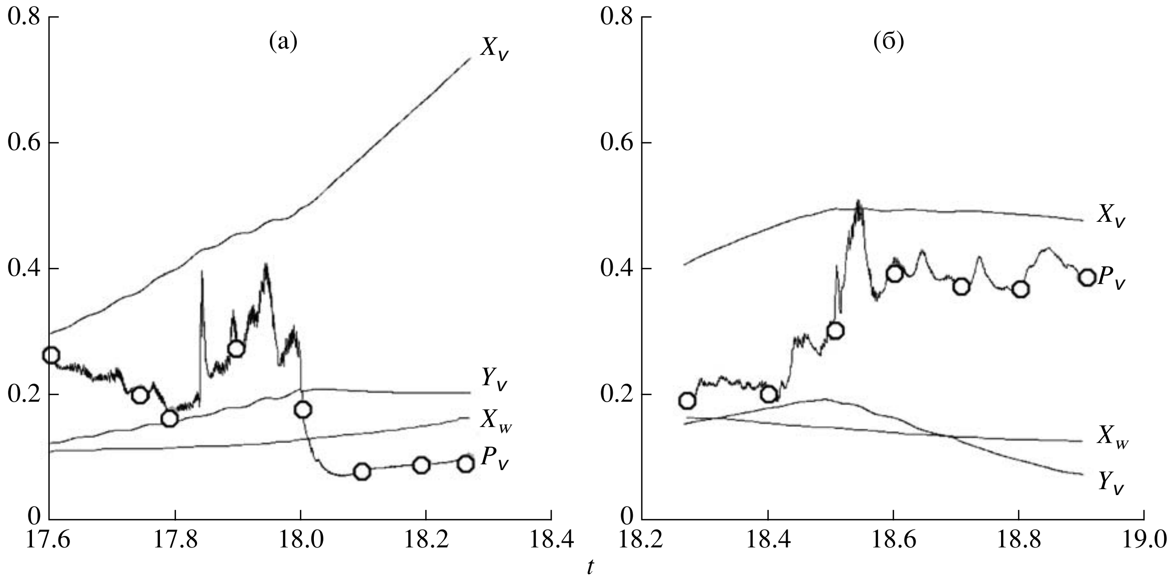
Вихри, состоящие из скрученных контактных границ, зарождаются стохастически, движутся в направлении торца тела и, взаимодействуя с телом, вызывают серию слабых ударных волн (и/или волн сжатия), нормальных к поверхности торца и движущихся к оси симметрии. Кумуляция этих ударных волн на оси симметрии является причиной возникновения пиков в динамике давления торможения и его пульсаций (связанных с волнами сжатия, см. [32]). Заметим, что амплитуда этих пиков не является корректно определенной теоретически и численно. Численная величина амплитуды этих пиков определяется схемным представлением фронта ударной волны (так как схема не является монотонной) и в окрестности оси симметрии может достигать от 10%



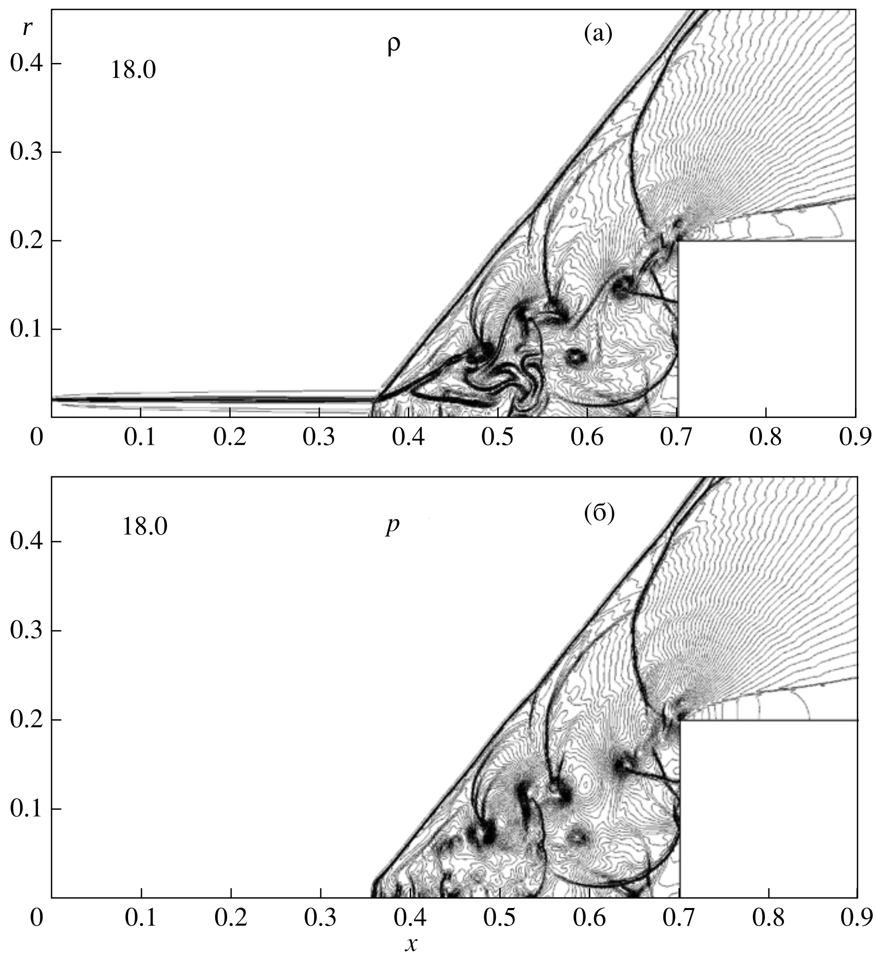
Фиг. 9.

до 30% от решения. Тем не менее в области оси симметрии схема не теряет устойчивости. Это происходит за счет минимизации счетных потоков через границу разностной ячейки при консервативном встраивании граничных условий в расчетную область.

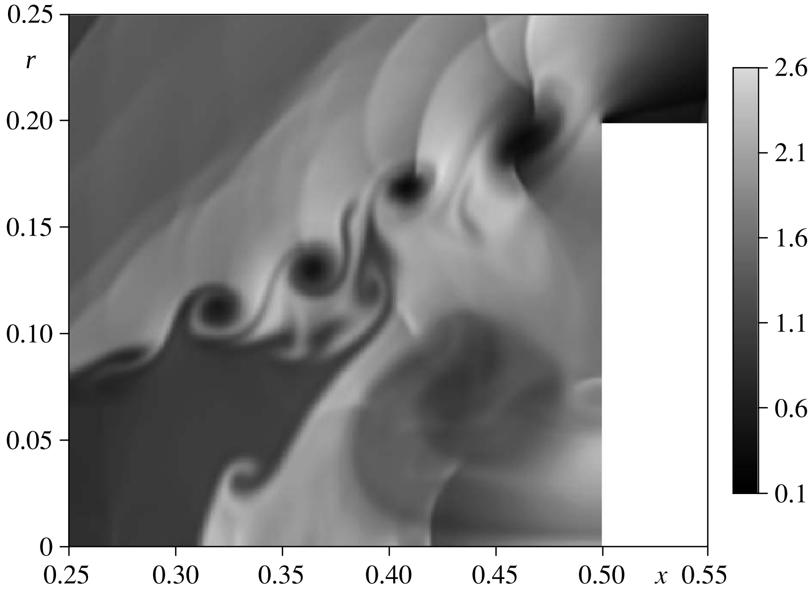
Таким образом, динамика рассматриваемых параметров представляет собой суперпозицию крупномасштабных пульсаций потока и мелкомасштабных флуктуаций, связанных со стохастически образующимися вихрями. На фиг. 14а приведены результаты расчетов на двух различных разностных сетках: $F_1 = F(t)$ – динамика силы сопротивления торца, полученная на исходной сетке с шагами $h_x = h_r = 0.0005$, и $F_2 = F(t) + 0.01$ – зависимость, – полученная на сетке с вдвое более крупными шагами: $h_x = h_r = 0.001$ (здесь в расчетах для удобства сопоставления торец обтекаемого тела был сдвинут на 0.05 вправо по оси x). Видно, что пульсации потока и их период сохраняются и на более крупной сетке, мелкомасштабные колебания более сглажены по времени и пики, связанные с явлениями кумуляции, менее ярко выражены. В рассматриваемых расчетах на разных сетках в полях течений сохраняются основные элементы структуры течения и, кроме


(а)
(б)
X_v
Y_v
X_w
P_v
t
0.8
0.6
0.4
0.2
0
17.6
17.8
18.0
18.2
18.4
18.6
18.8
19.0

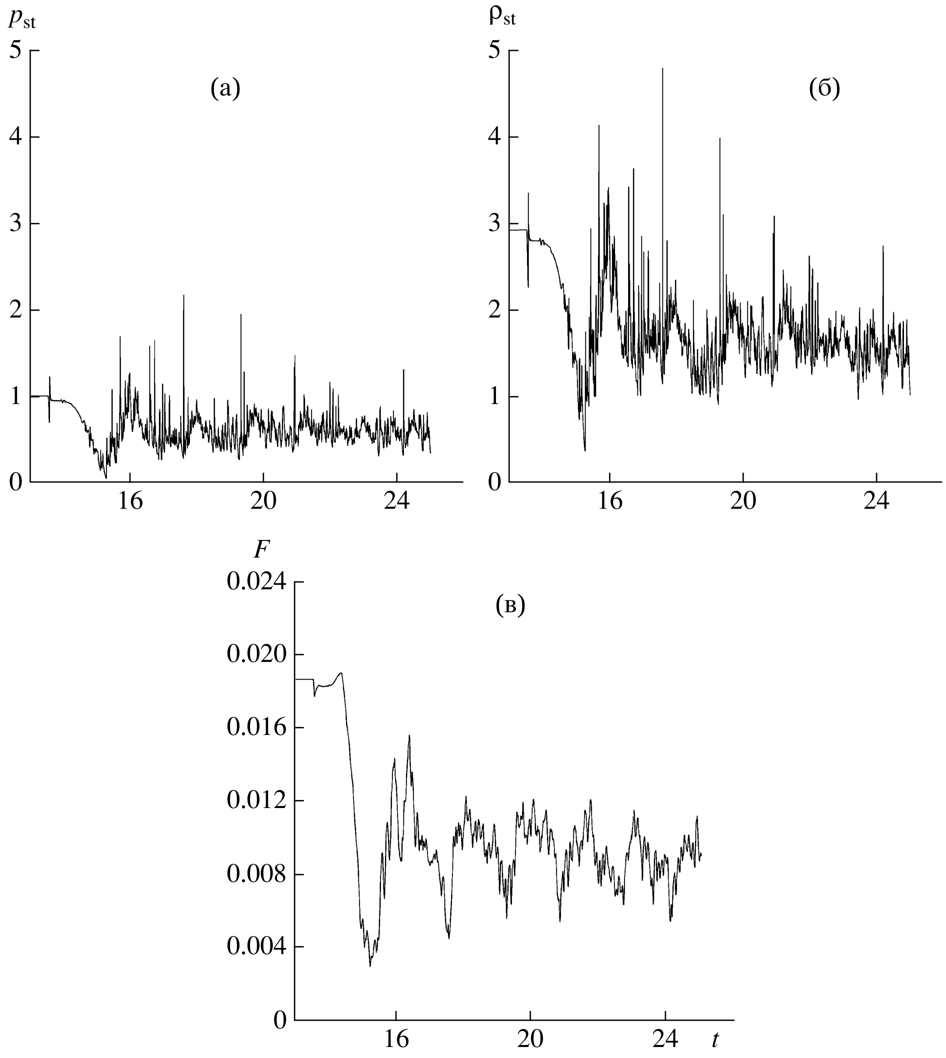
Фиг. 10.


r
18.0
ρ
(а)
18.0
p
(б)
x
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9

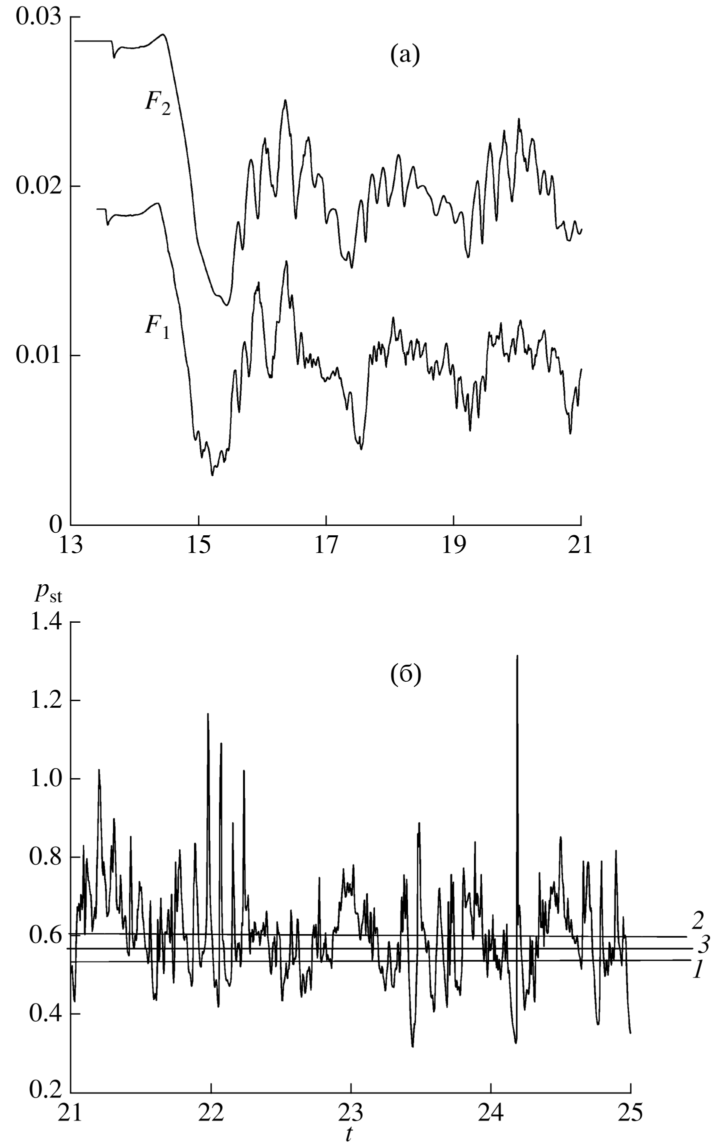
Фиг. 11.


0.25
r
0.20
0.15
0.10
0.05
0
0.25 0.30 0.35 0.40 0.45 0.50 x 0.55
2.6
2.1
1.6
1.1
0.6
0.1

Фиг. 12.


p_{st}
(а)
ρ_{st}
(б)
5
4
3
2
1
0
16 20 24
F
(в)
0.024
0.020
0.016
0.012
0.008
0.004
0
16 20 24 t

Фиг. 13.



Фиг. 14.

этого, на более мелких сетках регистрируются дополнительные элементы течения, связанные с более высокой разрешимостью схемы. Заметим, что в расчетах на более грубых сетках на временах установления квазистационарного режима происходит численное размазывание контактных разрывов. При этом неустойчивости и пульсации потока не регистрируются. В расчетах течение выходит на стационарный режим с постоянными значениями параметров. Однако размазка схемой контактного разрыва такова, что эти постоянные параметры близки к средним значениям, полученным в расчетах пульсационного течения со стохастическими флуктуациями параметров, проведенных на мелкой сетке. Действительно, такой вывод следует из сравнения динамики давления торможения, приведенной на фиг. 14б. Здесь *1* – стационарное значение на крупной сетке из [20], *2* – среднее значение на мелкой сетке, *3* – среднее значение на мелкой сетке без учета численных пиков. Таким образом, можно утверждать, что полученный в данной работе режим течения принципиально достижим лишь на достаточно мелких сетках и с помощью схем, гарантирующих сеточную разрешимость контактных разрывов на временах установления квазистационарного режима течения. Заметим, что в данном случае высокопродуктивные параллельные вычисления являются оправданными.

Сравнение расчетов, проведенных по численной методике, основанной на представленной разностной схеме, и расчетов, проведенных с использованием коммерческого кода GASPex, показало достаточную продуктивность разработанной численной методики для исследования задач подобного типа (см. [12]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе системы уравнений Эйлера построена новая модификация двумерной разностной схемы на минимальном шаблоне для расчета осесимметричных течений. Схема является явной, консервативной по функциям и производным и имеет второй порядок точности по пространству и времени. Схема допускает построение аппроксимаций граничных условий, не нарушающих свойство консервативности в расчетной области. Представлены результаты численного моделирования взаимодействия бесконечного разреженного канала с цилиндрическим ударным слоем. Благодаря достаточной схемной разрешимости контактных разрывов получено и исследовано пульсационное течение с неустойчивостями контактных границ, подобными неустойчивости Рихтмайера–Мешкова и сдвиговой неустойчивости, принадлежащей к классу неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца.

Получен стохастический пульсационный режим потока, связанный с зарождением неустойчивостей контактных разрывов. Наблюдается скручивание контактной границы в передней отрывной зоне и зарождение вихрей в области между горячим и холодным потоками. Предложены механизмы зарождения неустойчивостей контактных границ и механизм пульсаций потока. Показано, что пульсации потока определяются соотношением между циркуляционным и возвратным течениями, составляющими возвратно-циркуляционное течение, а также циклическим запиранием потока из разогретой области вертикально расположенным контактным разрывом, являющимся границей разогретой области. С помощью траекторного анализа исследовано явление турбулизации передней зоны отрыва потока. Показано, что при малых радиусах источника внутри ударного слоя образуется горячий канал и наблюдается турбулентное перемешивание на границах этого канала. Описан механизм импульсного поведения параметров торможения, связанный с кумуляцией вторичных нормальных к торцу тела ударных волн. Проведен анализ результатов, связанных со схемной разрешимостью контактных разрывов на различных сетках.

Автор благодарит Европейское бюро Аэрокосмических исследований и разработок (European Office of Aerospace Research and Development – EOARD) за поддержку данной работы, Дойла Найта (Doyle Knight), директора Лаборатории компьютерного проектирования (Laboratory of Computing Design) Университета Ратгерса (Rutgers University), США, за предоставленную возможность проведения расчетов на компьютерной базе данной лаборатории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lax P.D., Wendroff B.* Systems of conservation laws // Communs Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. P. 217–237.
2. *Толстых А.И.* О неявных разностных схемах третьего порядка точности для многомерных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1976. Т. 16. № 5. С. 1182–1190.
3. *Грудницкий В.Г., Прохорчук Ю.А.* Один прием построения разностных схем с произвольным порядком аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 6. С. 1249–1252.
4. *Белоцерковский О.М., Грудницкий В.Г.* Исследование нестационарных течений газа со сложной внутренней структурой методами интегральных соотношений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1400–1415.
5. *Белоцерковский О.М., Грудницкий В.Г., Прохорчук Ю.А.* Разностная схема второго порядка точности на минимальном шаблоне для гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 1. С. 119–126.
6. *Азарова О.А., Грудницкий В.Г.* Численные методы с выделением разрывов для расчета течений при локализованном выделении энергии в жидкостях и газах // Матем. моделирование. 1992. Т. 4. № 12. С. 9–13.
7. *Азарова О.А.* Разностная схема с выделением разрывов для расчета взрывных течений в жидкостях и газах // Акустика неоднородных сред. Динамика сплошной среды. 1992. Вып. 105/Ин-т гидродинамики СО РАН (Новосибирск). С. 8–14.
8. *Грудницкий В.Г., Подобряев В.Н.* О взаимодействии ударной волны с цилиндрическим резонатором // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 4. С. 1008–1011.
9. *Баймиров Б.М., Грудницкий В.Г.* Численное исследование течений газа, возникающих при “многоточечном” выделении энергии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 2. С. 271–281.

10. *Азарова О.А., Власов В.В., Грудницкий В.Г., Ущаповский В.А.* Исследование различных подходов к построению схем высокого порядка точности для квазилинейных эволюционных уравнений – Деп. в ВИНИТИ, 1983. Сер. 0. № 6.

11. *Азарова О.А.* Численное моделирование процессов при быстром выделении энергии в воде // Алгоритмы для числ. иссл. разрывных течений. Тр. ВЦ РАН. М., 1992. С. 80–98.

12. *Farzan F., Knight D., Azarova O., Kolesnichenko Y.* Interaction of microwave filament and blunt body in supersonic flow: Paper AIAA-2008-1356. P. 1–24.

13. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

14. *Азарова О.А., Грудницкий В.Г., Колесниченко Ю.Ф.* Численное исследование воздействия тонкого разреженного канала на сверхзвуковое обтекание тел с клиновидным выступом // Матем. моделирование. 2005. Т. 18. № 10. С. 104–112.

15. *Азарова О.А.* Численное моделирование взаимодействия турбулентности с ударной волной в потоке сжимаемого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 3. С. 543–552.

16. *Георгиевский П.Ю., Левин В.А.* Сверхзвуковое обтекание тел при наличии внешних источников энерговыделения // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 8. С. 684–687.

17. *Артемьев В.И., Бергельсон В.И., Немчинов И.В. и др.* Изменение режима сверхзвукового обтекания препятствия при возникновении перед ним тонкого разреженного канала // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1989. № 5. С. 146–151.

18. *Георгиевский П.Ю., Левин В.А.* Нестационарное взаимодействие сферы с атмосферными температурными неоднородностями при сверхзвуковом обтекании // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 1993. № 4. С. 174–183.

19. *Kolesnichenko Yu. F., Brovkin V.G., Azarova O.A. et al.* Microwave energy release regimes for drag reduction in supersonic flows: Paper AIAA-2002-0353. P. 1–13.

20. *Азарова О.А., Грудницкий В.Г., Колесниченко Ю.Ф.* Стационарное обтекание тел сверхзвуковым потоком газа, содержащим бесконечный тонкий разреженный канал // Матем. моделирование. 2006. Т. 18. № 1. С. 79–87.

21. *Kolesnichenko Yu. F., Azarova O.A., Brovkin V.G. et al.* Basics in beamed MW energy deposition for flow/flight control: Paper AIAA-2004-0669. P. 1–14.

22. *Georgievskii P.Y., Levin V.A.* Transition to irregular regimes of supersonic flows over bodies initiated by energy deposition: Paper AIAA-2005-1047. P. 1–9.

23. *Georgievskii P.Y., Levin V.A.* Stability problem for front separation regions control realized by energy deposition: Paper AIAA-2006-402. P. 1–7.

24. *Azarova O.A., Kolesnichenko Yu.F.* On details of flow structure during the interaction of an infinite rarefied channel with a cylinder shock layer // Proc. 7th Internat. Workshop on Magnetoplasma Aerodynamics, Moscow, April 2007. M.: Inst. High Temperatures RAS, 2007. P. 101–113.

25. *Azarova O.A., Kolesnichenko Yu.F.* Turbulent mixing via eddies generation in pulsating flow mode // Proc. West-East High Speed Flow Field Conf. (WEHSFF Conference). Moscow, November 19–22, 2007.

26. *Мешков Е.Е.* Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1969. № 5. С. 151–158.

27. *Michalke A.* On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer // J. Fluid Mech. 1965. V. 23. № 3. P. 521–544.

28. *Фридман А.М.* Предсказание и открытие сильнейших гидродинамических неустойчивостей, вызванных скачком скорости: теория и эксперимент // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 225–242.

29. *Антонов А.Н., Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н.* Математическое моделирование колебательных режимов при обтекании тела с иглой // Матем. моделирование. 1989. Т. 1. № 1. С. 14–23.

30. *Feszly D., Badcock K., Richards B.E.* Driving mechanisms of high-speed unsteady spiked body flows. Part 1: Pulsation Mode // AIAA Journal. 2004. V. 42. № 1. P. 106.

31. *Азарова О.А., Яницкий В.Е.* Численное исследование статистических характеристик пульсаций плотности в потоке с ударной волной // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 10. С. 1751–1757.

32. *Азарова О.А., Колесниченко Ю.Ф.* Численное моделирование воздействия тонкого разреженного канала на сверхзвуковое обтекание цилиндрического тела с полостью сложной формы // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 4. С. 27–39.

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2009, том 49, № 4, с. 754–768

УДК 519.634

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ТЕЙЛОРА МЕЖДУ ДВУМЯ ЦИЛИНДРАМИ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ[1)]

© 2009 г. О. М. Белоцерковский*, В. В. Денисенко*, А. В. Конюхов, А. М. Опарин *, О. В. Трошкин*, В. М. Чечеткин*****

*(*123056 Москва, ул. 2-я Брестская, 19/18, Ин-т автоматизации проектирования РАН;*
***125412 Москва, ул. Ижорская, 13/19, Ин-т теплофиз. экстремальных состояний Объединенного ин-та высоких т-р РАН;*
****125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН)*
e-mail: ned13@rambler.ru

Поступила в редакцию 22.10.2008 г.

Численно исследуется неустойчивость ламинарного течения между двумя вращающимися цилиндрами – течения Тейлора. Моделирование производилось на основе уравнений движения невязкой жидкости – уравнений Эйлера. Проведены исследования влияния физических параметров задачи (ширина зазора между цилиндрами, начальное возмущение, разность скоростей между цилиндрами) на устойчивость течения. Показано, что переход к турбулентности сопровождается рождением крупных вихрей. Сделан анализ и сравнение результатов с результатами других подобных работ. Библ. 41. Фиг. 10.

Ключевые слова: устойчивость течения Тейлора между двумя цилиндрами, численное моделирование уравнения Эйлера для невязкой жидкости, турбулентность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые изучение устойчивости течения между вращающимися цилиндрами было проведено Тейлором (см. [1]). Тейлор исследовал трехмерную задачу аналитически методом линеаризации уравнений Навье–Стокса. Он получил вековое уравнение (см. [2]) и решил его для случая $R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)/2$. В результате его исследований была получена кривая, разделяющая область устойчивости и неустойчивости в указанном приближении (см. [2]). Кроме того, Тейлор провел эксперимент для проверки своих теоретических результатов.

Следует заметить, что даже в указанном приближении задача имеет значительные вычислительные трудности. Это связано с тем, что вековое уравнение представляет собой определитель системы уравнений, у которой каждое уравнение содержит бесконечное число членов. Отличием данной работы от работы Тейлора является отсутствие указанного приближения, а также двумерная постановка.

Работа является продолжением исследования 2D-течения между цилиндрами – классической задачи Тейлора (см. [3], где исследовалась сдвиговая неустойчивость с разрывом угловой компоненты скорости). Внутренняя область течения вначале имела скорость, совпадающую со скоростью внутреннего цилиндра, а внешняя – скорость наружного цилиндра. Исследование производилось по одному параметру: разности скоростей между цилиндрами. Было получено, что после перехода в турбулентный режим течения структура течения представляла собой перемежающуюся турбулентность, т.е. области почти ламинарного течения сменяются областями турбулентности (крупные вихри). Также был построен спектр кинетической энергии, показывающий, что основная ее доля содержится в длинноволновой области.

Следует также обратить внимание на [4], где теоретически исследована устойчивость плоскопараллельного сдвигового течения. Было получено, что чем больше длина волны возмущения, тем неустойчивее становится течение. Также на устойчивость течения влияет распределение завихренности $\xi(r) = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$; более того, профиль $\xi(r)$ является более удобным, чем профиль скоро-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной программы Президиума РАН № 14 и проекта РФФИ (код проекта 06-01-00558).

сти $V(r)$, при изучении устойчивости. Если профиль завихренности имеет максимум в некоторой точке r', то чем больше вторая производная в данной точке $\frac{d^2}{dr^2}\xi(r)|_{r=r'}$, тем более неустойчиво течение.

Ниже привлекаемым общим методом служит численный эксперимент из [5], подкрепленный физическими доводами из [6].

В целом работа касается исследования так называемой *структурной неустойчивости течения*, связанной с возникновением крупных вихрей.

Известно, что структурная гидродинамическая неустойчивость была обнаружена Рэлеем (см. [7], [8]) практически одновременно с традиционной *параметрической неустойчивостью течений*, открытой Рейнольдсом (см. [9]).

В отличие от последней, первая не ограничивается числом Рейнольдса, сводящем гидродинамику к классической механике малых (или локальных) или конечных (или нелокальных) бифуркаций решений нелинейных уравнений (см. [10], [17]). Более того, самому указанному числу здесь отводится скромная роль "стартера", "включающего" большие градиенты скорости у твердой стенки при наличии условия прилипания.

Вследствие же больших градиентов скорости, возникающих по тем или иным причинам, локально параллельным (или "ламинарным") слоям жидкости или газа становится почему-то "выгоднее" сворачиваться в рулоны или образовывать крупные вихри с четко обозначенной осью вращения.

Сворачивание слоев в рулоны может быть вызвано также разностью направлений градиентов плотности и давления (*неустойчивость Фридмана*, см. [18]), касательной или нормальной компонент скорости (*неустойчивости Гельмгольца–Кельвина*, см. [19], [20], или *Рихтмайера–Мешкова*, см. [21], [22], соответственно), плотности (*неустойчивость Тейлора*, см. [23]), температуры (*неустойчивость Бенара*, см. [24], [25]), собственных частот колебаний (см. [26]–[29]), обратного числа Россби (см. [30]) и других физических параметров (см. ([5], [29], [31]–[34]).

Возникающие вихри неустойчивости оказываются элементами развивающегося *каскада турбулентности*, допускающего прямое численное моделирование (см. [35]).

Между тем механика и термодинамика вихря все еще остаются невыясненными. Например, вихревая *трубка Ранки–Хилша* (см. [36], [37]) способна на десятки градусов Цельсия понизить температуру воздуха, поступающего к центру вращения (чем более полувека пользуются американские пожарные).

Напротив, в *газовой центрифуге* по разделению изотопов температура не меняется по меньшей мере для основного (бароцентрического) распределения плотности (см. [38], [39]).

В любом случае центр вихря неизменно втягивает в себя мелкую примесь (*парадокс чаинок*, скапливающихся у центра вращения вопреки ожидаемому разбеганию к краю), чему конечной причиной служит *эйлерова конвекция* $(\bar{\mathbf{V}}\bar{\nabla})\bar{\mathbf{V}}$ (см. [29]).

Эта главная "нелинейность" механики сплошных сред приводит и к возникновению самих вихрей. Иначе говоря, с вязкостью, но без конвекции (*неустойчивость Сэфмена–Тейлора*, см. [40]) течение может быть сколь угодно сложным, но центров вращения при этом не образуется (см. [41]).

Влиянию эйлеровой конвекции на возникновение и развитие вихрей неустойчивости в основном приближении невязкой среды в основном и посвящена настоящая работа.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе будет исследоваться влияние физических параметров задачи на развитие турбулентности (на момент времени перехода ламинарного режима в турбулентный). Как уже отмечалось, моделирование течения производилось на основе уравнений Эйлера.

Как известно, число Рейнольдса Re является безразмерным параметром, показывающим степень неустойчивости течения (под неустойчивостью понимается переход ламинарного режима течения в турбулентный). В нашем подходе, использующем уравнения Эйлера, отсутствует понятие физического числа Рейнольдса, так как в нем отсутствует член с молекулярной вязкостью. Но при численном решении системы уравнений появляется численная вязкость, связанная с невязками разностных уравнений, которая ведет к появлению численного Re и обуславливает физическую корректность предлагаемого подхода. Таким образом, можно ввести безразмерное число, характеризующее задачу по аналогии с Re, и исследовать его влияние на устойчивость течения.

Моделирование течения на основе уравнений Эйлера основывается на двух гипотезах, находящих подтверждение в экспериментах (см. [5]).

Гипотеза 1. *Независимость крупномасштабных упорядоченных структур турбулентного течения и мелкомасштабной стохастической турбулентности для больших чисел Рейнольдса.*

Гипотеза 2. *Независимость характера развития крупномасштабных структур от вязкости.*

Выпишем уравнения Эйлера в консервативной форме для двумерного течения в полярных координатах (r, φ):

1) уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru\rho) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v\rho) = 0, \tag{2.1}$$

где u, v суть r- и φ-компоненты соответственно;

2) уравнения для двух компонент плотности импульса

$$r\text{-компонента}\quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r(\rho u^2 + p)) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho uv) = \frac{p}{r}, \tag{2.2}$$

$$\varphi\text{-компонента}\quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho uv) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho v^2 + p) = 0; \tag{2.3}$$

3) уравнение для удельной полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru(\rho E + p)) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(v(\rho E + p)) = 0, \tag{2.4}$$

где t – время (с), ρ – плотность (г/см^3), $E = e + \mathbf{V}^2/2$ – удельная полная энергия (эрг/г) и e – удельная внутренняя энергия (эрг/г).

Таким образом, моделирование производилось на основе системы уравнений (2.1)–(2.4).

Рассмотрим кратко метод, с помощью которого решались данные уравнения. Рассматриваемая область была покрыта полярной сеткой с числом узлов $n_r \times n_\varphi$, где n_r – число узлов по радиусу, а n_φ – по углу. Заметим, что уравнения (2.1)–(2.4) имеют следующую структуру:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{F}(\mathbf{U})) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U}), \tag{2.5}$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho E\end{pmatrix},\quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix}u\rho\\ \rho u^2 + p\\ \rho uv\\ u(\rho E + p)\end{pmatrix},\quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix}v\rho\\ \rho uv\\ \rho v^2 + p\\ v(\rho E + p)\end{pmatrix},\quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{p}{r}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Отдельная расчетная ячейка $S_{ij} = [r_{i-1/2}, r_{i+1/2}] \times [\varphi_{j-1/2}, \varphi_{j+1/2}]$. Уравнения (2.5) записываются в интегродифференциальной форме:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}_{ij}(t) = \frac{1}{r_{ij}}\frac{1}{\Delta r}(r_{i-1/2,j}\mathbf{F}_{i-1/2,j} - r_{i+1/2,j}\mathbf{F}_{i+1/2,j}) + \frac{1}{r_{ij}}\frac{1}{\Delta\varphi}(\mathbf{G}_{i,j-1/2} - \mathbf{G}_{i,j+1/2}) + \mathbf{P}_{ij}(\mathbf{U}_{ij}) \equiv \mathbf{L}_{ij}(\mathbf{U}_{ij}), \tag{2.6}$$

где

$$\mathbf{U}_{ij}(t) = \frac{1}{S_{ij}}\int\limits_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}}\int\limits_{\varphi_{j-1/2}}^{\varphi_{j+1/2}}\mathbf{U}(r, \varphi, t)rdrd\varphi$$

есть вектор, представляющий количества консервативных величин (массы, импульса, энергии и т.д.) в объеме расчетной ячейки S_{ij}. Величины $\mathbf{F}_{j\pm 1/2, j}$, $\mathbf{G}_{i, j\pm 1/2}$ представляют собой интегралы потоков по граням соответствующих ячеек:

$$\mathbf{F}_{i+1/2, j} = \frac{1}{\Delta\varphi}\int\limits_{j-1/2}^{j+1/2}\mathbf{F}(\mathbf{U}(r_{i+1/2}, \varphi, t))d\varphi,$$

$$\mathbf{G}_{i, j+1/2} = \frac{1}{r_{ij}\Delta r}\int\limits_{i-1/2}^{i+1/2}\mathbf{G}(\mathbf{U}(r, \varphi_{j+1/2}, t))rdr.$$

При заданном алгоритме вычисления вектора правых частей $\mathbf{L}_{ij}(\mathbf{U}_{ij})$ система (2.6) является системой ОДУ относительно времени t, для интегрирования которой используется метод Рунге–Кутты:

$$\mathbf{U}_{ij}^{(1)} = \mathbf{U}_{ij}^{(n)} + \Delta t\mathbf{L}_{ij}(\mathbf{U}^{(n)}, t^{(n)}),$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{U}_{ij}^{(n)} + \frac{1}{4}\mathbf{U}_{ij}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t\mathbf{L}_{ij}(\mathbf{U}^{(1)}, t^{(n)} + \Delta t),$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\mathbf{U}_{ij}^{(n)} + \frac{2}{3}\mathbf{U}_{ij}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t\mathbf{L}_{ij}\left(\mathbf{U}^{(2)}, t^{(n)} + \frac{\Delta t}{2}\right),$$

где индекс (n) вверху означает n-й шаг по времени.

Теперь приступим к приведению системы уравнений, с помощью которых производилось моделирование, к безразмерным переменным. Выпишем уравнение Эйлера в декартовых координатах:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{2.7}$$

где ρ – плотность среды, p – ее давление, а $\mathbf{V}$ – вектор скорости. Сделаем замену

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{\Omega R}\mathbf{V}, \quad \bar{t} = \frac{1}{T}t, \quad \bar{\nabla} = L\nabla,$$

где черта сверху обозначает безразмерную переменную. Подставив в (2.7), получим

$$\frac{1}{T}\frac{\partial\bar{\mathbf{V}}}{\partial\bar{t}} + \frac{\Omega R}{L}(\bar{\mathbf{V}}\bar{\nabla})\bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho\Omega RL}\bar{\nabla}p. \tag{2.8}$$

Если положить

$$T = \frac{L}{\Omega R}, \tag{2.9}$$

то (2.8) примет следующий вид:

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{V}}}{\partial\bar{t}} + (\bar{\mathbf{V}}\bar{\nabla})\bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\rho(\Omega R)^2}\bar{\nabla}p. \tag{2.10}$$

Вычислив безразмерное давление $\bar{p} = \dfrac{1}{\rho(\Omega R)^2}p$, в итоге получим из (2.10)

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{V}}}{\partial\bar{t}} + (\bar{\mathbf{V}}\bar{\nabla})\bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\bar{\nabla}\bar{p}. \tag{2.11}$$

Таким образом, получается, что уравнение Эйлера (2.11) не меняется (инвариантно) относительно операции приведения к безразмерным переменным. Здесь возникает параметр с размерностью времени (2.9) (характерное время задачи). Приведя к безразмерным переменным уравнение непрерывности, получим аналогичный результат; действительно, $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$; после аналогичных преобразований имеем

$$\frac{1}{T}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{t}} + \frac{\Omega R}{L}\overline{\operatorname{div}}(\bar{\rho}\bar{\mathbf{V}}) = 0.$$

Положив $T = \dfrac{L}{\Omega R}$, получим инвариантность уравнения непрерывности. Теперь приведем к безразмерным переменным уравнение для удельной полной энергии: $\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \operatorname{div}[(\rho E + p)\mathbf{V}] = 0$. Вычислив безразмерную энергию $\bar{E} = \dfrac{1}{(\Omega R)^2}E$ и подставив в уравнение все безразмерные величины, получим

$$\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial\bar{t}}(\bar{\rho}\bar{E}) + \frac{\Omega R}{L}\overline{\operatorname{div}}((\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p})\bar{\mathbf{V}}) = 0.$$

Таким образом, получили, что уравнение инвариантно относительно операции приведения к безразмерным переменным и $T = \dfrac{L}{\Omega R}$. Будем считать, что $R = R_{\text{ср}}$ – радиус середины зазора между цилиндрами, $L = \Delta R$ – ширина зазора, Ω – угловая скорость внешнего цилиндра.

В дальнейшем все переменные будут считаться безразмерными, поэтому черту сверху писать не будем.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В расчетах были получены характерные структуры течения и энергетические величины для турбулентных течений между цилиндрами.

В численном эксперименте считалась энергия пульсаций по следующей формуле:

$$E_t = \frac{1}{E_0}\int[(u')^2 + (v')^2]dV,$$

где E_0 – кинетическая энергия течения в начальный момент времени, u', v' – пульсации радиальной и угловой компонент скорости соответственно. Пульсации вычислялись следующим образом: проводилось усреднение обеих компонент по углу по формуле

$$\langle f(r)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \varphi)d\varphi,$$

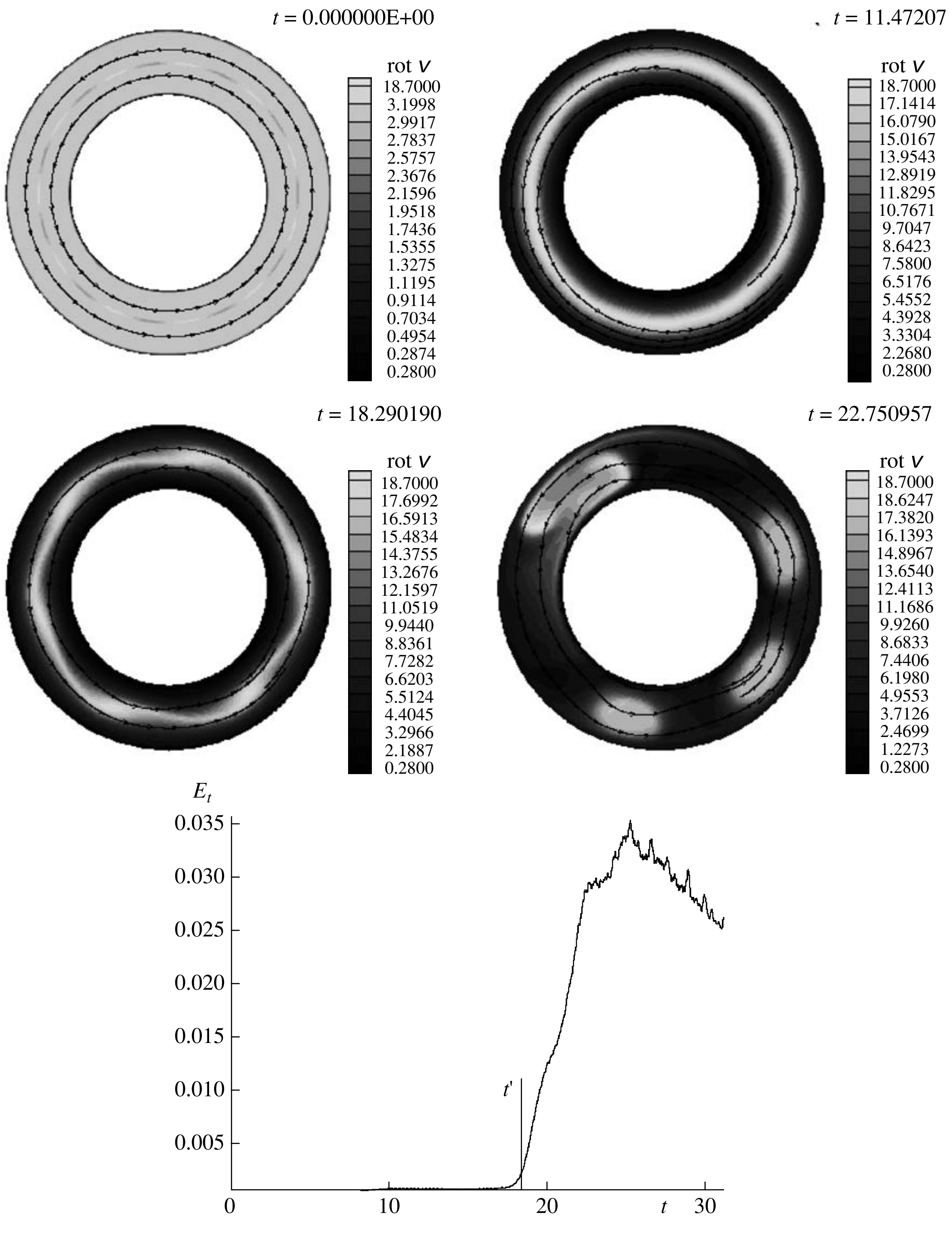
где $\langle f\rangle$ – среднее значение функции. Далее вычислялись пульсации по формуле $f'(r, \varphi) = \langle f(r)\rangle - f(r, \varphi)$, где $f(r, \varphi)$ – значение функции в данной точке. Вначале задается течение по формуле

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r}, \quad R_1 < R_2$$

(течение Тейлора). В данной работе будет рассматриваться случай, когда внешний цилиндр вращается, а внутренний покоится, т.е. $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = \Omega$; тогда

$$v = \frac{\Omega}{R_2^2 - R_1^2}\left(R_2 r - \frac{R_2 R_1^2}{r}\right).$$

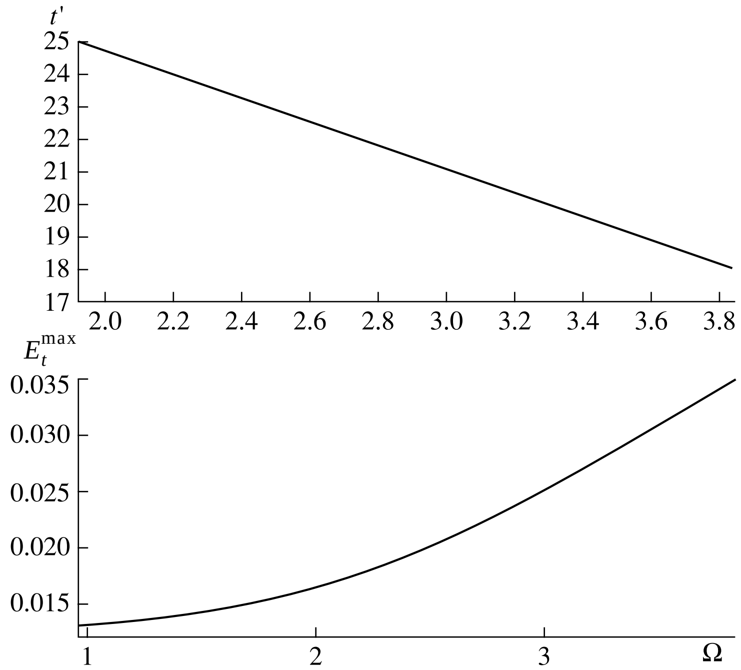
Возмущалась только радиальная компонента скорости. Возмущение вносилось посередине зазора и имело вид $\delta U(\varphi) = a\sin(n\varphi)$, где n – число мод, a – амплитуда. Будем называть временем перехода в пульсационный режим (или временем перехода) t' время, когда энергия пульсаций E_t начинает резко возрастать до своего максимума. Максимум этой энергии будем называть энер-



Фиг. 1.

гией пульсационного режима и обозначим его через $E_t^{\max}$. Будем в дальнейшем называть турбулентный режим течения пульсационным.

Обратимся к результатам, полученным из исследования влияния разности скоростей между цилиндрами на устойчивость течения. Все расчеты проводились на сетке 51×350, за исключением исследования влияния размера сетки. Возмущение содержит 11 мод по частоте, а амплитуда



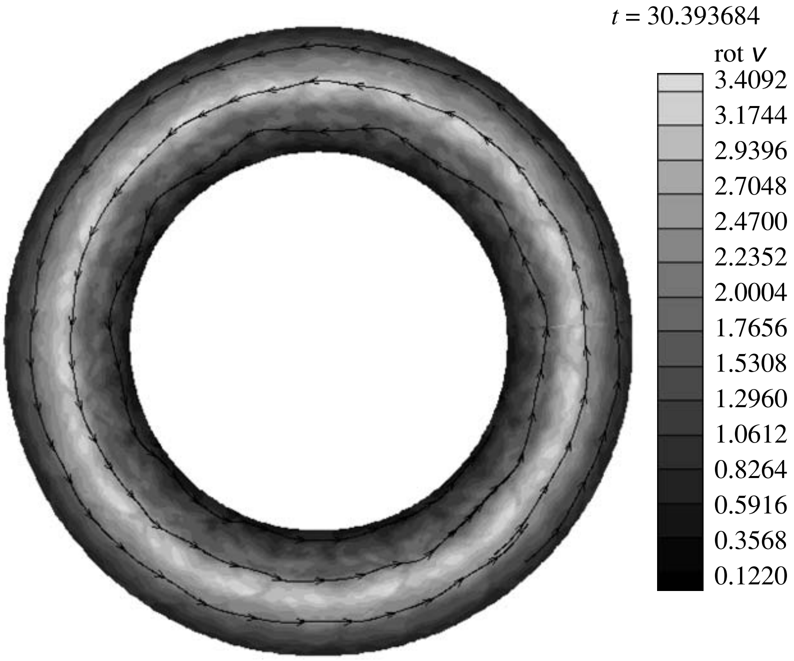
Фиг. 2.

составляет ~4% от местной скорости (угловой компоненты). Заметим, что течение между цилиндрами носит сдвиговый характер с шириной сдвигового слоя, равной ширине зазора между цилиндрами. Расчеты проводились для угловых скоростей внешнего цилиндра $\Omega = 0.96, 1.92, 3.84$.

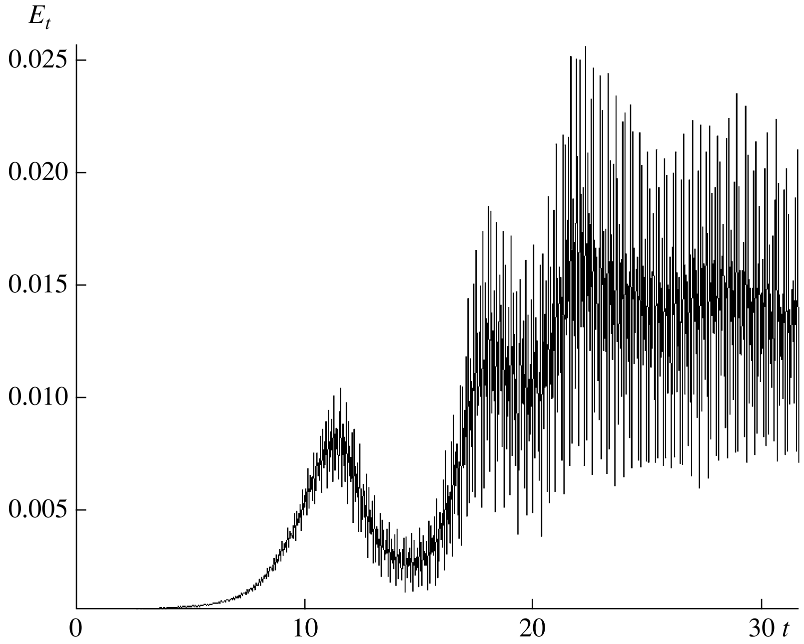
Фиг. 1 показывает, как происходит переход от ламинарного режима течения к пульсационному (для $\Omega = 3.84$). На рисунке справа от картин завихренности приведена линейка цветов с ее значениями. Изображены мгновенные линии тока. Видно, что вначале завихренность распределена равномерно по всему зазору, посередине зазора видно возмущение. Потом завихренность концентрируется в области, куда было внесено возмущение (белое кольцо на рисунке), и из этой области происходит рождение крупных вихрей (деление кольца на вихри). Внизу дан график зависимости энергии пульсаций от времени E_t, на котором отмечено время перехода в пульсационный режим t'. На фиг. 2 показаны зависимости времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного режима $E_t^{\max}$ от Ω. Заметим, что в случае $\Omega = 0.96$ сложно проследить интервал времени, когда происходит переход в пульсационный режим. Это видно как из картины завихренности на фиг. 3 (характерный масштаб вихрей мал по сравнению с масштабом задачи – величина зазора), так и из графика E_t на фиг. 4. Из всего этого можно заключить, что в данном случае наступает слабый пульсационный режим.

Как видно из фиг. 2, чем больше разность скоростей между цилиндрами, тем быстрее переход в пульсационный режим t' и больше энергия пульсационного режима $E_t^{\max}$. Это объясняется тем, что чем больше разность скоростей, тем больше перепад давления между внешним и внутренним цилиндрами. Перепад давления создает момент сил, под действием которых происходит рождение вихрей, а чем больше этот перепад, тем раньше рождаются вихри.

Обратимся к работе [4], в которой нестабильность плоскопараллельного невязкого двумерного течения исследована с использованием линеаризованного уравнения Эйлера (уравнение Рэлея) с условиями непротекания на границах. В этой работе был получен критерий нестабильности ламинарного течения с произвольным профилем скорости. Из него следует, что завихренность должна быть сконцентрирована в некоторой области течения, т.е. в профиле завихренности должен быть максимум и чем больше вторая производная в точке максимума (чем более выпуклый максимум), тем неустойчивее течение. Но максимум становится более выпуклым как раз при увеличении разности скоростей и, таким образом, получено, что данный критерий применим и в этом случае.



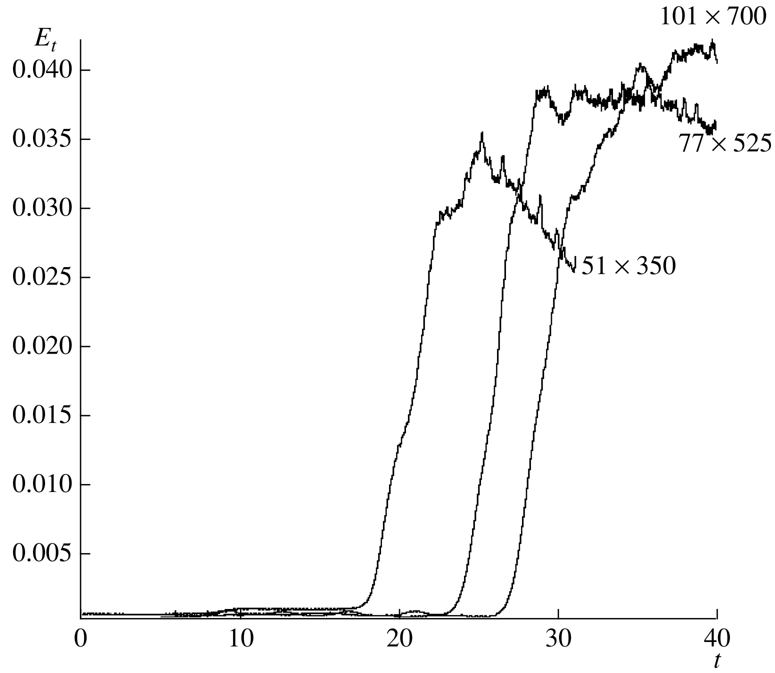
Фиг. 3.



Фиг. 4.

Теперь рассмотрим, как будут влиять на устойчивость течения такие величины, как ширина зазора между цилиндрами ΔR, длина волны n (число мод) и амплитуда возмущения a. Но вначале исследуем, как размерность сетки будет влиять на численное решение данной задачи.

Посмотрим, как будет влиять размерность сетки на параметры течения. Всего было проведено четыре эксперимента: для каждой из скоростей $\Omega = 1.92$ и $\Omega = 3.84$ счет велся на двух сетках: 77×525 и 101×700. Далее приведены величины времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного режима $E_t^{\max}$. В случае $\Omega = 1.92$ и сетки 77×525 было $t' = 35.6$, $E_t^{\max}$ =

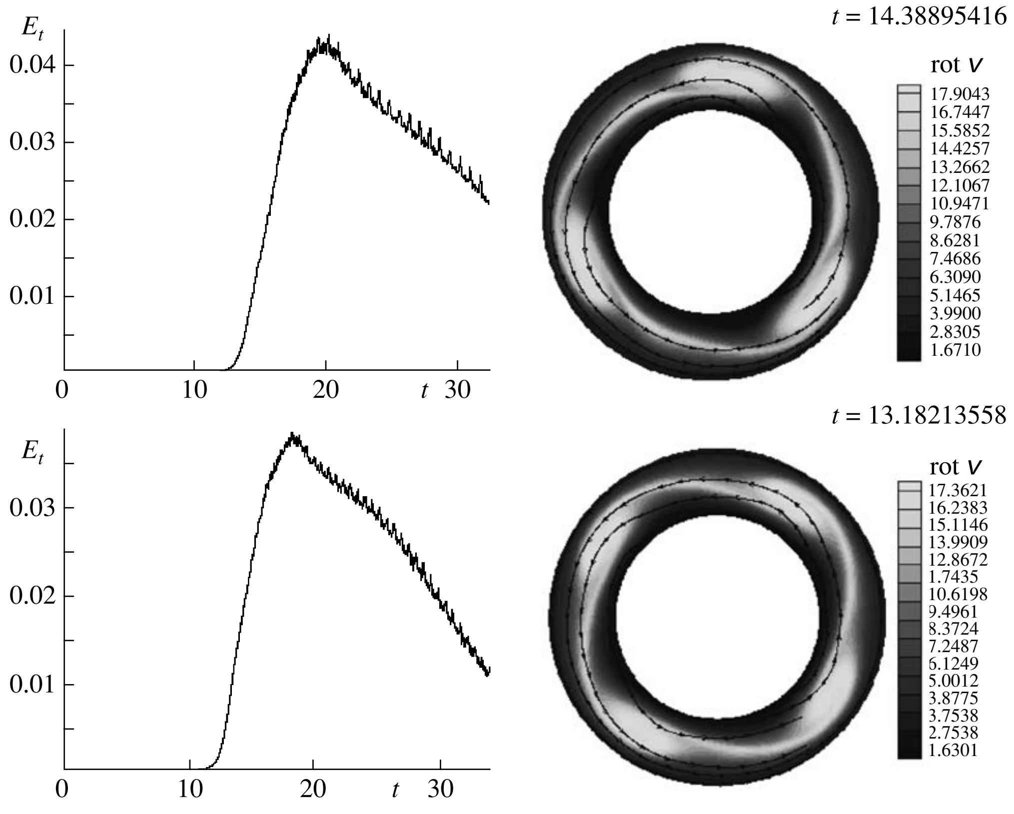


Фиг. 5.

= 0.0146; при Ω = 1.92 и сетке 101 × 700 было t' = 34, $E_t^{\max}$ = 0.0195. Для скорости Ω = 3.84 и сетки 77 × 525 было t' = 23, $E_t^{\max}$ = 0.0382, в случае сетки 101 × 700 было t' = 26, $E_t^{\max}$ = 0.0416. Также подсчитано число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\mathrm{num}} = 1.2 \times 10^5$; 1.5×10^5, 1.8×10^5 (в порядке возрастания размерности сеток). На фиг. 5 приведены три графика зависимости энергии пульсаций E_t от времени для Ω = 3.84 и различных трех сеток (размерность которых указана возле каждого из графиков).

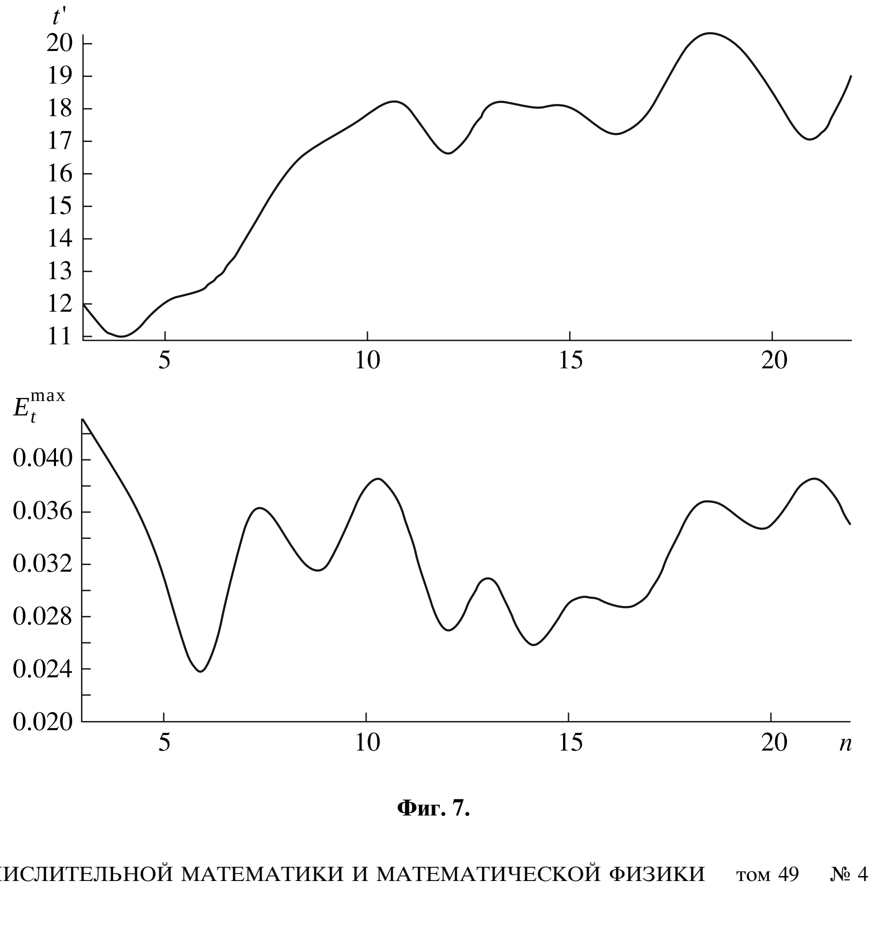
Из фиг. 5 видно, что энергия пульсационного режима $E_t^{\max}$ увеличивается с увеличением размерности сетки, стремясь к определенному пределу (истинной энергии пульсационного режима в невязком случае). Так же происходит увеличение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\mathrm{num}}$. Это связано с тем, что уменьшается величина сеточной вязкости и диссипация энергии происходит с меньшей скоростью. Здесь встает вопрос о характере зависимости времени перехода в пульсационный режим t'. Также было исследовано влияние сетки на масштабы крупных структур, которое показало их независимость (не сильную зависимость) от сетки.

Перейдем теперь к выяснению характера влияния длины волны возмущения. Положим ширину зазора ΔR = 0.5 и амплитуду возмущения ~4% от скорости течения. Величины мод возмущения менялись в интервале от трех мод до двадцати двух с шагом в одну моду. На фиг. 6 показаны графики зависимостей энергии пульсаций E_t от времени для числа мод n = 3, 4; видно, что в некоторый момент времени t' энергия начинает резко возрастать. Справа от каждого графика приведен рисунок, на котором изображено распределение завихренности к моменту времени, близкому к t'. Из рисунков видно, что резкое возрастание энергии E_t сопровождается рождением крупных вихрей. Таким образом, происходит переход в пульсационный режим (рождение крупных вихрей означает наступление пульсационного режима, так как E_t в этот момент резко возрастает). На фиг. 7 представлены графики зависимостей от числа мод n времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного течения $E_t^{\max}$ соответственно. Из графика зависимости t' видно, что с увеличением числа мод время перехода в пульсационный режим возрастает, а из графика для энергии прослеживается независимость от числа мод. Независимость энергии объясняется тем, что в сформированном пульсационном течении (в конце расчета) независимо от n всегда остается 2–3 вихря размером порядка зазора между цилиндрами (фиг. 8), в которых и сосредоточена бóльшая часть энергии пульсаций. Из графика зависимости t' можно



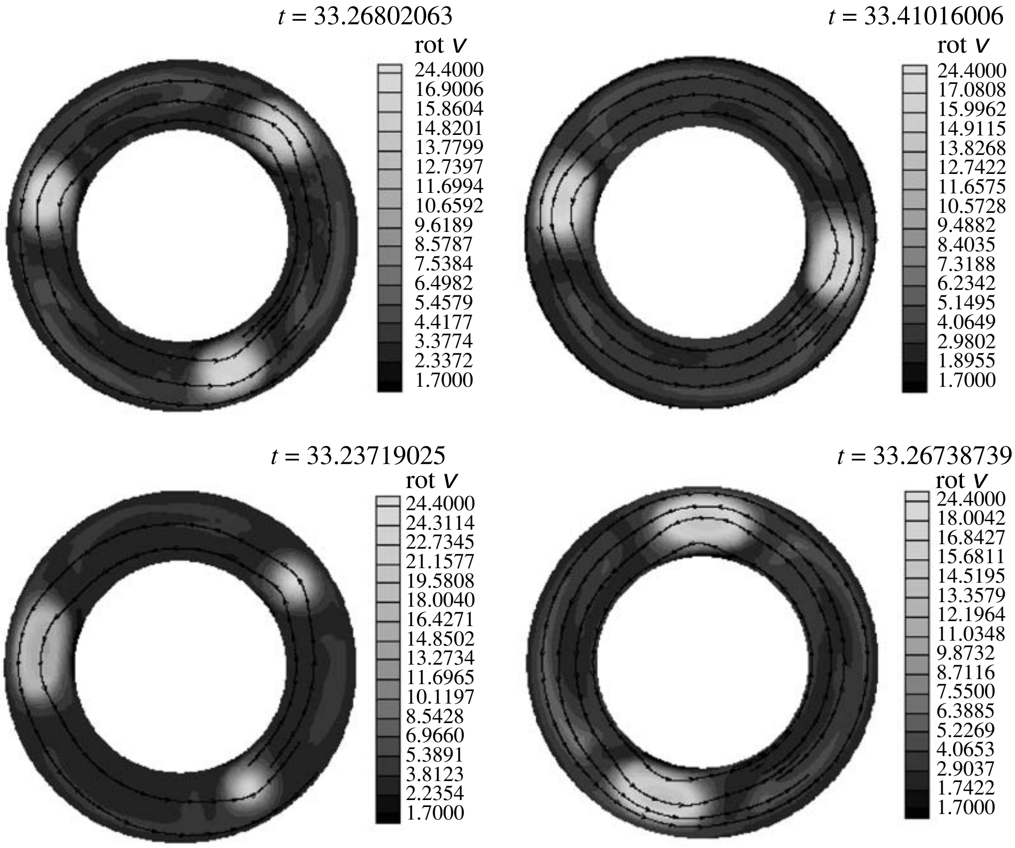
E_t
0.04
0.03
0.02
0.01
0
10
20
t 30
t = 14.38895416
rot v
17.9043
16.7447
15.5852
14.4257
13.2662
12.1067
10.9471
9.7876
8.6281
7.4686
6.3090
5.1465
3.9900
2.8305
1.6710
E_t
0.03
0.02
0.01
0
10
20
t 30
t = 13.18213558
rot v
17.3621
16.2383
15.1146
13.9909
12.8672
1.7435
10.6198
9.4961
8.3724
7.2487
6.1249
5.0012
3.8775
3.7538
2.7538
1.6301

Фиг. 6.

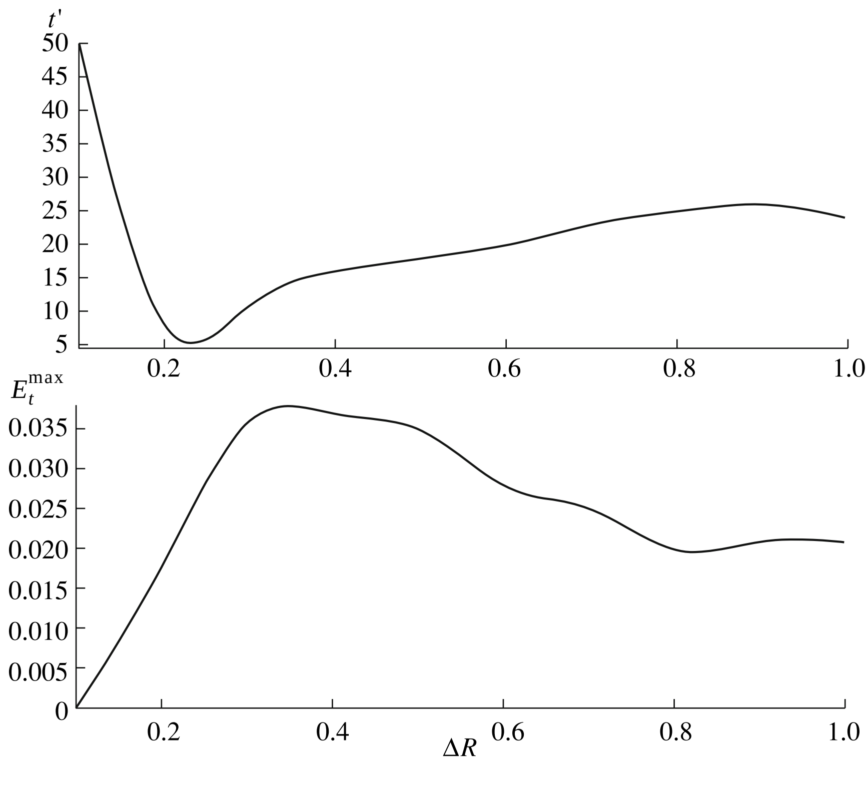


t'
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
5
10
15
20
E_t^{max}
0.040
0.036
0.032
0.028
0.024
0.020
5
10
15
20
n

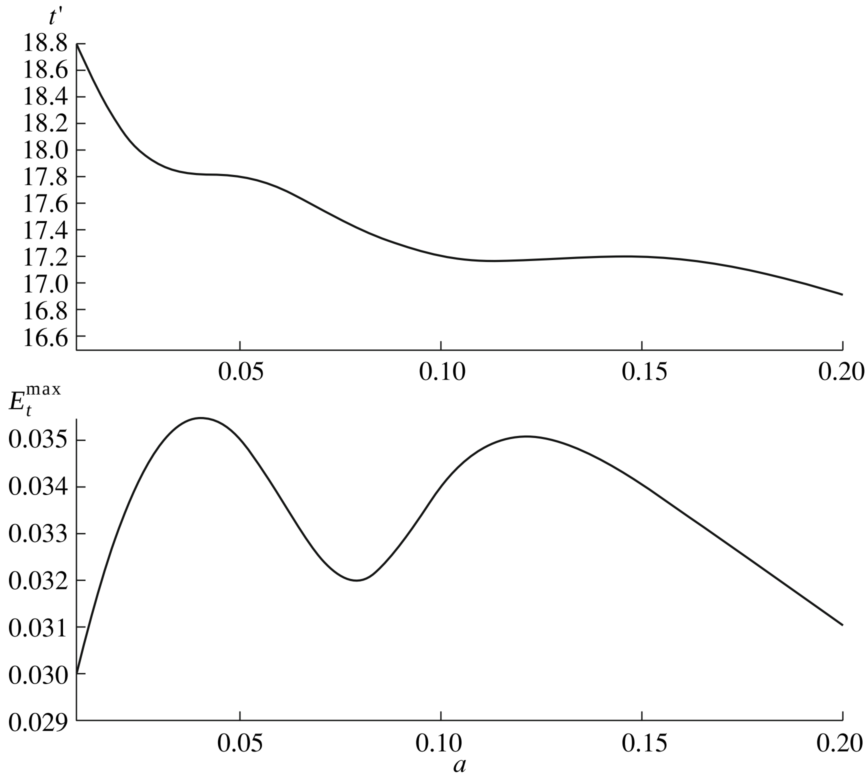
Фиг. 7.


t = 33.26802063
rot V
24.4000
16.9006
15.8604
14.8201
13.7799
12.7397
11.6994
10.6592
9.6189
8.5787
7.5384
6.4982
5.4579
4.4177
3.3774
2.3372
1.7000
t = 33.41016006
rot V
24.4000
17.0808
15.9962
14.9115
13.8268
12.7422
11.6575
10.5728
9.4882
8.4035
7.3188
6.2342
5.1495
4.0649
2.9802
1.8955
1.7000
t = 33.23719025
rot V
24.4000
24.3114
22.7345
21.1577
19.5808
18.0040
16.4271
14.8502
13.2734
11.6965
10.1197
8.5428
6.9660
5.3891
3.8123
2.2354
1.7000
t = 33.26738739
rot V
24.4000
18.0042
16.8427
15.6811
14.5195
13.3579
12.1964
11.0348
9.8732
8.7116
7.5500
6.3885
5.2269
4.0653
2.9037
1.7422
1.7000

Фиг. 8.


t'
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
E_t^max
0.035
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ΔR

Фиг. 9.



Фиг. 10.

заключить, что имеет место длинноволновая нестабильность, т.е. длинные волны более нестабильны, чем короткие.

В [4] был получен критерий нестабильности сдвигового течения, из которого следует, что короткие волны всегда стабильны, а длинные нет. Таким образом, видно, что критерии, полученные в [4] для плоскопараллельного течения, применимы и в данной задаче.

Теперь будем менять ширину зазора ΔR, оставляя постоянным средний радиус канала $R_{\text{ср}} = 1$. Расчеты проводились для интервала $\Delta R = [0.1, 1.0]$ с шагом 0.1, возмущение оставалось без изменений. На фиг. 9 представлены графики зависимостей времени перехода в пульсационный режим t' и энергии пульсационного режима $E_t^{\max}$ от ширины зазора ΔR.

В данном случае поведение завихренности ничем не отличается от ранее рассмотренных случаев. Вначале образуется кольцо завихренности, потом из этого кольца рождаются крупные вихри. Рассмотрим график для t', который имеет минимум, соответствующий $\Delta R \sim 0.2$. Наличие этого минимума объясняется тем, что справа от минимума ширина зазора растет и перепад давления (на единицу длины в радиальном направлении) в области, где образуется кольцо завихренности, уменьшается. Таким образом, уменьшается момент сил, под действием которых происходит рождение вихрей, и это ведет к увеличению времени t'. Возрастание же t' слева от минимума связано с влиянием стенок зазора, которые не дают родиться вихрям, по масштабу бóльшим ширины зазора.

4. ВЛИЯНИЕ АМПЛИТУДЫ НАЧАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В экспериментах величины амплитуды возмущений полагались равными 0.01, 0.02, 0.05, 0.08, 0.1, 0.15, 0.2. Приведем здесь графики зависимостей энергии $E_t^{\max}$ и времени t' от амплитуды a (фиг. 10). Из графика для $E_t^{\max}$ видно, что энергия пульсационного режима почти не зависит от амплитуды возмущения, то же самое можно сказать и о зависимости t'. Следовательно, можно заключить, что амплитуда начального возмущения не влияет на характер течения.

Попробуем теперь получить параметр, характеризующий данную задачу. Как было показано выше, в результате приведения уравнений к безразмерным переменным появляется временно́й параметр $T = \dfrac{\Delta R}{\Omega R_{\text{ср}}}$. Как известно, безразмерное число, характеризующее задачу, следует из закона подобия. В нашей задаче мы имеем два различных режима течения: первый – нестационарный (до перехода в пульсационный режим), второй – пульсационный (квазистационарный) режим. На нестационарный режим влияют геометрические параметры задачи (ΔR, $R_{\text{ср}}$), угловые скорости цилиндров Ω, а также возмущение (a, n). Данные параметры должны входить в закон подобия. В пульсационном же режиме влияние возмущения исчезает, так как энергия $E_t^{\max}$ и конечное число крупных вихрей не зависит ни от амплитуды, ни от длины волны возмущения. Таким образом, нельзя охарактеризовать течение единым параметром, так как у данных двух режимов различные законы подобия.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной работы было исследование влияния различных параметров задачи (характерных масштабов и скоростей) на возникновение и развитие пульсаций. Течение переходит в пульсационный режим, когда происходит резкое увеличение пульсационной энергии E_t и возникают крупные вихри. Было показано, что течение носит сдвиговый характер и поэтому оно нестабильно. Нестабильность, как и следует, усиливается с увеличением разности скоростей внутреннего и внешнего цилиндров. Это можно объяснить тем, что при увеличении разности скоростей увеличивается вторая производная завихренности в точке ее максимума, а из критерия, полученного в [4], следует возникновение неустойчивости.

Что касается влияния длины волны, то здесь наблюдается длинноволновая неустойчивость, т.е. время перехода в пульсационный режим t' уменьшается с ростом длины волны возмущения. В [4] показано, что длинные волны более всего нестабильны в плоскопараллельном двумерном сдвиговом течении.

Изменение ширины зазора сводится к влиянию на течение стенок цилиндра и перепада давления в зазоре. С одной стороны, при уменьшении ширины растет перепад давления, что сказывается на уменьшении t', а с другой – стенки мешают возникновению крупных вихрей. Этим обусловлено поведение зависимости t' от ΔR.

Что касается амплитуды возмущения, то она почти не влияет на параметры пульсационного режима. Параметры сетки (ее размерность) влияют на энергию $E_t^{\max}$ посредством сеточной вязкости, но здесь неизвестен характер влияния сетки на t'.

Показано, что в задаче нельзя ввести единый безразмерный параметр, так как течение имеет два режима (нестационарный и пульсационный, т.е. квазистационарный), характеризующихся различными законами подобия.

Приведем сравнение результатов данной работы с результатами из [3], где исследовалась неустойчивость Кельвина–Гельмгольца (НКГ). Данные работы подобны тем, что в обоих случаях производилось исследование сдвиговой неустойчивости; чтобы получить НКГ в нашем случае, следует устремить к нулю ширину сдвигового слоя, которая равна ΔR. В отличие от [3], где неустойчивость развивалась сразу после начала расчета, в нашей работе развитие неустойчивости начинается лишь спустя некоторое время. Если рассматривать картину завихренности в момент начала перехода в пульсационный режим, то в случае НКГ кольцо завихренности начинало делиться на более мелкие вихри по сравнению с нашим случаем. В НКГ нестабильны все длины волн, в нашем случае короткие волны являются более стабильными, чем длинные.

Следует заметить, что течение, рассмотренное нами, является устойчивым по критерию Рэлея $\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2$ (см. [6]). Это объясняется тем, что перепад давления вдоль радиального направления не достигает критического значения, при котором происходит рождение крупных вихрей. Но с течением времени градиент давления возрастает и, достигая критического значения в некоторой области, порождает вихри и, соответственно, переход в пульсационный режим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taylor G.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1923. V. 223. P. 289–343.

2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963.
3. *Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Чечеткин В.М.* Образование крупномасштабных структур в зазоре между вращающимися цилиндрами (задача Рэлея–Зельдовича) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 11. С. 1727–1737.
4. *Sun Liang*. General stability criterion for inviscid parallel flow // European J. Phys. 2007. V. 28. № 5. P. 889–895.
5. *Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Чечеткин В.М.* Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2003.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1986.
7. *Lord Rayleigh F.R.S.* On the stabiligy, or instability, of certain fluid motions // Proc. London Soc. 1880. S1–11. P. 57–72.
8. *Lord Rayleigh F.R.S.* On the dynamics of revolving fluids // Proc. London Soc. 1916. A 93. P. 148–154.
9. *Reynolds O.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1895. V. 186. P. 123–164.
10. *Линь Цзяо-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
11. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
12. *Юдович В.И.* Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1965. Т. 5. С. 1037–1040.
13. *Иванилов Ю.П., Яковлев Г.Н.* О бифуркации течения жидкости между вращающимися цилиндрами // Прикл. матем. и механ. 1966. Т. 30. С. 910–916.
14. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Communs. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167–192.
15. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
16. *Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Трошкин О.В.* Бифуркационная модель турбулентного течения в канале // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 2. С. 313–317.
17. *Опарина Е.И., Трошкин О.В.* Устойчивость течения Колмогорова в канале с твердыми стенками // Докл. РАН. 2004. Т. 398. № 4. С. 487–491.
18. *Фридман А.А.* Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. М.: ОНТИ, 1934.
19. *Helmholtz H.L.F.* Über discontinuierlich Flussigkeitsbewegungen, Monatsberichte königl. Berlin: Akad. Wiss., 1868.
20. *Kelvin* (*W. Thomson*). Mathematical and physical papers. Cambridge Univ. Press, 1910. V. 4.
21. *Richtmyer R.D.* Taylor instability in a shock acceleration of compressible fluids // Communs Pure and Appl. Math. 1960. V. 13. № 2. P. 297–319.
22. *Мешков Е.Е.* Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1969. Т. 5. С. 151–158.
23. *Taylor G.I.I.* The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I // Pros. Roy. Soc. London. Ser. A. 1950. V. 201. № 1065. P. 192–196.
24. *Bénard H.* Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide // Rev. générale d es Sci. pures et appl. 1900. V. 11. P. 1261–1309.
25. *Bénard H.* Les tourbillons cellulaires une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent // Ann. Chim. Phys. 1901. T. 23. P. 62–144.
26. *Arnold V.* Sur la topologie des ecoulement stationnaires des fluides parfaites // C.r. Acad. Sci. 1965. V. 261. № 1. P. 17–20.
27. *Anrold V.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier. 1966. V. 16. P. 319–361.
28. *Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // Прикл. матем. и механ. 1961. Т. 25. № 6. С. 1140–1143.
29. *Troshkin O.V.* Nontraditional methods in mathematical hydrodynamics, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.
30. *Трошкин О.В.* О топологическом анализе структуры гидродинамических течений // Успехи матем. наук. Т. 43:4. № 262. С. 129–158.
31. *Belotserkovskii O.M.* Karman's lecture von Karman institute for fluid dynamics. 1978.
32. *Белоцерковский О.М.* Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 12. С. 1857–1882.
33. *Belotserkovskii O.M.* Turbulence and instabilities. M.: MZpress Pubs, 2003.
34. *Belotserkovskii O.M., Oparin A.M., Chechetkin V.M.* Turbulence: new approaches. Cambridge: CISP CBI 6AZ, 2005.

35. *Belotserkovskii O., Fortova S., Oparin A. et al.* The turbulence in free shear flows and in accretion disks, investigation of hydrodynamic instability and turbulence in fundamental and technological problems by means of mathematical modeling with supercomputers. Nagoya, Japan: Nagoya Univ., 2005. P. 229–241.
36. *Ranque G.* Experiments on expansion in a vortex with simultaneous exhaust of hot and air // J. Phys. et de la Radium. 1933. V. 4. № 6. P. 1125–1130.
37. *Hilsch R.* The use of the expansion of gases in a centrifugal field as cooling process // Rev. Sci. Instruments. 1947. V. 18. № 2. P. 108–1113.
38. *Дирак П.А.М.* Собрание научных турдов. Том 4. М.: Физматлит, 2005.
39. *Айсен Э.М., Борисевич В.Д., Левин Е.В.* Моделирование течения и диффузии в газовой центрифуге для разделения многокомпонентных изотопных смесей // Матем. моделирование. 1997. Т. 9. № 4. С. 27–38.
40. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele–Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. P. 312–329.
41. *Белоцерковская М.С.* Численное моделирование процессов фильтрации с использованием метода вложенных сеток: Дис. … канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2007.

Сдано в набор 12.12.2008 г. Подписано к печати 03.03.2009 г. Формат бумаги $60 \times 88^1/_8$
Цифровая печать Усл. печ. л. 22.0 Усл. кр.-отт. 6.4 тыс. Уч.-изд. л. 22.0 Бум. л. 11.0
Тираж 286 экз. Зак. 112

Учредители: Российская академия наук, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Издатель: Академиздатцентр “Наука”, 117997 Москва, Профсоюзная ул., 90
Оригинал-макет подготовлен МАИК “Наука/Интерпериодика”
Отпечатано в ППП “Типография “Наука”, 121099 Москва, Шубинский пер., 6